ANALYSE DES INTERACTIONS MULTI-AGENTS: THÉORIE DES JEUX

Cours 4

Présentation

- Utiliser des agents pour maximiser leur objectif en interagissant
- Pour quoi faire?
  - Prise de décision collective
    - Quel est l'état de santé du soldat en fonction des capteurs?
  - Résolution de problème:
    - Réaliser un emploi du temps automatiquement
  - Économie artificielle:
    - Comment trouver les ensembles de biens au meilleur prix sur internet
- Pourquoi avec des agents?
  - Utilité individuelle
    - Confidentialité et (relative) simplicité de la définition
  - Calcul réparti de la solution
- Comment?

Présentation

- Comment utiliser un SMA pour construire les emploi du temps?
  - Un agent par prof/élève (/salle/créneau horaire?)
  - Je définie une fonction d'utilité par agent, mais…

- Sous-problèmes:
  - Quel méthode de coordination choisir?
    - Enchères? Coalitions? Votes? Négociation?
      - ***Méthodologie de coordination***

  - Pour paramétrer/choisir le protocole, qu'est-ce que je veux optimiser?
    - La somme des fonction d'utilité? Le min? Le max?
      - ***Fonction de bien-être social***

  - Comment savoir quel sera le résultat des interactions?
    - Quelle sera l'utilité finale des agents? Comment caractériser la situation finale?
      - ***Analyse des interactions***
      - ***➔ THEORIE DES JEUX***

Exemple

- Choisir un nombre entre 0 et 100
- Le gagnant sera celui qui donne le nombre le plus proche des 2/3 de la moyenne

(dérivé du jeu du « Concours de Beauté »)

Théorie des jeux

- Présentation
  - SMA et Théorie des jeux
- Jeux en Forme normale
  - Définitions
  - Équilibres en stratégie pure
  - Équilibres en stratégie mixte
- Jeux en forme extensive
  - Définitions
  - Information parfaite
  - Information imparfaite
- Jeux répétés
  - Définitions
  - Tournois
  - TDJ évolutionnaire
- Rationalité limitée
  - Extensions de la fonction d'utilité
  - Rationalité procédurale
  - Rationalité de règle

Exemple: dilemme du prisonnier

- Deux prisonnier interrogés séparément
- Deux possibilités: parler (accuser l'autre) ou se taire.
  - Si les deux se taisent (S,S), pas de preuve, peine minimale d'un an chacun
  - Si un des deux accuse l'autre, il est libéré et l'autre a la peine maximum (8 ans)
  - Si les deux s'accusent, peine moyenne pour les deux (5 ans)
- Que vont faire les prisonniers?
- Quels sont les solutions du jeu?

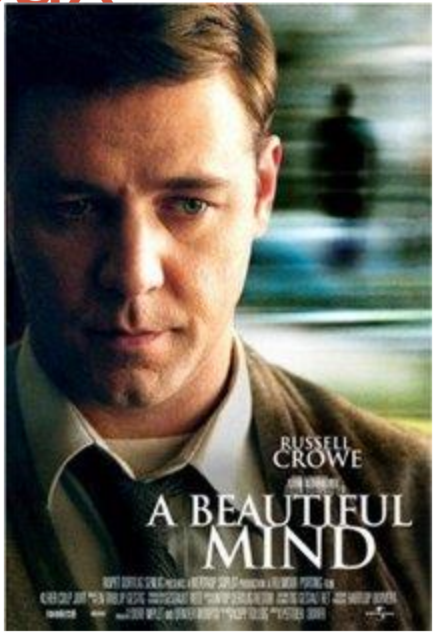
	Parle	Silence
Parle	(-5,-5)	(0,-8)
Silence	(-8,0)	(-1,-1)

Dilemme du prisonnier: solutions

- Chaque prisonnier a intérêt à parler
  - (-5,-5) est solution
- P1 préfère (0,-8) et P2 préfère (-8,0)
  - Ce sont des solutions: choix préférés
- Le plus raisonnable serait de se mettre d'accord sur (-1,-1)
  - C'est une solution
- Une situation (-5,-5) apparait clairement dominé par une autre (–1,-1)
  - Pas de chance, (-5,-5) est le seul équilibre de Nash du jeu

	Parle	Silence
Parle	(-5,-5)	(0,-8)
Silence	(-8,0)	(-1,-1)

John Nash et la théorie des jeux



- Histoire
  - Né en 1928
  - Thèse de 28 pages à Princeton en 2 ans
  - 3 articles en 1950 et 1953 (puis rien pendant 30 ans)
  - Interné pour schizophrénie à partir de 1960
  - Prix Nobel en 1994
- Rupture avec l'équilibre économique
  - La « main invisible » du marché conduit à l'équilibre, qui se situe sur le front de Pareto
    - Pas d'analyse du mécanisme, le commissaire priseur walrassien donne les prix d'équilibre
  - L'équilibre de Nash est issu du mécanisme d'interaction, et n'est pas toujours optimal

Dilemme du prisonnier: variante

	La plus belle	Une autre
La plus belle	(0,0)	(10,5)
Une autre	(5,10)	(5,5)

Exemple 2: Pierre/Feuille/Ciseau

	P	F	C
P	(0,0	(-1,1)	(1,-1)
F	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
C	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Jeu en forme normale/stratégique: notations

- Une hypothèse de base de la théorie des jeux est de considérer que les agents sont rationnels, c'est-à-dire qu'ils tentent d'arriver à la situation la meilleure pour eux.
- On appelle Utilité la mesure de chaque situation aux yeux de l'agent.
- L ' Utilité n'est ni une mesure du gain matériel, monétaire, etc. mais une mesure subjective du contentement de l'agent.
- Utiliser une fonction d'utilité pour définir les préférences de l'agent ne suppose pas que l'agent utilise cette fonction, mais qu'il raisonne conformément à un ensemble de conditions de rationalité.

Jeu en forme normale/stratégique: notations

- Un jeu sous forme stratégique est déni par un tuple (N,A, u)
  - un ensemble N = {1..n} de joueurs
  - pour chaque joueur i un ensemble de stratégies $S_i = \{s_1..s_{n_i}\}$
  - pour chaque joueur i une fonction de valuation i : $\mu_i : S_1 \times .. \times S_i \to \mathbb{R}$

- Notations :
  - On notera s un profil de stratégies $\{s_1, \ldots, s_n\}$ où $\forall i \; s_i \in S_i$.
  - On note s_{-i} le profil s des stratégies autres que celles du joueur i :

    $$s_{-i} = \{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$$
  - On note S l'espace des stratégies, ie : $S = \times_{i=1}^{n} S_i$

Typologie des jeux

- Jeux à somme nulle (strictement compétitifs) / Jeux à somme non-nulle
- Jeux à information parfaite / Jeux à information imparfaite
- Jeux coopératifs / Jeux non-coopératifs
- Jeux à 2 joueurs / Jeux à n joueurs
- Jeux répétés / jeux à coup unique
- Jeux simultanés / jeux avec coups décalés

Stratégie dominée/dominante

- Principe
  - Une stratégie n'est jamais jouée si une autre assure une utilité meilleure dans tous les cas

	u	v
x	(4,2)	(3,1)
y	(2,5)	(9,0)

- Définition:
  - Une stratégie s_i est (strictement) dominée pour le joueur i si il existe une stratégie s'_i telle que pour tous les profils s_{-i}

$$\mu_i(s_i', s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i})$$

  - Une stratégie s_i est faiblement dominée pour le joueur i si il existe une stratégie s'_i telle que pour tous les profils s_{-i}

$$\mu_i(s_i', s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i})$$

Élimination des stratégies dominées

- Principe: on élimine successivement toutes les stratégies strictement dominées.

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Élimination des stratégies dominées

- Principe: on élimine successivement toutes les stratégies strictement dominées.

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Élimination des stratégies dominées

- Principe: on élimine successivement toutes les stratégies strictement dominées.

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Élimination des stratégies dominées

- Principe: on élimine successivement toutes les stratégies strictement dominées.

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Élimination des stratégies dominées

- Principe: on élimine successivement toutes les stratégies strictement dominées.

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Élimination progressive de stratégie

- Un jeu est dit résolvable par élimination itérative des stratégies dominées, si on obtient un unique profile en éliminant successivement des stratégies (strictement) dominées.
- Les profils obtenus après élimination itérative des stratégies (strictement) dominées (EISD) ne dépendent pas de l'ordre choisi pour l'élimination des stratégies.
- Par contre, on peut obtenir des profils différents lorsque l'on choisit des ordres différents pour l'élimination itérative de stratégies faiblement dominées (EISfD).
- Les résultats obtenus par EISD sont donc plus robustes que ceux obtenus par EISfD.
- Problème majeur de cette méthode: tous les jeux ne sont pas résolvable par EISD !

	u	v	w
x	3,6	7,1	4,8
y	5,1	8,2	6,1
z	6,0	6,2	3,2

Équilibre de Nash

- Principe: à partir de n'importe quel profil, un joueur a-t-il intérêt à changer de stratégie?

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Équilibre de Nash

- Principe: à partir de n'importe quel profil, un joueur a-t-il intérêt à changer de stratégie?

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Équilibre de Nash

- Principe: à partir de n'importe quel profil, un joueur a-t-il intérêt à changer de stratégie?

	u	v	w
x	3,0	0,2	0,3
y	2,0	1,1 EN	2,0
z	0,3	0,2	3,0

Équilibre de Nash

- La notion d' **équilibre de Nash** est une situation telle qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier (seul) de la situation obtenue.

- Un **équilibre de Nash** est un profil de stratégies s^* tel que pour tout joueur i, pour toute stratégie s'

$$\mu_i(s_1^*, s_{-i}^*) \geq \mu_i(s', s_{-i}^*)$$

Équilibre de Nash

	Parle	Silence
Parle	(-5,-5)	(0,-8)
Silence	(-8,0)	(-1,-1)

Équilibre de Nash

- Exemple 3

	La plus belle	Une autre
La plus belle	(0,0)	(10,5)
Une autre	(5,10)	(5,5)

Équilibre de Nash: propriétés

- Un profil (unique) obtenu par élimination itérative de stratégies (strictement) dominées (EISD) est un équilibre de Nash (et c'est le seul équilibre du jeu).

- Un jeu (en stratégies pures) peut avoir plusieurs équilibres de Nash, mais il peut aussi n'en avoir aucun !

- Deux équilibres de Nash $s=(s_i, s_{-i})$ et $s^*=(s^*_i, s^*_{-i})$ sont *interchangeables* si pour tout i $s=(s_i, s^*_{-i})$ et (s_i, s^*_{-i}) sont aussi des équilibres de Nash.

- Deux équilibres de Nash s et s^* sont *équivalents* si ils donnent la même utilité à tous les joueurs

Optimum/domination de Pareto

- Un profil s est **optimal** au sens de Pareto si il est impossible d'augmenter l'utilité d'un joueur sans diminuer celle d'au moins un autre joueur.

- Un profil s **domine** un profile s' **au sens de Pareto** si il est au moins aussi bon pour tous les joueurs et si s est strictement meilleur pour au moins l'un d'entre eux.

- Un profil s est **optimal** au sens de Pareto si il n'est Pareto-dominé par aucun autre profil.
  - Pas de profil s' tq: $\begin{cases} \exists i, & u_i(s') > u_i(s) \\ \forall j, & u_j(s') \geq u_j(s) \end{cases}$

	Parle	Silence
Parle	(-5,-5)	(0,-8)
Silence	(-8,0)	(-1,-1)

	P	F	C
P	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
F	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
C	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Exercice

- Trouver les équilibre de Nash, les profils obtenus par EISD et les optimum de Pareto

	u	v	w	x
a	5,2	5,3	7,5	6,3
b	2,0	6,5	4,5	4,3
c	0,8	4,3	3,7	5,6
d	4,2	2,2	3,0	8,3

Niveau de sécurité

- Principe:
  - Qu'est-ce que j'obtiens au pire?

	u	v
x	(9,9)	(0,8)
y	(8,0)	(7,7)

- Le niveau de sécurité d'une stratégie s_i pour le joueur i est le gain minimum que peut apporter cette stratégie quel que soit le choix des autres joueurs, soit

$$\min_{s_{-i}} \mu_i(s_i, s_{-i})$$

- On définit le **niveau de sécurité (ou maxmin) d'un joueur** i comme le niveau de sécurité maximal des stratégies de i.

Jeux à deux joueurs à somme nulle

- Rôle central
  - le plus simple
  - pas de notion de majorité
  - pas de coalition

- Strictement Compétitif
  - Les joueurs ont des préférences strictement opposées
  - Pour tout profil de stratégies s, on a $u1(s) + u2(s) = 0$

- Exemples :
  - Jeux de plateau (echecs, dames, …)

Jeux à deux joueurs à somme nulle

	y1	y2	y3	y4
x1	18,-18	3,-3	0,0	2,-2
x2	0,0	3,-3	8,-8	20,-20
x3	5,-5	4,-4	5,-5	5,-5
x4	9,-9	3,-3	0,0	20,-20

Jeux à deux joueurs à somme nulle

	y1	y2	y3	y4
x1	18	3	0	2
x2	0	3	8	20
x3	5	4	5	5
x4	9	3	0	20

- Le joueur 1 tente de maximiser son niveau de sécurité

$$v_x = \max_i(\min_j \mu(x_i, y_j))$$

- Le joueur 2 tente de minimiser la meilleure réponse du joueur 1 (minimax)

$$v_y = \min_j(\max_i \mu(x_i, y_j))$$

- Si $v_x = v_y = v$, alors tout couple de stratégies (xi; yi), xi garantissant v au joueur 1 et yi garantissant v au joueur 2 forment un équilibre de Nash et sont des stratégies respectivement maximin et minimax pour les joueurs 1 et 2.

Stratégie mixte: la bataille des sexes

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Sur cet exemple le niveau de sécurité des deux joueurs est 0.
- Supposons que le joueur 1 joue aléatoirement f et c avec une probabilité de ½

$$\mu_1(<(f,1/2),(c,1/2)>,f) = 1/2*2+1/2*0 = 1$$

$$\mu_1(<(f,1/2),(c,1/2)>,c) = 1/2*0+1/2*1 = 1/2$$

- Avec cette stratégie le niveau de sécurité du joueur 1 est 1/2

Stratégie pures – stratégies mixtes

- Les stratégies que nous avons dénies et utilisées pour le moment sont des **stratégies pures**, c'est-à-dire les options qui se présentent aux joueurs.
- Une **stratégie mixte** $\boldsymbol{\sigma}_i$ est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures.
- L'ensemble des stratégies mixtes d'un joueur i se note Σ_i.
- L'ensemble des stratégies pures utilisées (i.e. dont la probabilité n'est pas nulle) par une stratégie mixte σ_i est appelé le **support** de la stratégie mixte.
- Notons $p_i(s_k)$ la probabilité associée à s_k par σ_i, l'utilité d'un profil de stratégies mixtes est définie par :
- $$\mu_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} p_j(s_j)\right) \mu_i(s)$$

Stratégies mixtes: stratégie maxmin

	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	(1-x)

- Stratégie qui maximise le paiement garanti (niveau de sécurité)

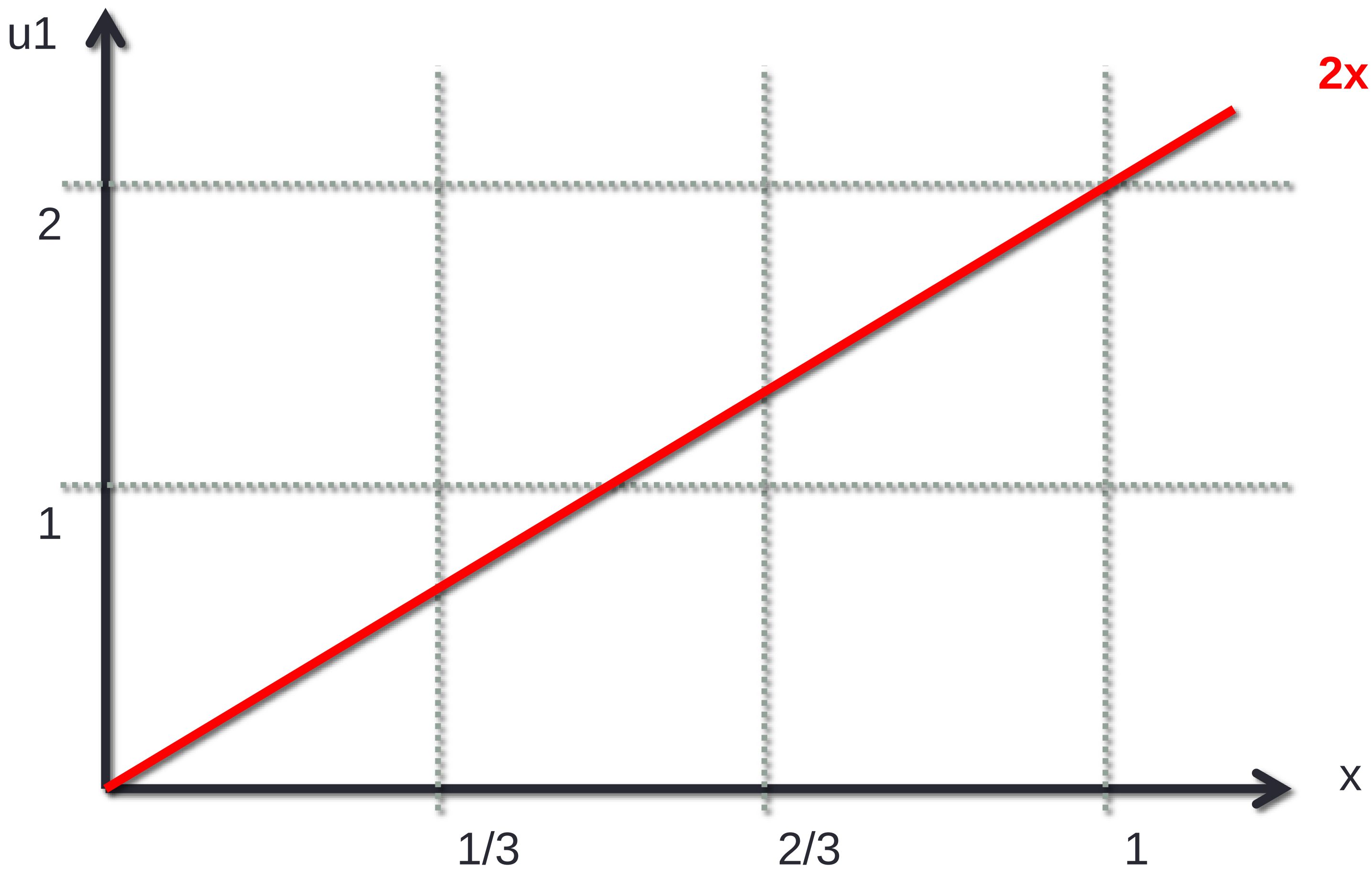
- Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, pour quel x maximise-t-il son niveau de sécurité

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,f) & = & x*2+(1-x)*0 & = & 2x \\ \mu_1(<(f,x),(c,1-x)>,c) & = & x*0+(1-x)*1 & = & 1-x \end{array}$$

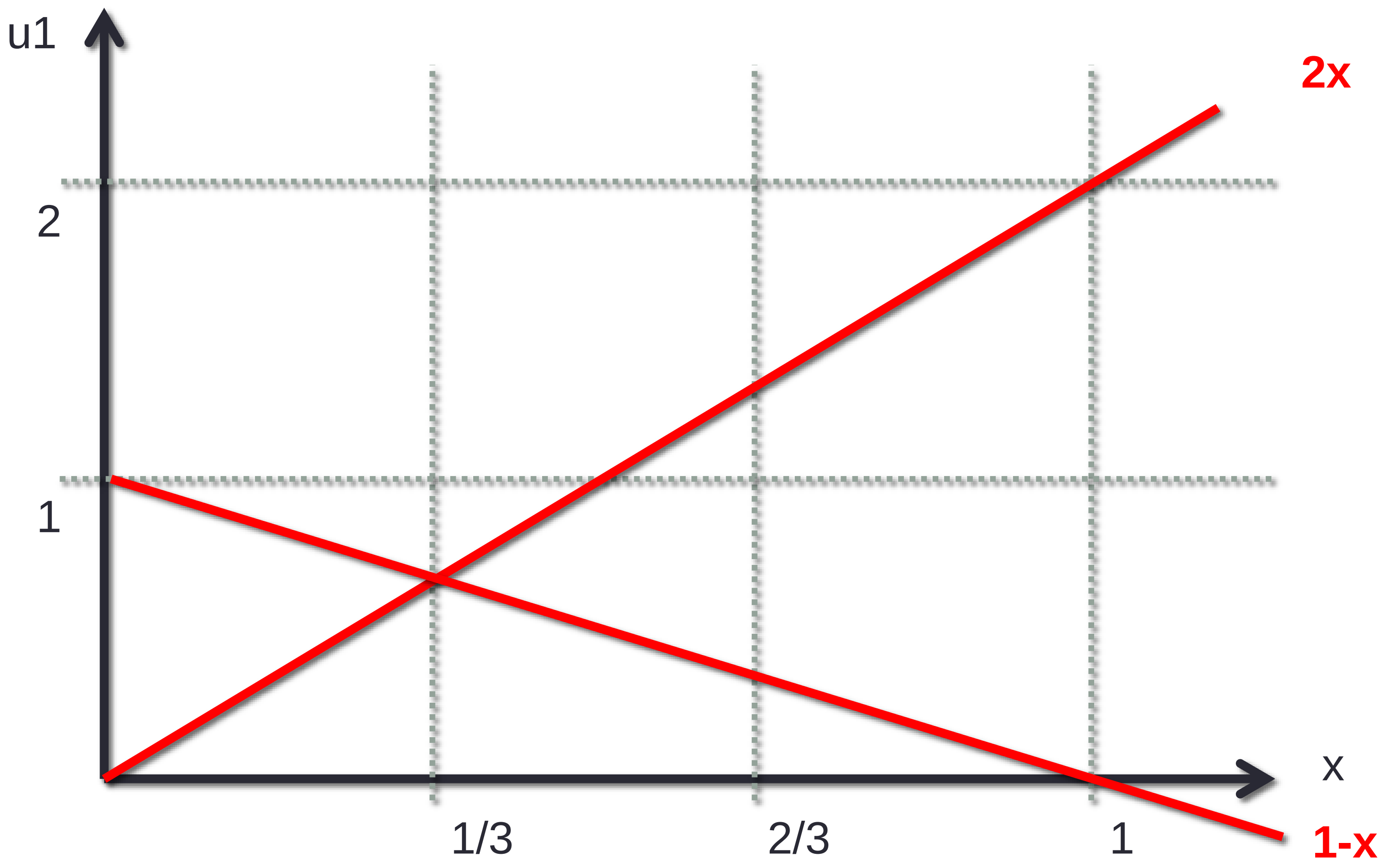
$$\max_x \min(2x, 1-x) = 1/3$$

- Le niveau de sécurité du joueur 1 est donc de 2/3

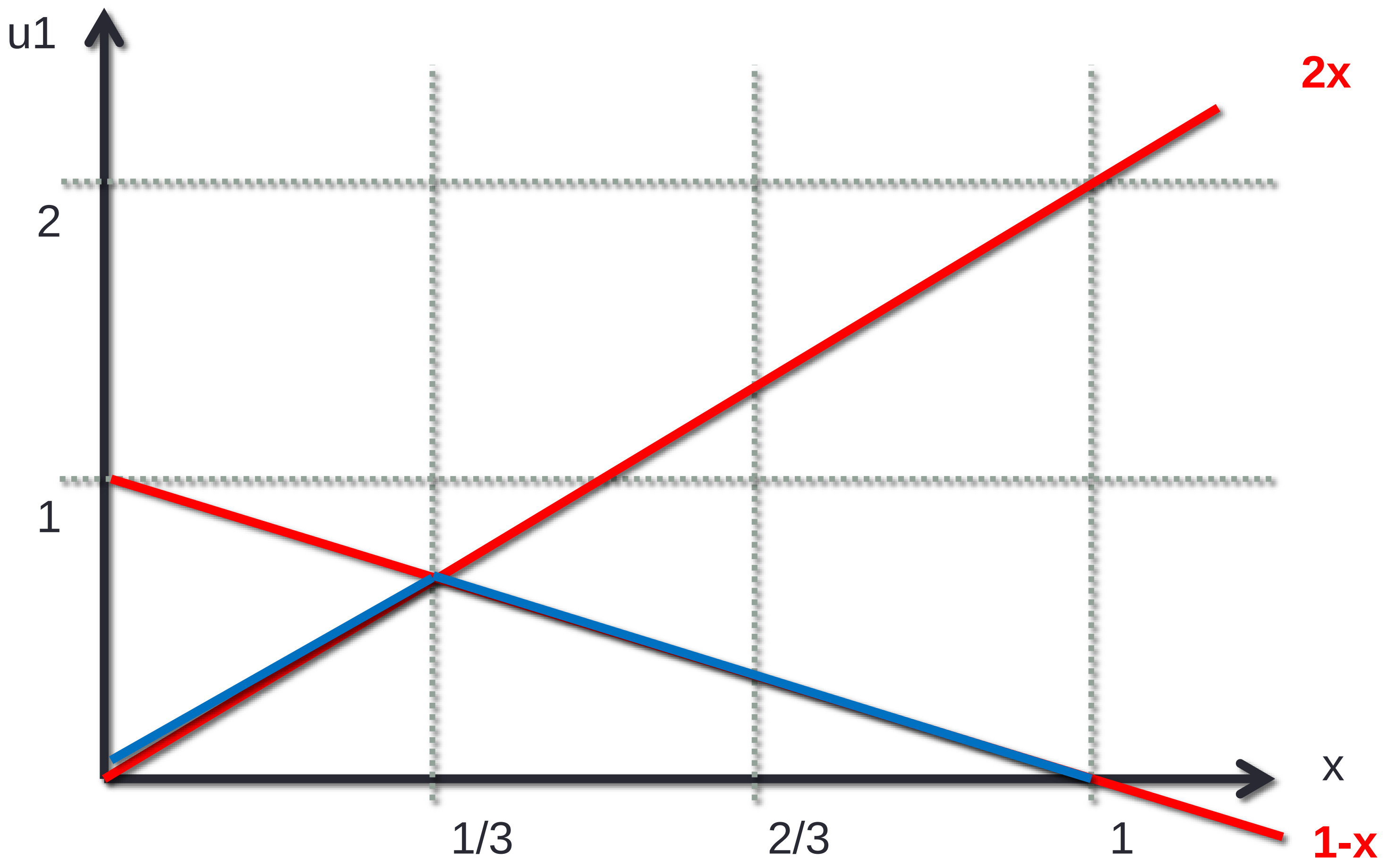
Stratégie maxmin: représentation graphique



Stratégie maxmin: représentation graphique



Stratégie maxmin: représentation graphique



Équilibre de Nash en stratégie mixte

- Définition: Un équilibre de Nash en stratégies mixtes est un profil de stratégies mixtes ***σ**** tel que pour tout i et tout $\boldsymbol{\sigma}_i \in \Sigma_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

- Théorème. ***σ**** est un équilibre de Nash si et seulement si pour tout i et tout $\boldsymbol{s}_i \in S_i$

$$\mu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq \mu_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$$

- Théorème [Nash, 1950] **Tout jeu sous forme stratégique a un équilibre de Nash en stratégies mixtes.**

Équilibre de Nash en stratégie mixte

	f (y)	c (1-y)
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Soit y la probabilité avec laquelle le joueur 2 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 1 ?

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1(f, <(f,y),(c,1-y)>) & = & y*2+(1-y)*0 & = & 2y \\ \mu_1(c, <(f,y),(c,1-y)>) & = & y*0+(1-y)*1 & = & 1-y \end{array}$$

- Donc:
  - Si 2y > 1 - y (y > 1/3), la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer f
  - Si 2y < 1 - y (y < 1/3), la meilleure réponse du joueur 1 est de jouer c
  - Si 2y = 1 - y (y = 1/3), le joueur 1 est indifférent entre f et c, il peut donc jouer l'une ou l'autre, ou n'importe quelle combinaison des deux.

Équilibre de Nash en stratégie mixte

	y	(1-y)	
	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	(1-x)

- Soit x la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue f, quelle est la meilleure réponse du joueur 2 ?

$$
\begin{aligned}
\mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,f) &= x*1+(1-x)*0 &= x \\
\mu_2(<(f,x),(c,1-x)>,c) &= x*0+(1-x)*2 &= 2(1-x)
\end{aligned}
$$

- Donc:
  - Si x > 2(1 - x) (x > 2/3), la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer f
  - Si x < 2(1 - x) (x < 2/3), la meilleure réponse du joueur 2 est de jouer c
  - Si x = 2(1 - x) (x = 2/3), le joueur 2 est indifférent entre f et c, il peut donc jouer l'une ou l'autre, ou n'importe quelle combinaison des deux.

Équilibre de Nash en stratégie mixte

	y	(1-y)	
	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	(1-x)

- Le profil $\boldsymbol{\sigma^*}$ = (< (f, 2/3); (c, 1/3) >;< (f, 1/3); (c, 2/3) >) est donc un équilibre de Nash en stratégie mixte.

Équilibre de Nash en stratégie mixte

		f	c	
		y	(1-y)	
f		2,1	0,0	x
c		0,0	1,2	(1-x)

- Les gains des deux joueurs avec un profil en stratégie mixte sont:

$$\begin{aligned} \mu_1(\sigma) &= x*y*2+x*(1-y)*0+(1-x)*y*0+(1-x)*(1-y)*1 \\ &= 3xy-x-y+1 \\ \mu_2(\sigma) &= x*y*1+x*(1-y)*0+(1-x)*y*0+(1-x)*(1-y)*2 \\ &= 3xy-2x-2y+2 \end{aligned}$$

Équilibre de Nash en stratégie mixte

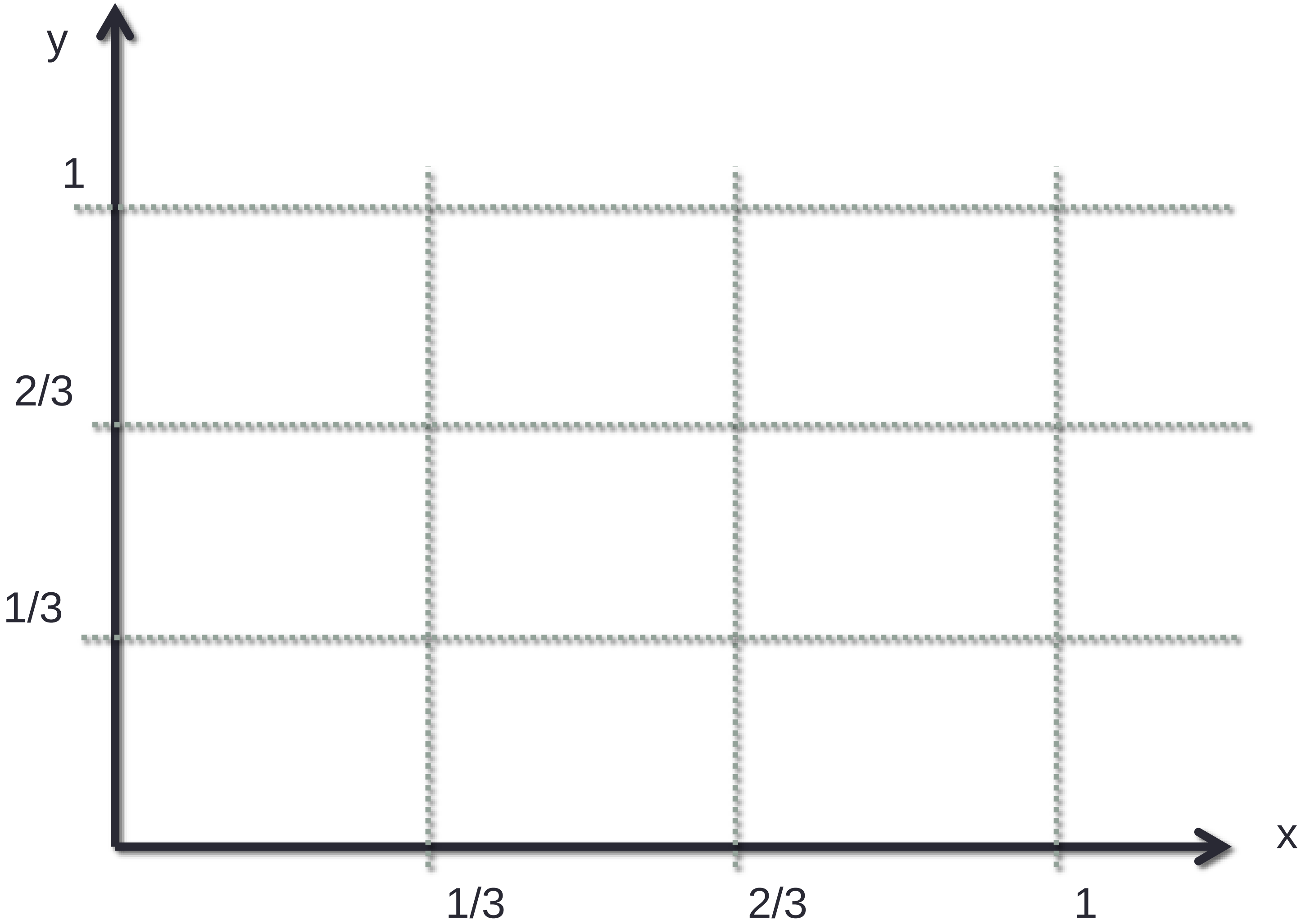
	y	(1-y)	
	f	c	
f	2,1	0,0	x
c	0,0	1,2	(1-x)

- Le profil σ* = (< (f, 2/3); (c, 1/3) >;< (f, 1/3); (c, 2/3) >) est donc un équilibre de Nash en stratégie mixte.

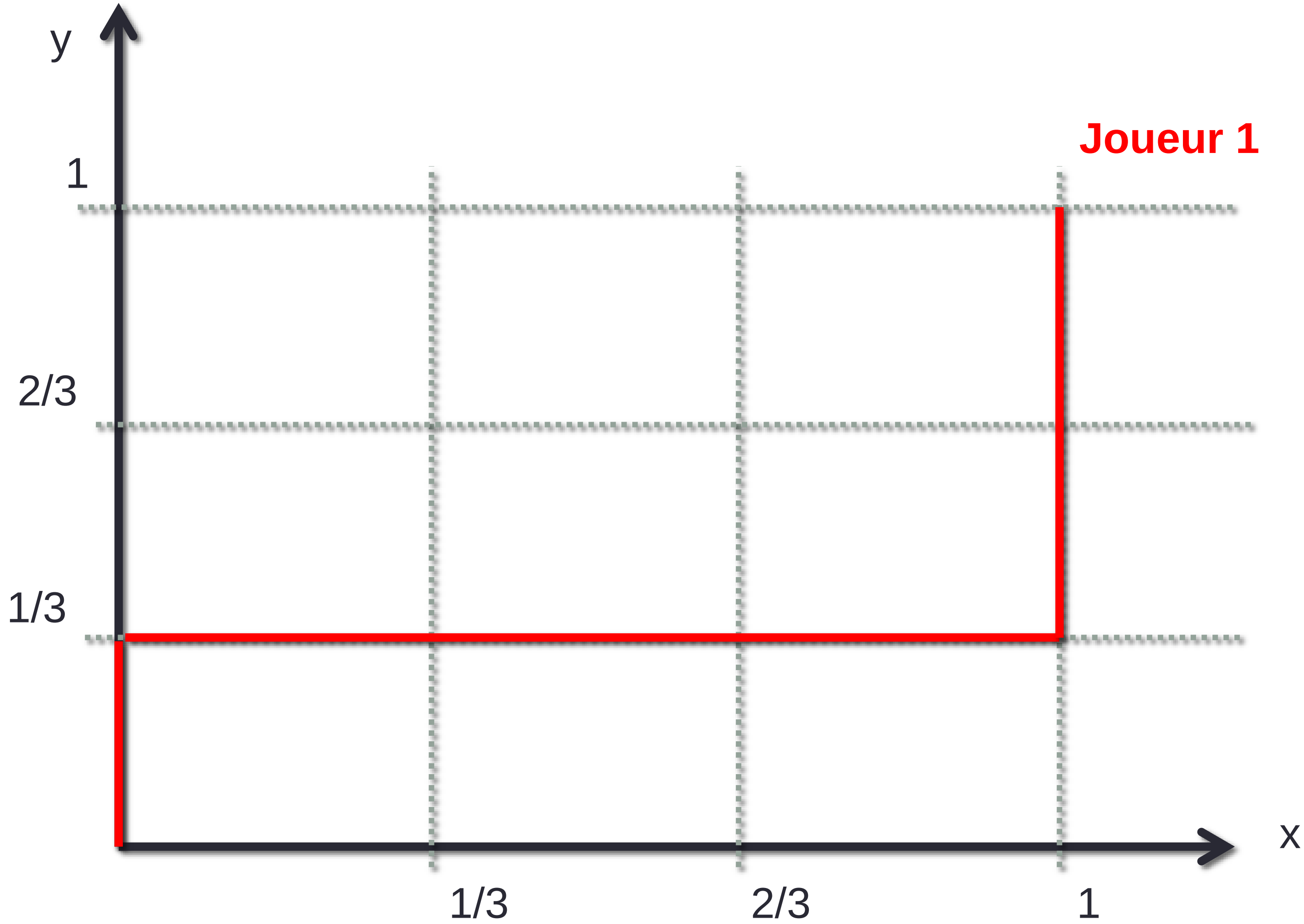
- Les gains des deux joueurs sont:

$$\begin{aligned} \mu_1(\sigma^*) &= 3.2/3.1/3 - 2/3 - 1/3 + 1 \\ &= 2/3 \\ \mu_2(\sigma^*) &= 3.2/3.1/3 - 2.2/3 - 2.1/3 + 2 \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

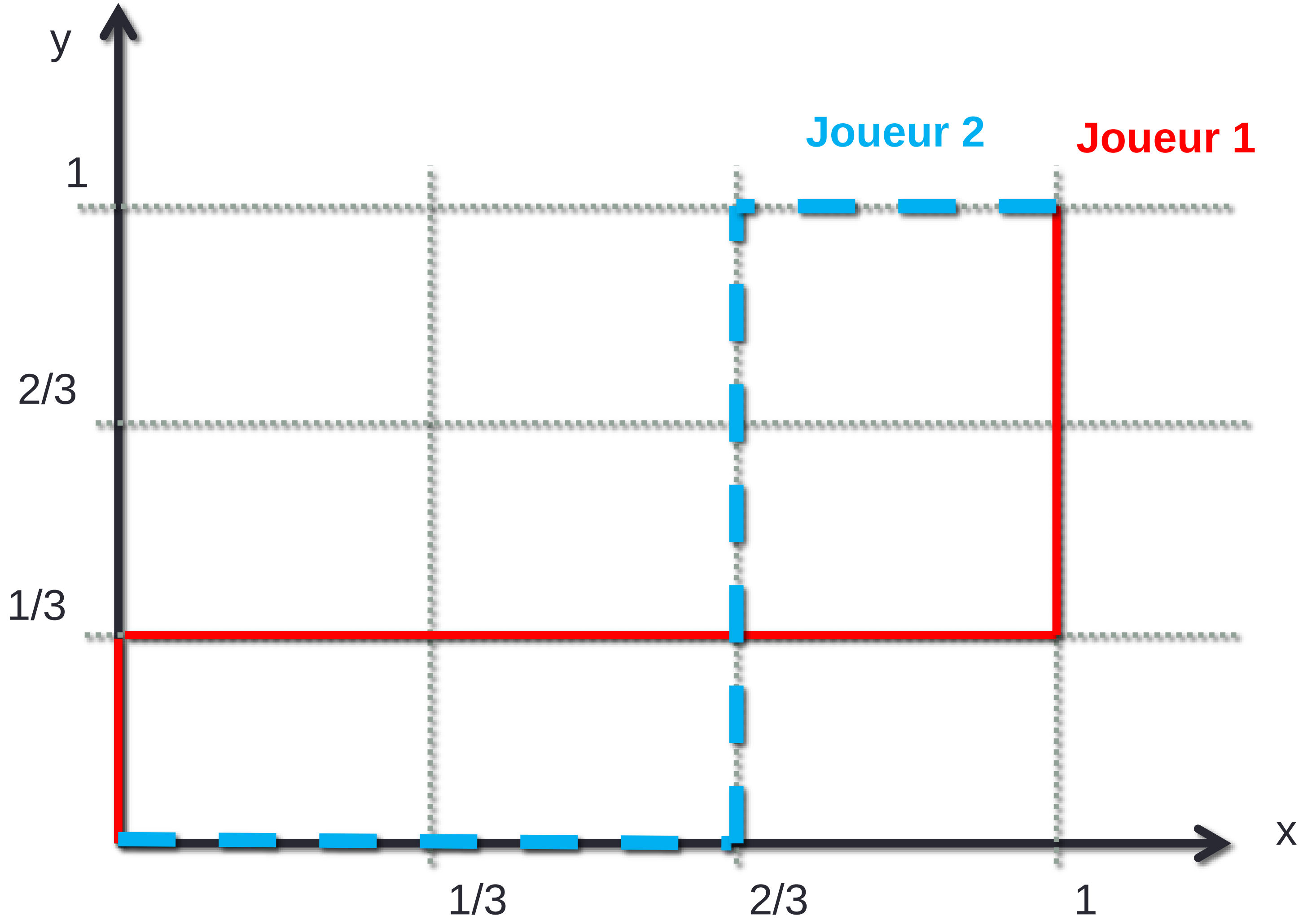
Équilibre de Nash en stratégie mixte: représentation graphique



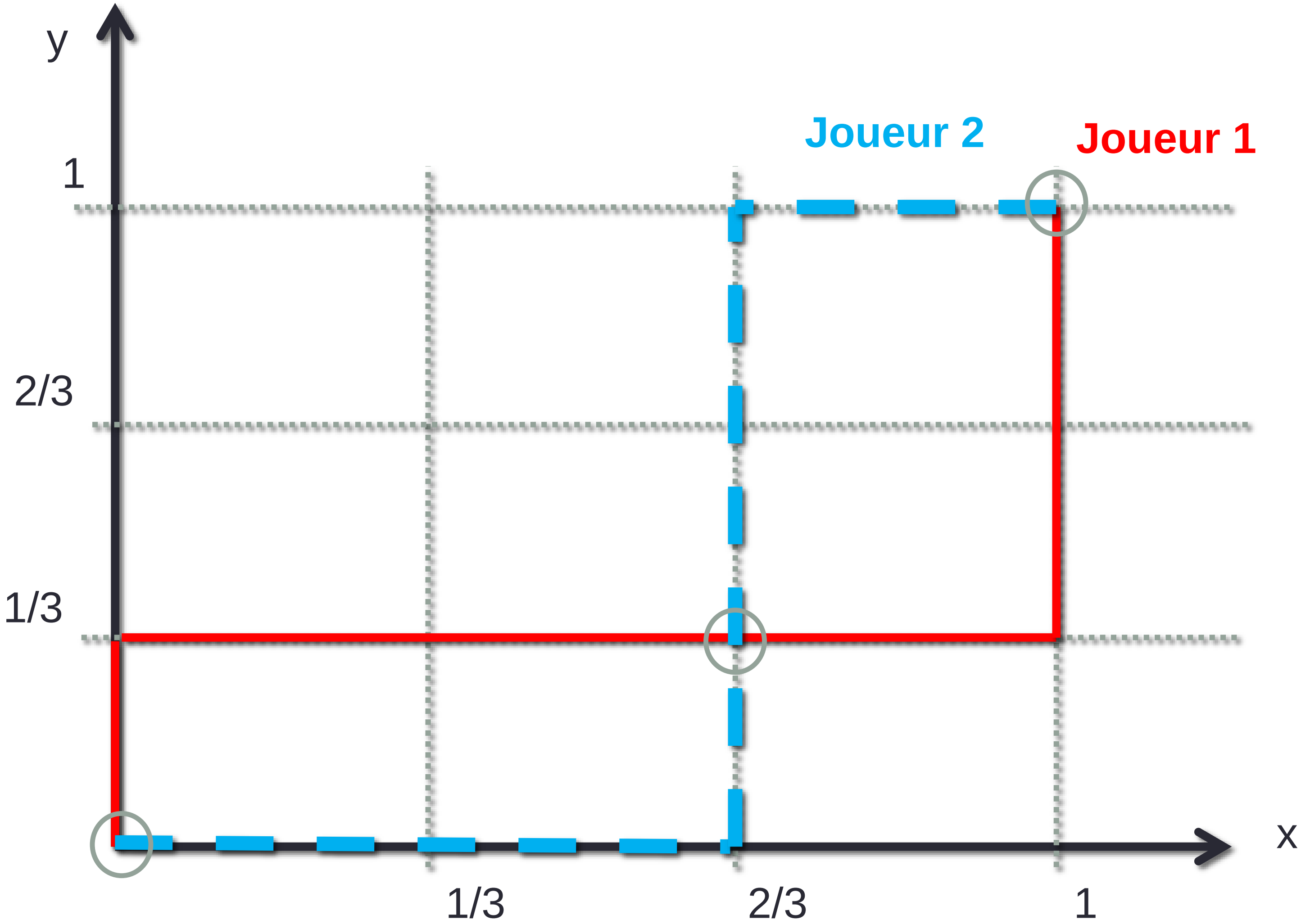
Équilibre de Nash en stratégie mixte: représentation graphique



Équilibre de Nash en stratégie mixte: représentation graphique



Équilibre de Nash en stratégie mixte: représentation graphique



Équilibre de main tremblante

- Principe: pour obtenir une notion plus robuste, on souhaite que l'équilibre soit stable même si chaque joueur a une faible probabilité de se tromper de stratégie.

- Méthode: on ne considère que des stratégies totalement mixtes (la probabilité de jouer chaque stratégie pure est strictement positive)

- (y,v) et (x,u) sont des équilibres de Nash
- Mais seul (x,u) est un équilibre en main tremblante

	u	v
x	1,1	2,0
y	0,2	2,2

- Car si J1 joue la stratégie mixte (ε; 1-ε) au lieu de (0;1), J2 a intérêt à dévier
  - U2(u)=2- ε
  - U2(v)= 2- 2ε

Équilibre corrélé

	f	c
f	2,1	0,0
c	0,0	1,2

- Lorsque tous les joueurs peuvent observer un même événement aléatoire, ils peuvent alors s'accorder sur des *équilibres corrélés*

- Une stratégie corrélée est une distribution de probabilités sur les profils possibles.
- Aucun joueur n'a intérêt à dévier de la stratégie qui lui est « assignée » par l'évènement

- Ex: 2 stratégies (f,f) et (c,c) avec proba ½ (pile ou face)
  - Personne n'a intérêt à dévier

$$\mu_1 = \mu_2 = 1/2 * 2 + 1/2 * 1 = 3/2$$

Équilibre corrélé

	O	R
O	0, 0	7, 2
R	2, 7	6, 6

- Poule Mouillée
- 2 EN en stratégie pure (O,R) et (R,O)
- 1 EN en stratégie mixte
  - (<(O:1/3),(R:2/3)> ; <(O:1/3),(R:2/3)>)

- Un équilibre corrélé possible: chacune des stratégie (O,R); (R,O); (R,R) avec probabilité 1/3
  - Chaque joueur ne connait que la stratégie qui lui est « attribuée »
  - Si un joueur reçoit O, il n’a pas intérêt à dévier
  - Si un joueur reçoit R, l’autre à O avec probabilité ½
    - S’il dévie U=1/2*7+1/2*0=3,5
    - S’il ne dévie pas U=1/2*2+1/2*6=4
  - Les joueurs n’ont jamais intérêt à dévier, c’est bien un équilibre corrélé

Équilibre coopératif

- Dans les jeux coopératifs on autorise la communication et les accords entre joueurs avant la partie.
  - Tous les messages formulés par un joueur sont transmis sans modification à l'autre joueur.
  - Tous les accords entre joueurs seront respectés.
  - L'évaluation des situations par un joueur n'est pas perturbée par les négociations préliminaires.

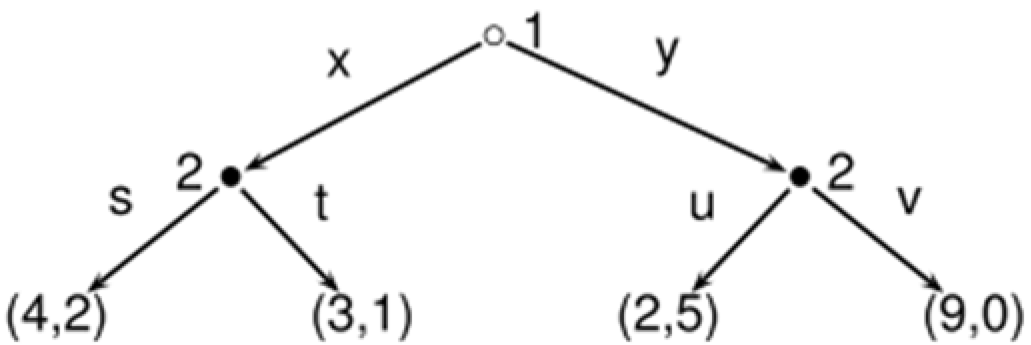
- Hypothèse de base des jeux coopératifs: les agents ne mentent pas.
- Permet d’obtenir un optimum de Pareto.

Théorie des jeux

- Présentation
  - SMA et Théorie des jeux
- Jeux en Forme normale
  - Définitions
  - Équilibres en stratégie pure
  - Équilibres en stratégie mixte
- Jeux en forme extensive
  - Définitions
  - Information parfaite
  - Information imparfaite
- Jeux répétés
  - Définitions
  - Tournois
  - TDJ évolutionnaire
- Rationalité limitée
  - Extensions de la fonction d'utilité
  - Rationalité procédurale
  - Rationalité de règle

Jeux sous forme extensive

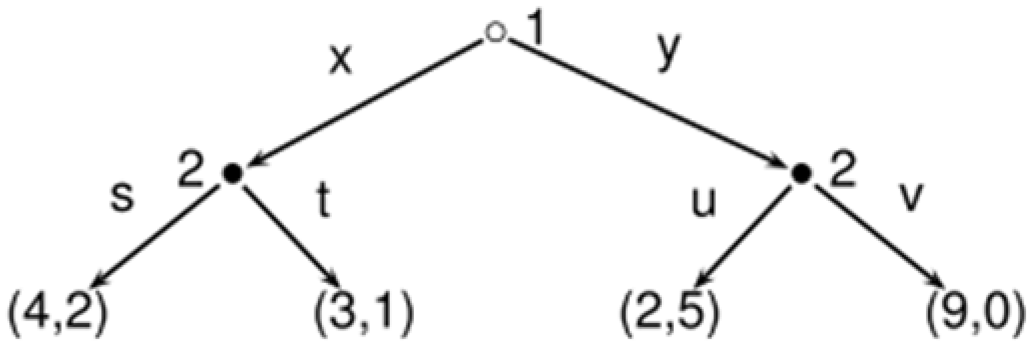
- Exemple



Jeux sous forme extensive

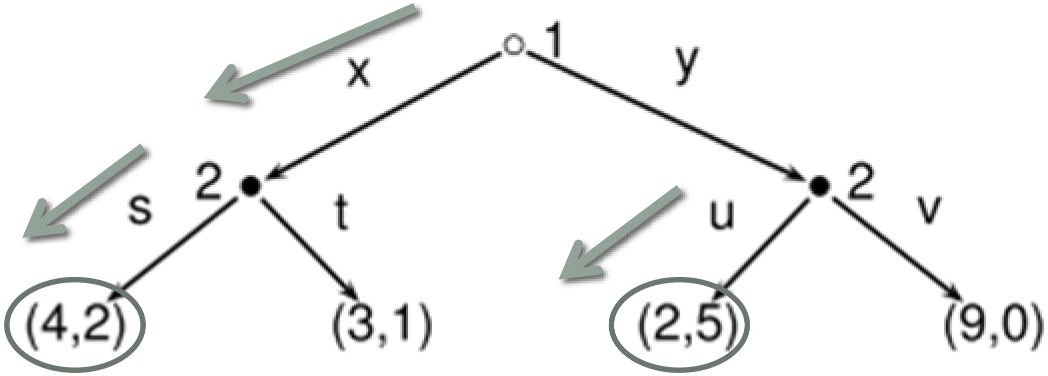
- Un jeu sous forme extensive est défini par :
  - un ensemble N de joueurs
  - un arbre composé de :
    - un ensemble de nœuds représentant les coups
    - un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup
    - une fonction de nommage qui indique à chaque nœud quel est le joueur qui doit jouer
    - une fonction de valuation qui associe à chaque nœud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs
  - une partition des nœuds en un ensemble d'**ensembles d'informations** représentant les croyances (imparfaites) des joueurs

Jeux sous forme extensive: équilibre



- Récurrence à rebours (**backward induction**)
  - On commence par chercher les choix optimaux à la dernière période (nœuds terminaux).
  - On remonte l'arbre de nœud en nœud, en cherchant à chaque nœud le choix optimal, une fois qu'on a pris en compte les choix optimaux pour chaque nœud fils.

Jeux sous forme extensive: équilibre

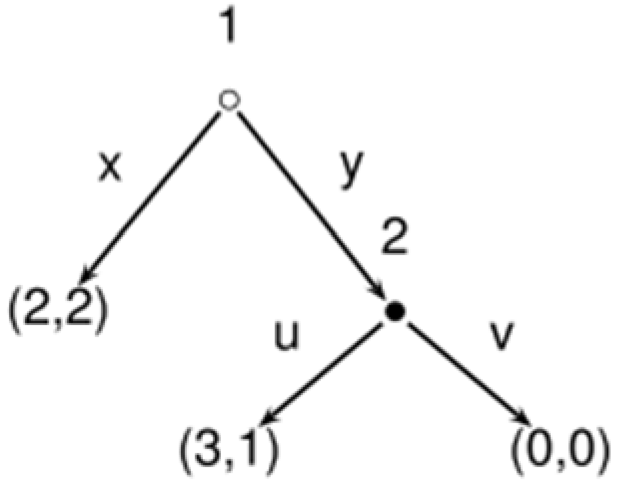


- Récurrence à rebours (**backward induction**)
  - On commence par chercher les choix optimaux à la dernière période (nœuds terminaux).
  - On remonte l'arbre de nœud en nœud, en cherchant à chaque nœud le choix optimal, une fois qu'on a pris en compte les choix optimaux pour chaque nœud fils.

Jeux sous forme extensive: propriété

- Tout jeu (fini) sous forme extensive à information parfaite a un équilibre de Nash en stratégies pures (équilibre obtenable par récurrence à rebours).

- A chaque jeu sous forme extensive correspond un jeu sous forme stratégique dans lequel les joueurs choisissent simultanément les stratégies qu'ils mettront en oeuvre.
- En revanche, un jeu sous forme stratégique peut correspondre à plusieurs jeux sous forme extensive différents.



Joueur 2

Joueur 1

	u	v
x	2,2	2,2
y	3,1	0,0

Jeux sous forme extensive/stratégies

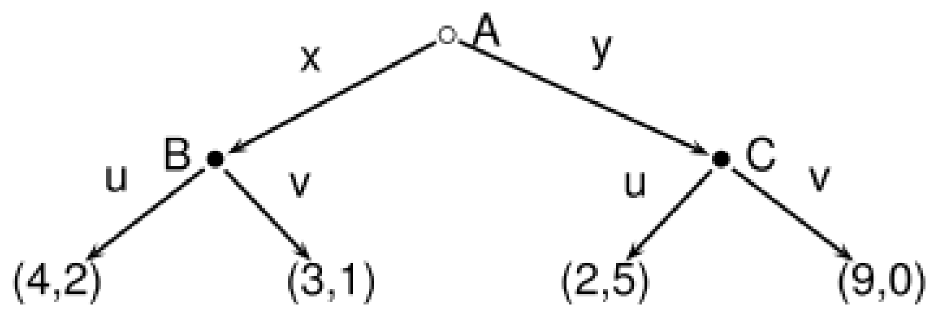
Forme stratégique :

Joueur 2

Joueur 1

	s1	s2	s3	s4
x	4,2	4,2	3,1	3,1
y	2,5	9,0	2,5	9,0

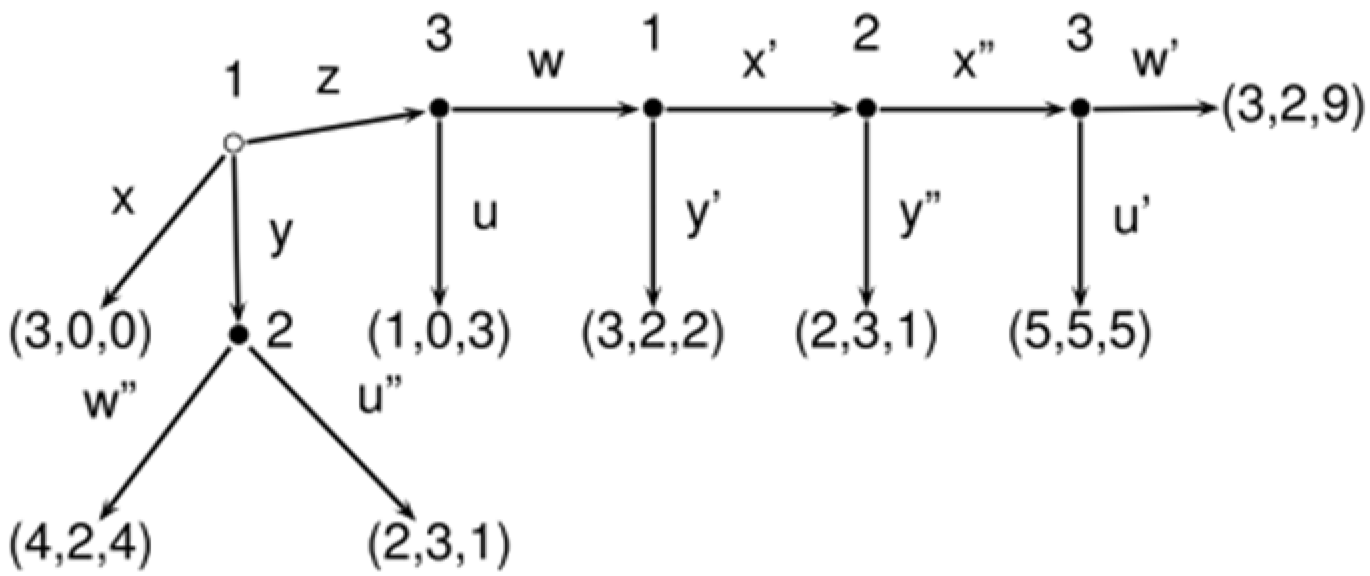
Forme extensive :



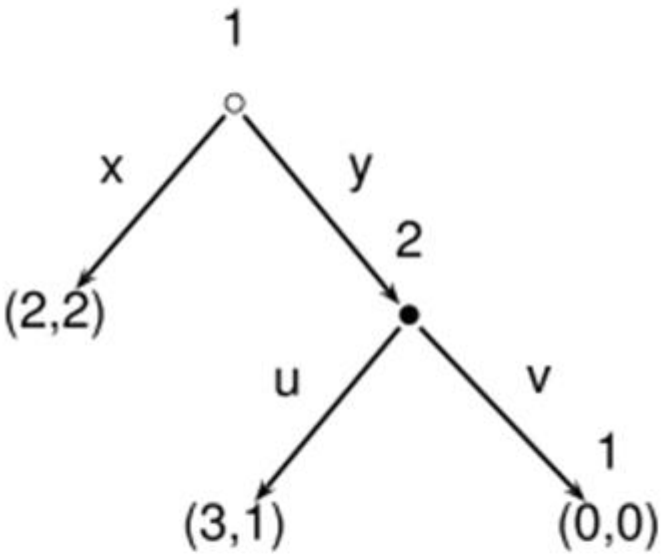
s1: u si x, u si y s2: u si x, v si y

s3: v si x, u si y s4: v si x, v si y

Jeux sous forme extensive: exemple

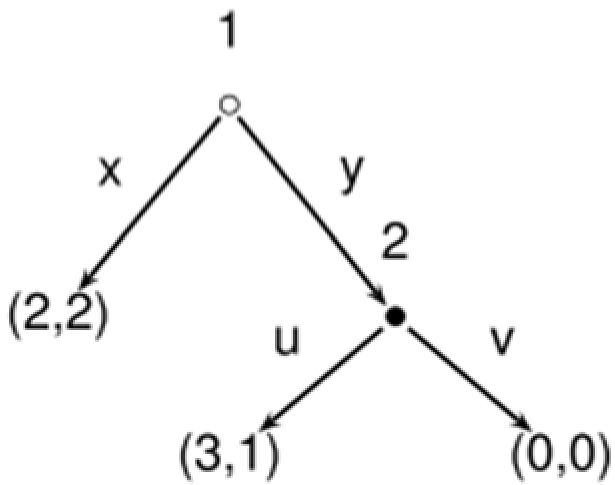


Sous-jeu



- Un *sous-jeu* d'un jeu sous forme extensive est un jeu composé d'un nœud (qui est un ensemble d'information singleton), de tous les noeuds successeurs de ce noeud, de tous les arcs reliant ces noeuds, et des utilités associées à tous les noeuds terminaux successeurs.

Menace non crédible



Joueur 2

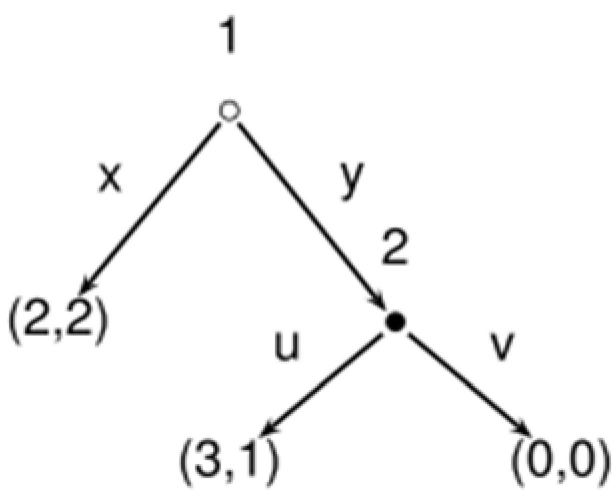
Joueur 1		u	v
	x	2,2	2,2
	y	3,1	0,0

- l'équilibre de Nash (x,v) n'est pas crédible car il repose sur la menace non-crédible du joueur 2 de jouer v.

Équilibre Parfait en sous-jeux de Selten

- Un équilibre de Nash d'un jeu sous forme extensive est un **équilibre parfait en sous-jeux** si toute restriction du profil de stratégies à un sous-jeu est un équilibre de Nash pour ce sous-jeu.

- Pour les jeux à informations parfaites, la notion d'équilibre parfait en sous-jeux coïncide avec la notion de récurrence à rebours.

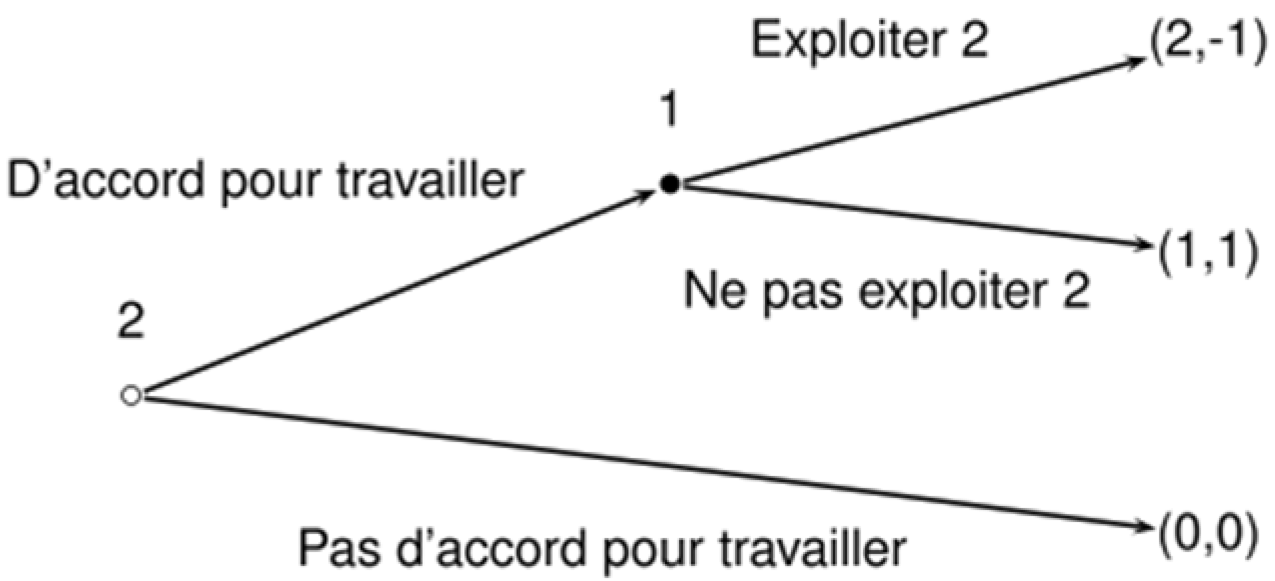


Joueur 2

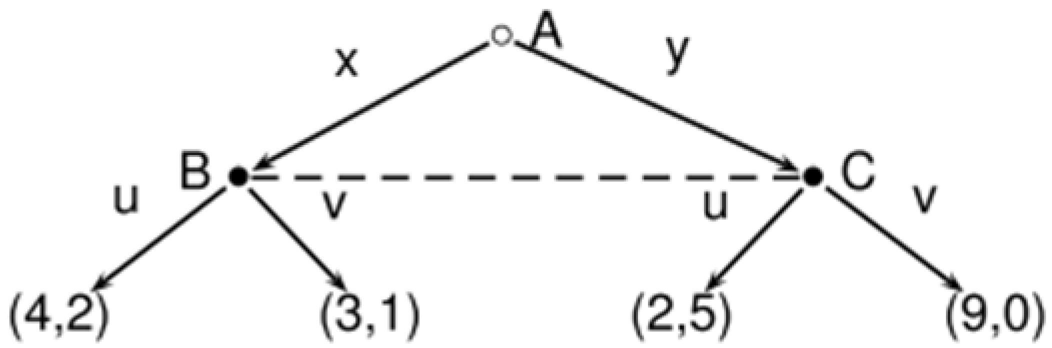
Joueur 1

	s1	s2	s3	s4
x	4,2	4,2	3,1	3,1
y	2,5	9,0	2,5	9,0

Équilibre Parfait en sous-jeux de Selten



Information imparfaite

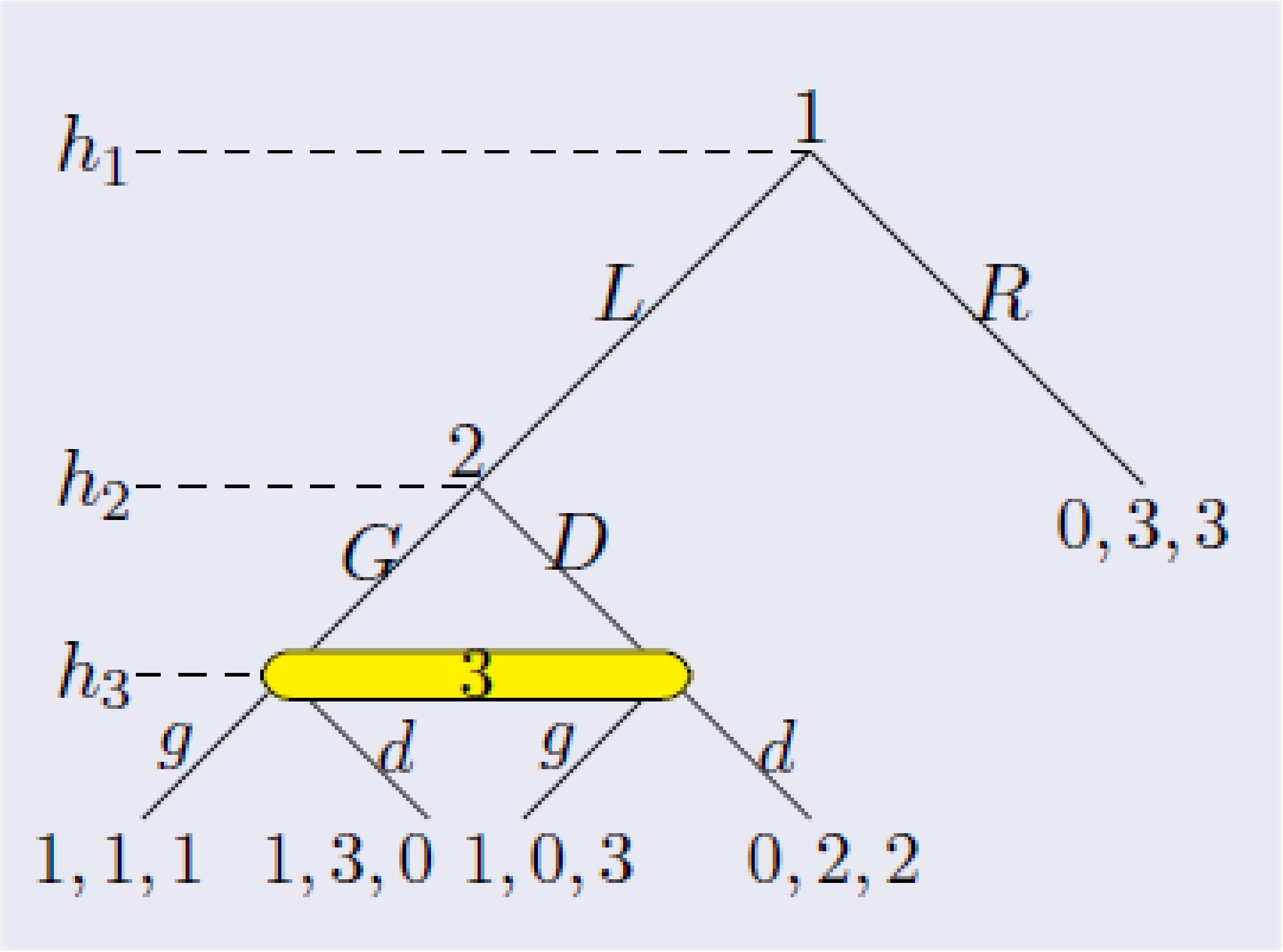


	u	v
x	4,2	3,1
y	2,5	9,0

- Ensembles d'information : {A} et {B;C}
- Coups simultanés

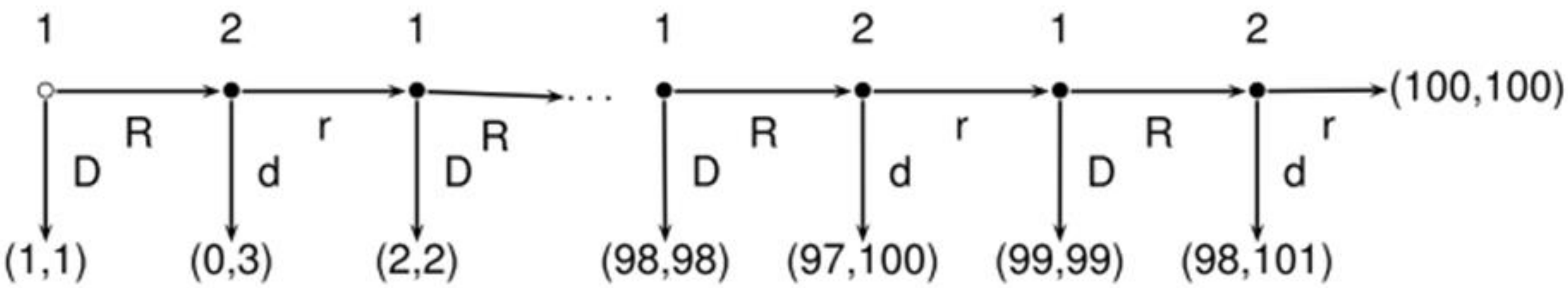
- Tout jeu sous forme normale peut être représenté sous forme extensive à information incomplète

Exemple



Limites de la récurrence à rebours

- Jeu du mille-pattes



Application: Security Game

- [Pita et al. AAMAS 2008, 2011]
- Premier joueur: la sécurité qui décide ou mettre les gardes/moyens de défense
- Deuxième joueur: les terroristes qui décident où et comment attaquer
- Équilibre de Stackelberg: un joueur leader (police), un joueur follower (terroriste) qui agit en connaissant la stratégie du leader
- Calcul de placement optimal dans les aéroports (2011)

Locations	8/15	8/16	8/17	8/18	8/19	8/20	8/21
A1	1	3	1	1	3	0	0
A2	0	2	1	0	0	0	0
A3	2	2	0	1	0	3	1
A4	1	0	3	2	0	1	2
...	...	...	...	...	...	...	...
Total	10	10	10	10	10	10	10

Figure 1: Summary of sample schedule

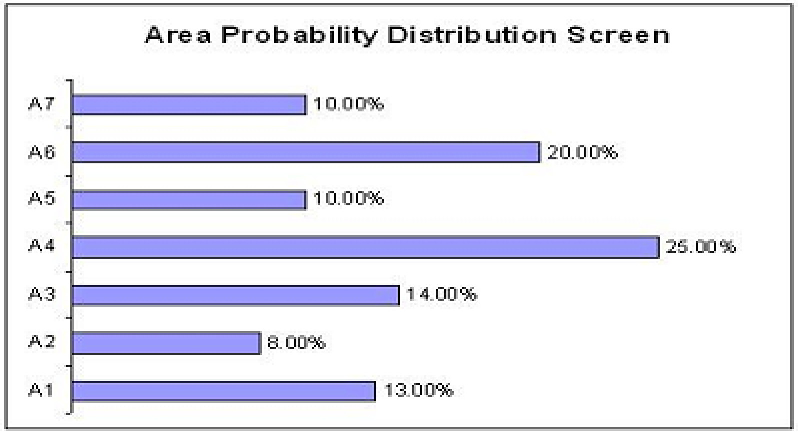


Figure 2: Summary of probability distribution over areas

Théorie des jeux

- Présentation
  - SMA et Théorie des jeux
- Jeux en Forme normale
  - Définitions
  - Équilibres en stratégie pure
  - Équilibres en stratégie mixte
- Jeux en forme extensive
  - Définitions
  - Information parfaite
  - Information imparfaite
- Jeux répétés
  - Définitions
  - Tournois
  - TDJ évolutionnaire
- Rationalité limitée
  - Extensions de la fonction d'utilité
  - Rationalité procédurale
  - Rationalité de règle

Jeux répétés

	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

- Les mêmes joueurs jouent ensemble plusieurs fois au même jeu.

- Exemple:
  - Vous n'avez pas vraiment les mêmes goûts que votre voisin en matière de musique. Il lui arrive souvent d'écouter sa musique à fond. De même il vous arrive (en représailles) de mettre votre musique à un volume plus que raisonnable. Ce qui a pour conséquences que le lendemain il recommence à nouveau. En dehors de ces périodes agitées, vous appréciez les périodes où aucun de vous ne gêne l'autre.
  - Supposons que l'on pondère votre satisfaction :
    - Vous avez une satisfaction de 5 à écouter votre musique à un volume important.
    - La satisfaction est de 0 lorsque votre voisin met sa musique à fond.
    - Une soirée .calme., sans musique vous apporte une satisfaction de 3.
    - Le fait d'écouter .simultanément. votre musique mêlée à celle du voisin, donne une satisfaction de 1.

  - Vous savez ce que votre voisin a eu comme comportement les jours précédents, que faites-vous aujourd'hui?

Jeu répété

- Les joueurs se rencontrent plusieurs fois
- À chaque itération les joueurs ont connaissance des coups précédents
- Ils ne connaissent pas le terme du jeu
- Le gain d'un joueur est le cumul de ses gains dans chaque rencontre

Tournoi de dilemme itéré du prisonnier (DIP)

- Introduction par FLOOD et DRESHER à la RAND Corp. en 1952
  - Jeu à somme non-nulle
  - 2 joueurs jouent simultanément
  - 2 choix de jeux :
    - Cooperate, *i.e.* être gentil, on notera C
    - Defect, *i.e.* être méchant, on notera D
  - Les gains des joueurs, notés S, P, R et T, sont fonction de leur choix de jeu avec :
  - $S < P < R < T$

DIP

- Scores: S + T < 2R

	C	D
C	R=3 Reward	S=0 Sucker
D	T=5 Temptation	P=1 Punishment

DIP: Applications concrètes

- Deux pays doivent-ils lever des taxes douanières sur les produits importés de l'autre pays.

- Deux entreprises concurrentes doivent-elles essayer de s'entendre pour se partagé un marché ou se faire concurrence ?

- Deux espèces vivant sur un même territoire doivent-elles cohabiter ou se disputer la nourriture disponible ?

DIP: Stratégies

- Exemples
  - Mechante
  - Gentille
  - Donnant-donnant
  - Rancunière
  - …

DIP: rencontres

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
score de gentille	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0
jeu de gentille	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C		
jeu de méchante	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D		
score de méchante	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	=	50

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
score de per_CCD	3	3	5	0	0	1	0	0	1	0	=	13
jeu de per_CCD	C	C	D	C	C	D	C	C	D	C		
jeu de rancunière	C	C	C	D	D	D	D	D	D	D		
score de rancunière	3	3	0	5	5	1	5	5	1	5	=	33

DIP: meilleure stratégie?

- qui batte toutes les autres :
  - ***méchante***, car généralisation du dilemme non itéré

- qui fasse le meilleur score possible face à toutes les autres :
  - **aucune**, car meilleure contre *méchante* et contre *rancunière* est impossible

- <u>Problème de définition du critère d'évaluation des stratégies</u>

DIP: tournois

- Plusieurs stratégies se rencontrent 2 à 2, comme pour un tournoi sportif
- Le gain d'une stratégie est le cumul de ses scores face à chaque adversaire
- Toutes les parties ont la même longueur (même nombre d'itérations), mais les stratégies ne la connaissent pas et ne peuvent pas le savoir
- <u>Le résultat est de toute façon fortement dépendant des autres stratégies présentes</u>

DIP: exemple de résultat

- gentille
- méchante
- lunatique
- donnant_donnant
- rancunière
- per_DDC
- per_CCD
- majoritaire_gentille
- majoritaire_méchante
- méfiante
- sondeur
- donnant_donnant_dur

Scores :

donnant_donnant	:	42
majoritaire_gentille	:	19
rancunière	:	4
sondeur	:	1
lunatique	:	0
méchante	:	0

DIP: donnant-donnant, une bonne stratégie

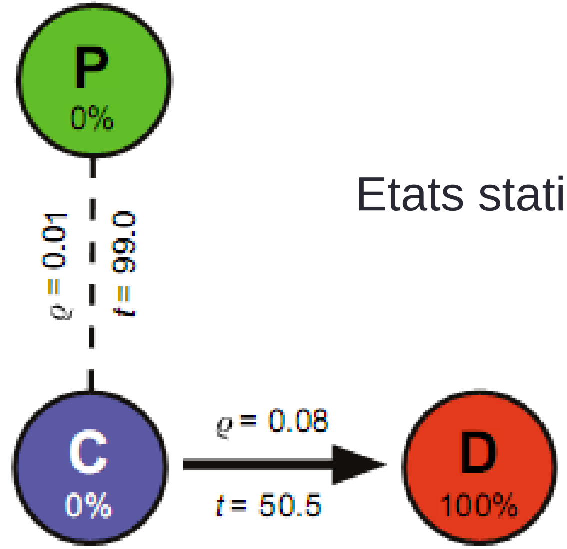
- Au premier coup je coopère (C), ensuite si mon adversaire a coopéré (C) au coup précédent, je coopère (C), s'il a trahi (D), je trahis (D).
  - donnant-donnant ne gagne jamais contre personne !
  - Au mieux elle fait le même score.

Théorie des jeux évolutionnaire

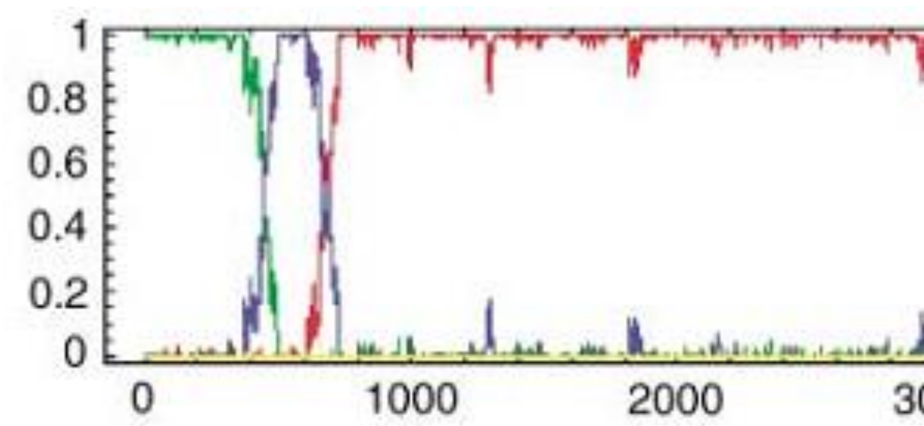
- La population des joueurs évoluent en fonction de leurs résultats
- DIP avec évolution de la population [Axelrod, …]

- [Hauert et al. 07] Science: punish or perish
  - M agents
  - Possibilité de participer à un projet commun de rentabilité r
    - En coopérant (c), avec une contribution c: x agents
    - Sans coopérer (d): y agents
    - Les contributions sont réparties entre les participants
    - Gain: r*(x * c) / (x+y)
  - Les agents sont remplacés progressivement
    - Nouvelle stratégie fonction du gain moyen de la stratégie

  - Deffect domine rapidement

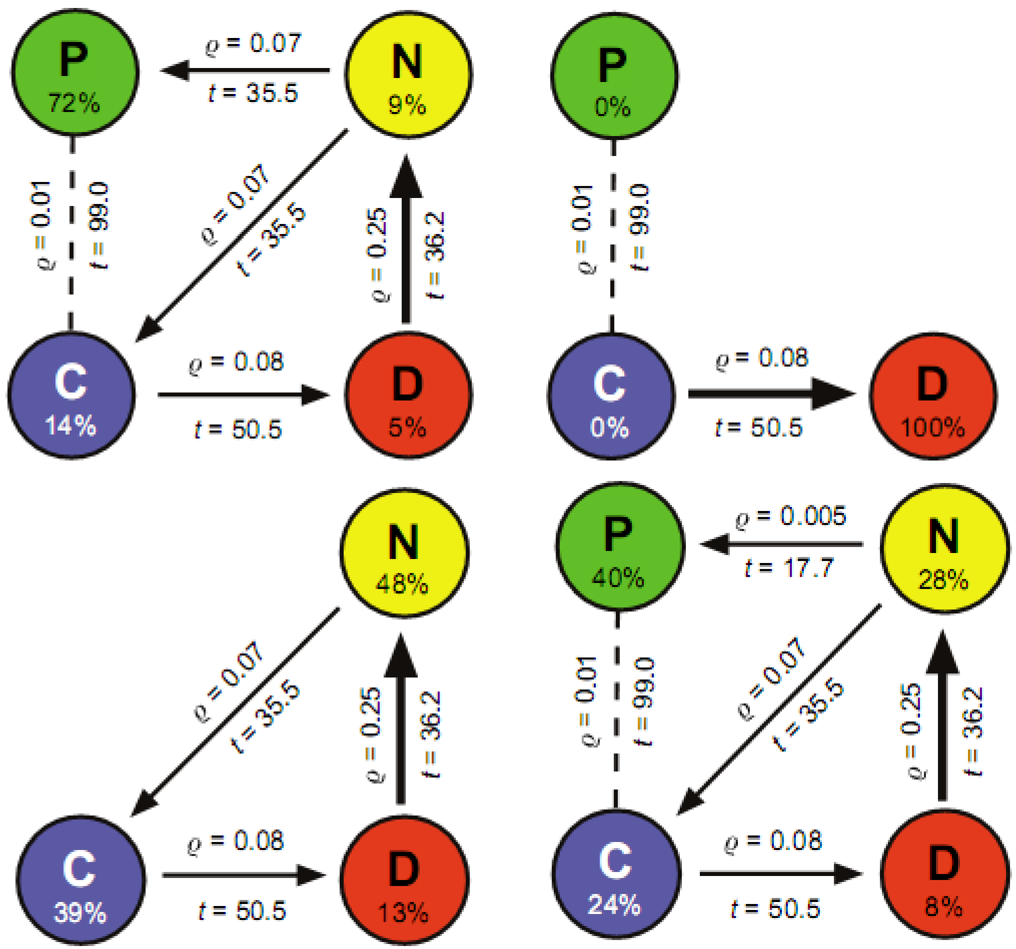


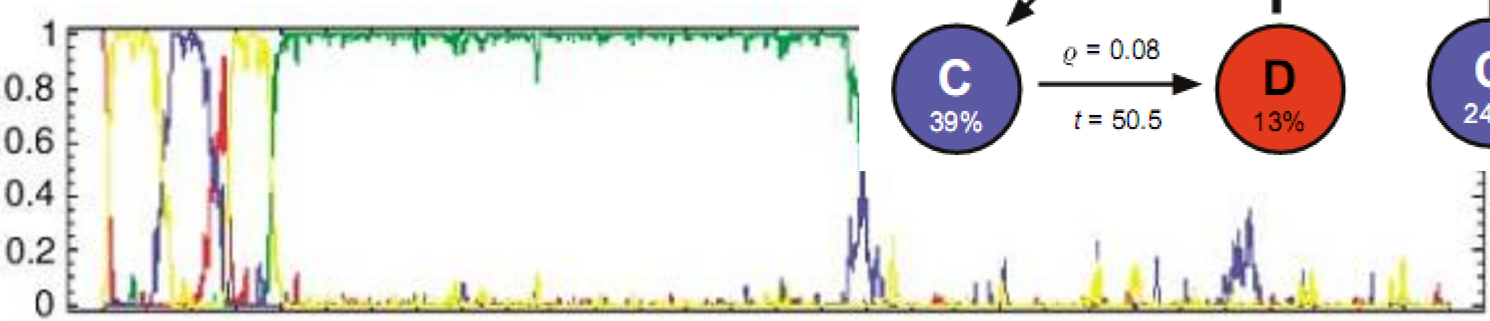
Etats stationnaire



Théorie des jeux évolutionnaire

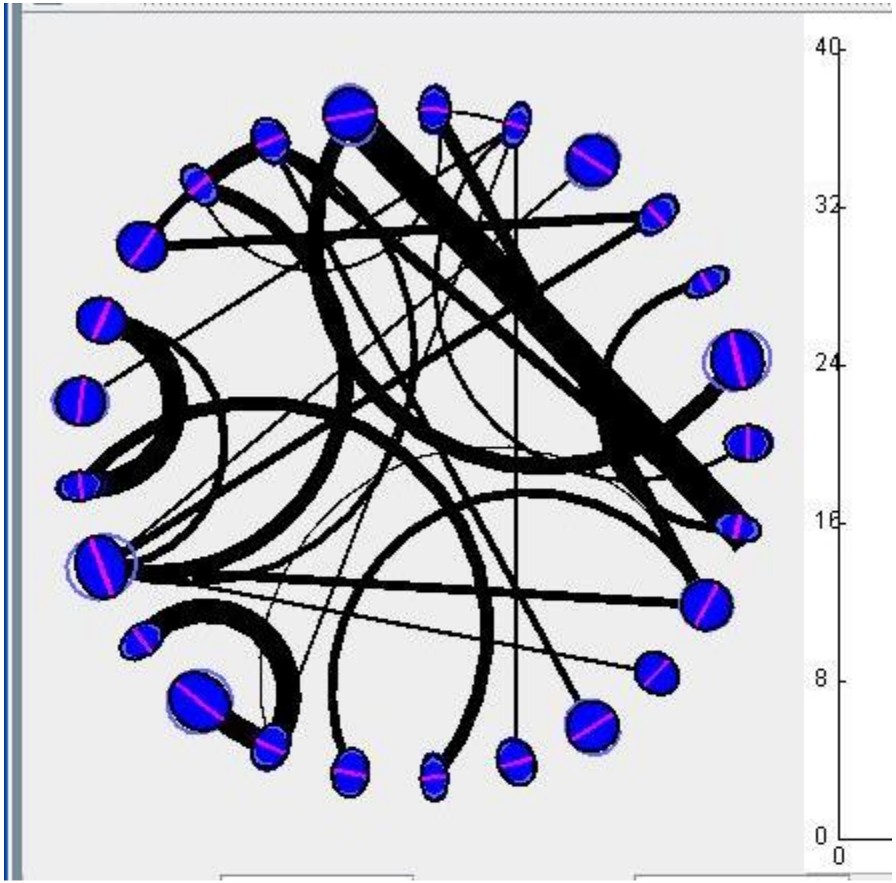
- Introduction du Punishment:
  - Les agents qui coopèrent peuvent choisir de payer pour punir les non coopératif
  - Passager clandestin de 2e niveau: je laisse les autre payer
  - Deffect finit toujours par dominer
- Les agents peuvent choisir de ne pas participer
  - Alternance de stratégie dominante (C/D/N)
- Combinaison des deux:
  - La stratégie P devient dominante





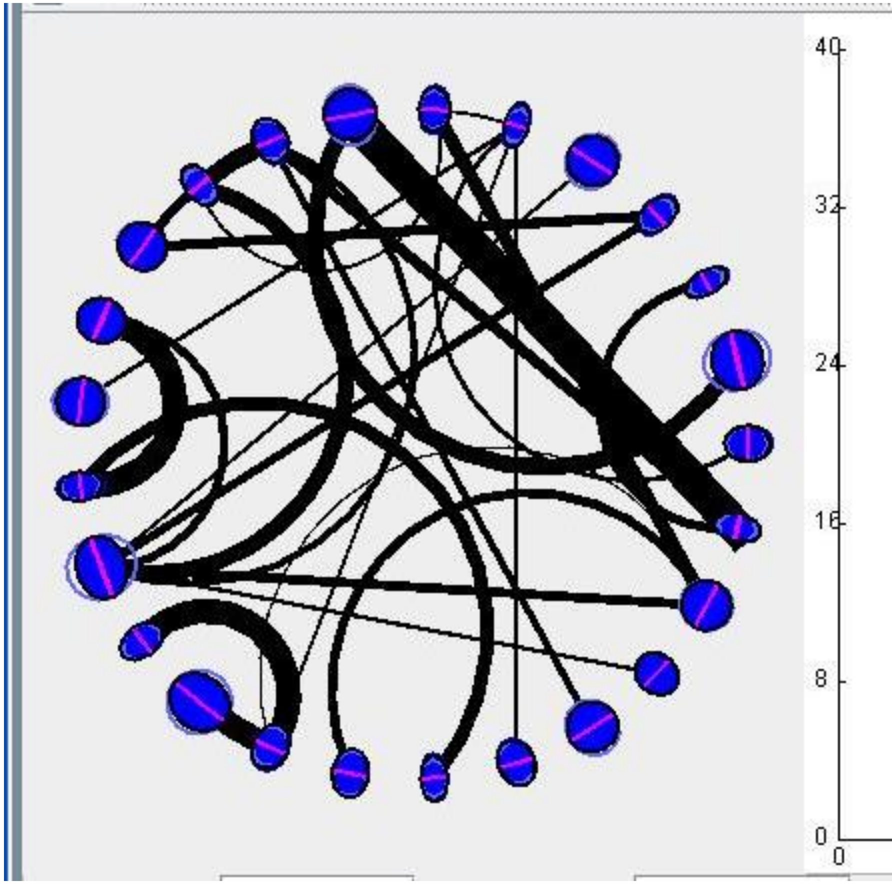
Jeux répétés: de nombreuses études à l'aide d'agents

- Exemple: étude de la synergie entre stratégie dans un réseau d'interaction [Caillou et al., 07,08]



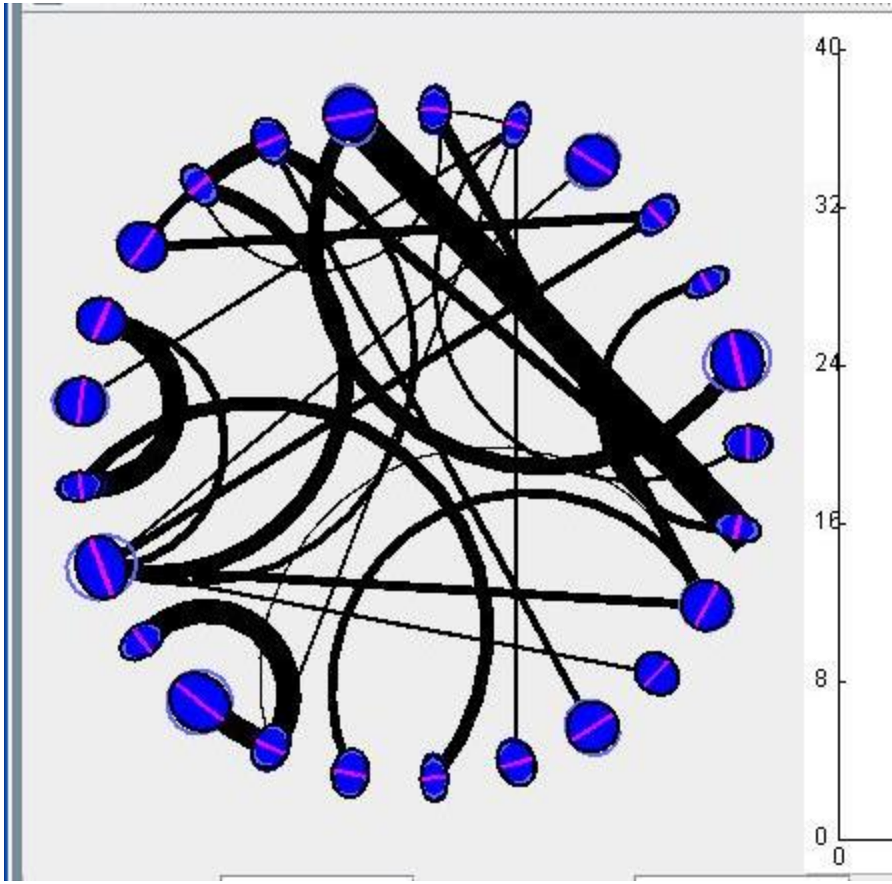
- Objectif:
  - Etudier la supériorité/synergie des stratégies dans un graphe dynamique

- Principe:
  - Chaque agent prête et emprunte de l'argent.
  - Chacun maximise sa fonction d'utilité intertemporelle
  - Les liens ont un cout, qui doit être réparti entre les deux contractants



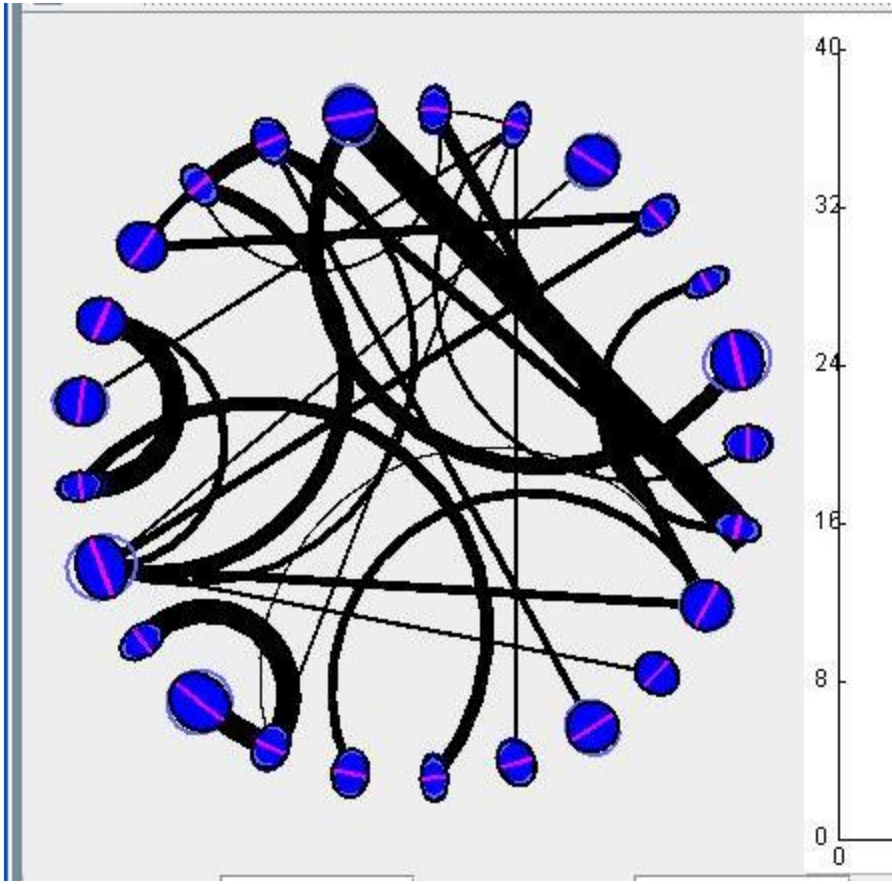
Dynamique

- A chaque étape
  - Salaire et remboursement
  - Negotiation
  - Consommation
  - Creation/Suppression de lien



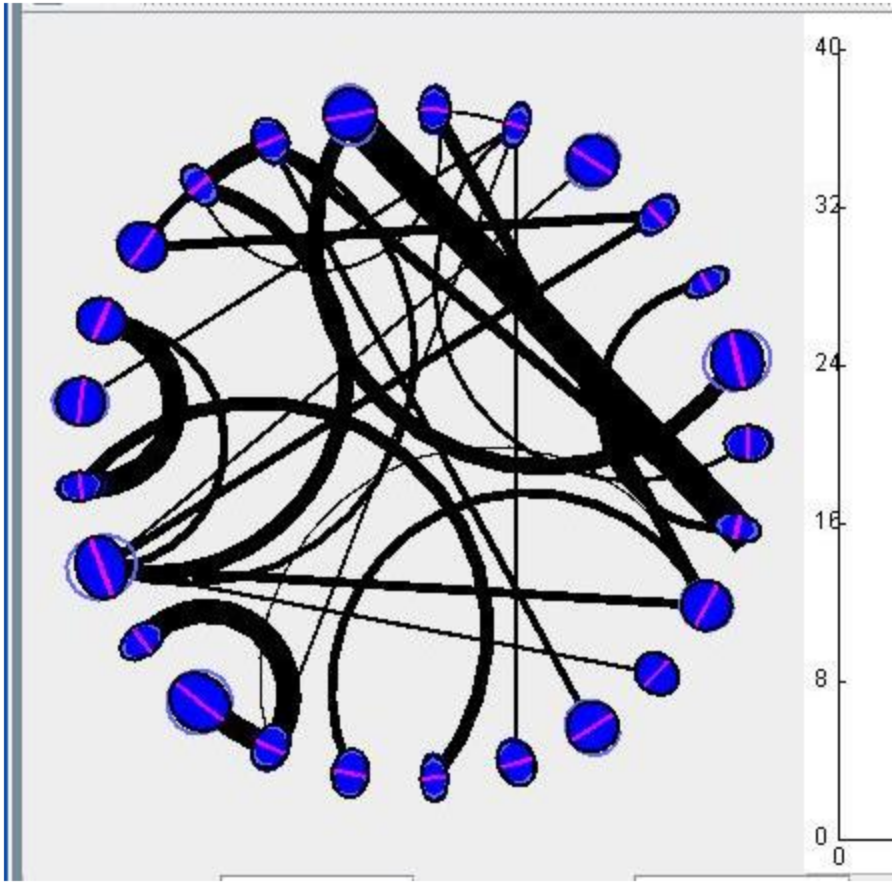
Évolution du réseau

- Les liens ont un cout c
  - Chaque agent décide indépendamment
  - Si un agent accepte de payer, il paie c
  - Si les deux acceptent, ils paient c/2
  - Si aucun n'accepte, le lien est détruit

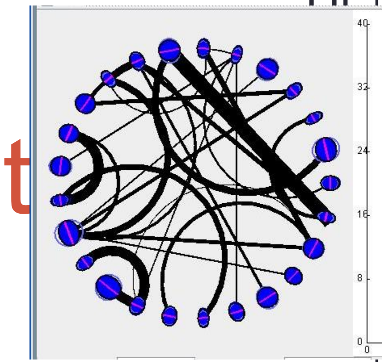


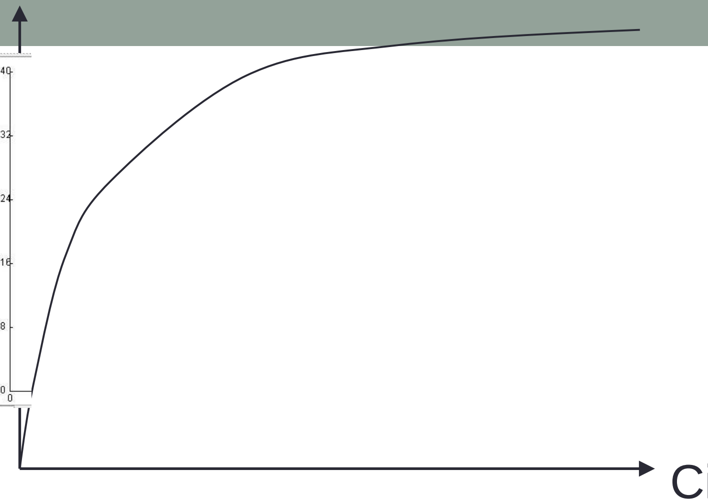
- Des liens sont créés avec une probabilité fixe
- Si un agent n'a aucun lien, un lien est créé

- Stratégies
  - Optimizer
    - L'agent accepte de payer si le lien est profitable
  - Investor
    - L'agent accepte toujours de payer
  - Free Rider
    - N'accepte jamais de payer



Modèle d’agent





Mi: Espèrance de vie

bi (0<b<1) : Utilité marginale décroissante
L’utilité du premier bien est plus impotante

$$U_i = \sum_{t=0}^{M_i} p_i^t C_{i,t}^{b_i}$$

Pi: préférence pour le présent
0<Pi<1
Les agents préfèrent
consommer aujoud’hui

Ci: Consommation
Payée par son salaire et ses emprunts
moins les prets qu’il accorde

Modèle de négociation

- Modèle d’enchères
- Chaque agent essaie de deviner le meilleur prix pour ses voisins Pj
- Cycles de propositions
  - Chaque agent demande a tous ses Il voisins s’il veut un prêt au taux Pj.
  - Il met a jour Pj en fonction de la réponse et prete a celui qui acceptait le plus cher

Fitness

- Indépendante de Pi et Bi

$$F_i = \left(\frac{\sum_{t=0}^{M_i} p_i^t C_{i,t}^{b_i}}{\sum_{t=0}^{M_i} p_i^t R_i^{b_i}} \right)^{\frac{1}{b_i}} - 1 = \frac{U_i(observed)}{U_i(without\ transaction)} - 1$$

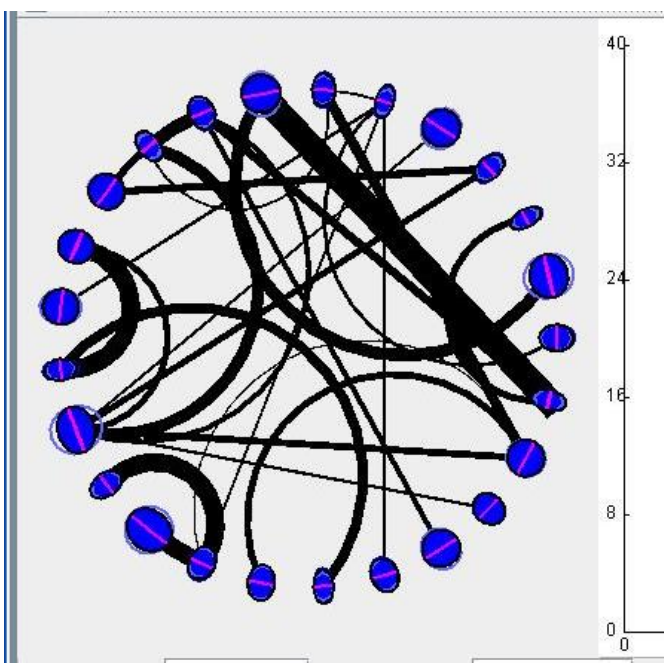
- Bien être global: moyenne des fitness individuelles

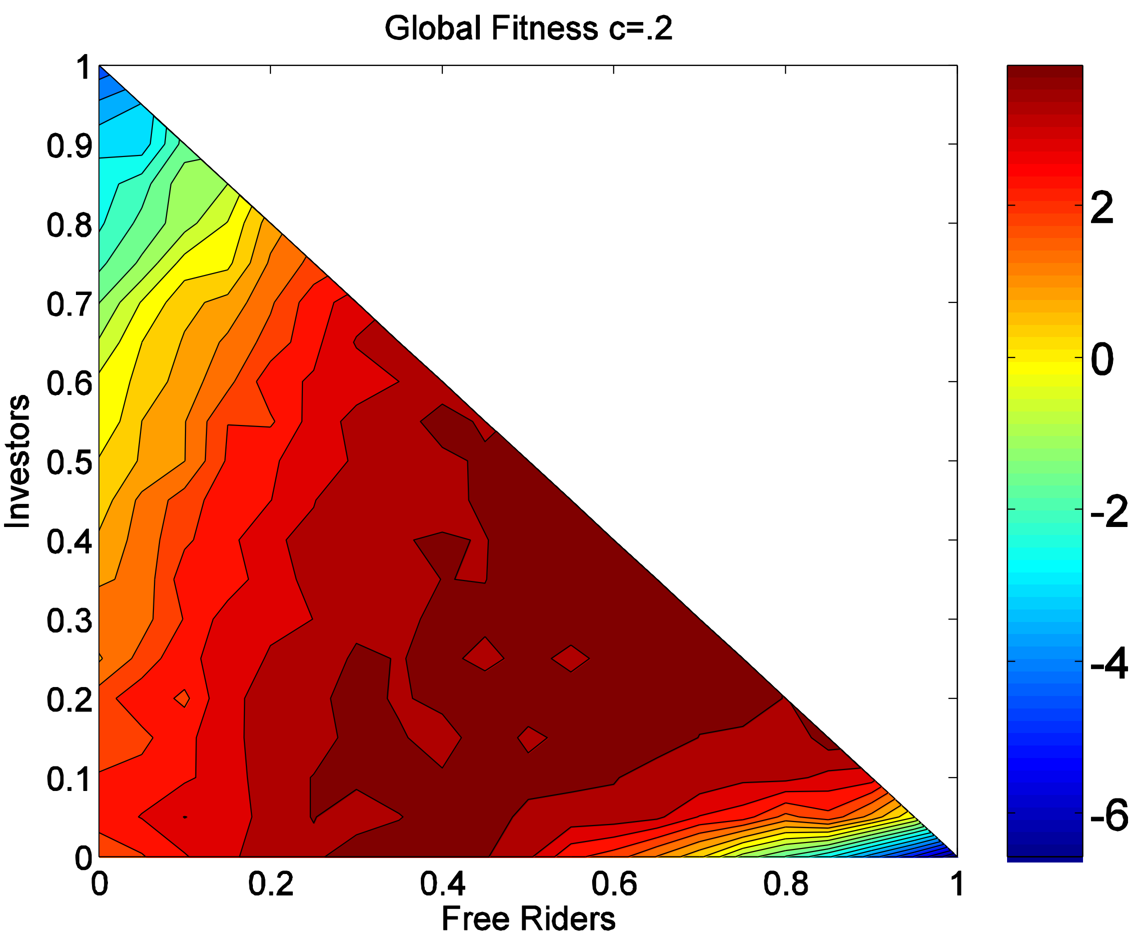
Expérimentations

- Moduleco [Phan 04]
- N=25 agents
- Variables aléatoires
  - Salaire Ri=20
  - Esperance de vie Mi=80
- Cout du lien c=0,2
- Resultats:
  - Fitness/Bien-être social après 1000 périodes sur 50 xps

Bien-être global

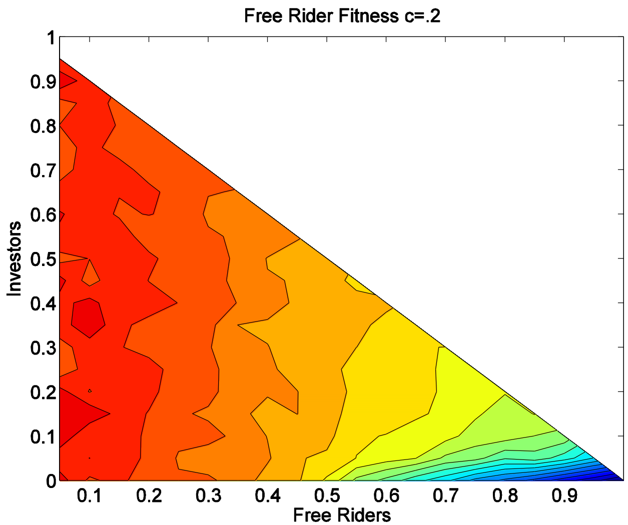
- X: Free Riders
- Y: Investors
- 1 niveau= +0,5 bien-être



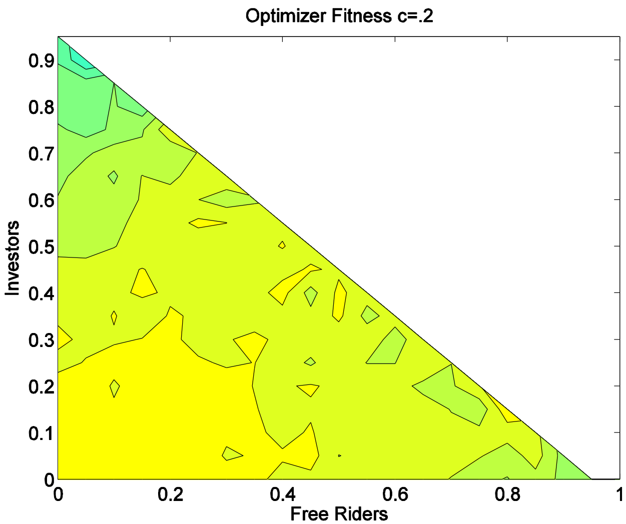


Bien-être par classe

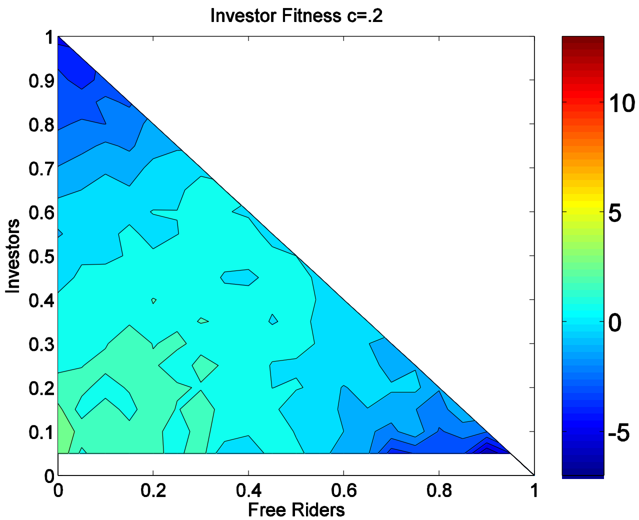
- Fitness moyenne de chaque classe
- 1 niveau = +1 Fitness



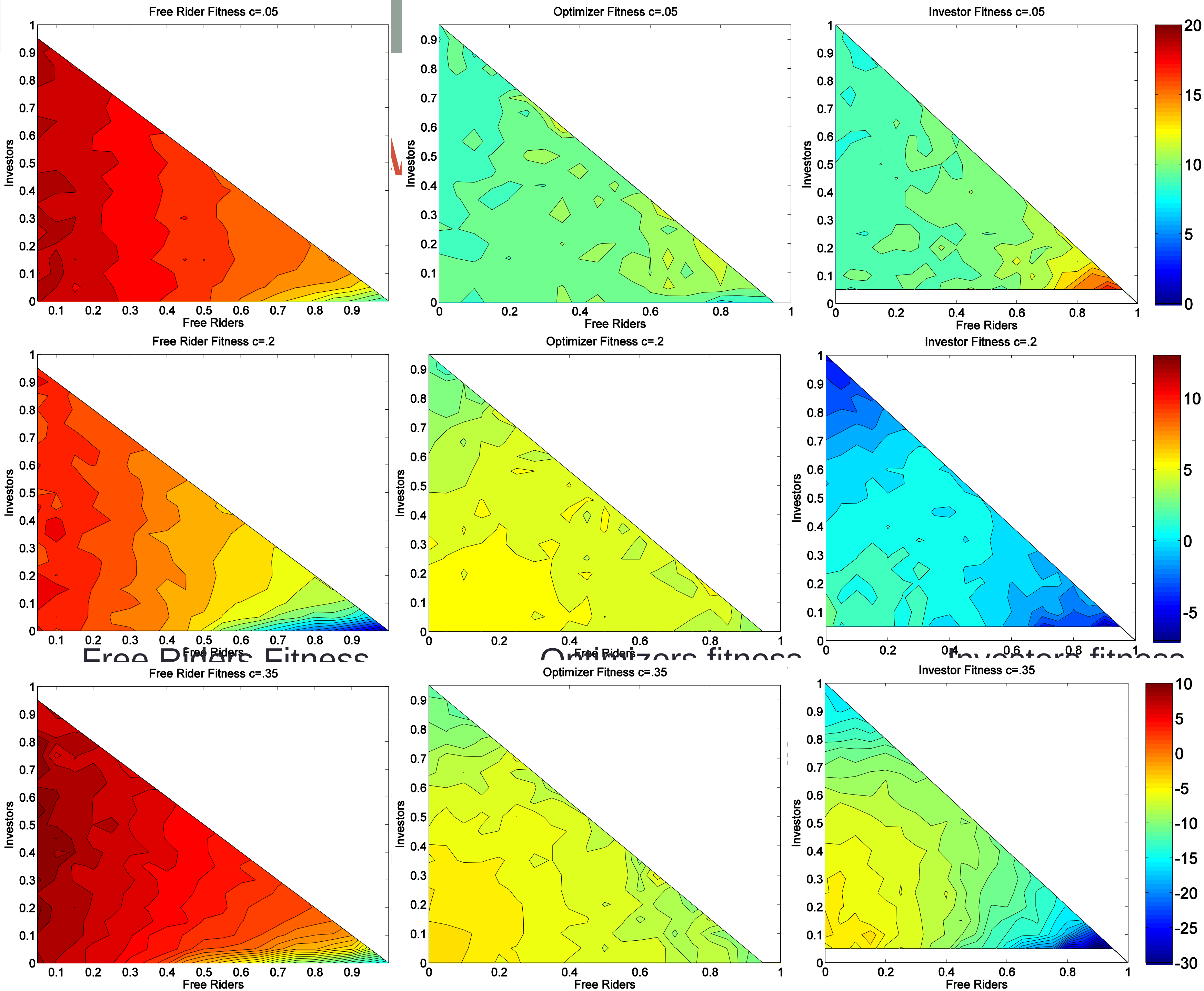
Free Riders Fitness



Optimizers fitness



Investors fitness



C=0,05

C=0,2

C=0,35

Théorie des jeux

- Présentation
  - SMA et Théorie des jeux
- Jeux en Forme normale
  - Définitions
  - Équilibres en stratégie pure
  - Équilibres en stratégie mixte
- Jeux en forme extensive
  - Définitions
  - Information parfaite
  - Information imparfaite
- Jeux répétés
  - Définitions
  - Tournois
  - TDJ évolutionnaire
- Rationalité limitée
  - Extensions de la fonction d’utilité
  - Rationalité procédurale
  - Rationalité de règle

Rationalité limitée

- Hypothèse forte: les agents maximisent leur utilité..

- Est-ce réaliste?
  - Et les émotions? L'empathie?
  - Comment fait-il pour la calculer?
  - Des exemples comme le jeu du mille-pattes montre que cela ne marche pas

Gary Becker et l’analyse économique du comportement humain

- Prix Nobel 1992

- La plupart (totalité?) des comportements humains peuvent se modéliser sous forme économique
  - Les émotions sont intégrées à la fonction d’utilité
  - Le mariage est une espérance d’utilité sur les années futures

- Application à l’économie du crime: les criminels font des calculs rationnels (comme pour le ticket de metro…)

Herbert Simon et la rationalité limitée

- Prix Nobel 1978
- Les agents ont deux types de rationalité:
  - La rationalité substantive: Un comportement est rationnel en substance lorsqu'il est approprié pour atteindre les objectifs sous contraintes de la situation courante.
  - La rationalité procédurale: Un comportement est rationnel en procédure lorsque la procédure qui l'a générée est appropriée. Cette rationalité dépend de la procédure de génération du choix.
- La rationalité procédurale correspond au processus de décision lui-même.

- Si la rationalité substantive est parfaite (hypothèse classique), la rationalité procédurale n'a pas d'importance
  - Par contre, si la rationalité substantive (capacité de calcul) est limitée, la façon de choisir (la rationalité procédurale) prend toute son importance

- Origine des premiers modèles de simulations d'entreprise
  - Modèle de la poubelle: le processus de décision correspond à la rencontre d'un ensemble de solutions avec l'environnement (personnes, problèmes)
  - On fait quelque chose parce qu'on peut le faire, on cherche pourquoi éventuellement

John Aumann et la rationalité de règle

- Prix Nobel 2005
- On n’optimise pas les résultats, mais les comportements
- Exemple: le jeu de l’ultimatum
  - A décide comment diviser 100 euros entre A et B
  - Puis B dit s’il accepte ou non
  - S’il refuse, personne n’a rien
  - Équilibre théorique: 99/1
  - Équilibre pratique: 50/50 (dépend des cultures!)
- Pourquoi?

Exemple: jeu de l’ultimatum

- Réponse d’Aumann
  - Les gens ont appris la règle « il ne faut pas accepter de mauvaises offres », aussi bien pour des raisons de menace que de réputation.
  - Même si ces règles ne sont pas valable dans ce cas (jeu réalisé une fois et de façon anonyme), l’agent l’applique car c’est la plus adaptée a la situation.
- L’experience fait apprendre des règles qui sont ensuite réappliquées.
- L’évolution peut avoir le même rôle chez les animaux (abeilles)

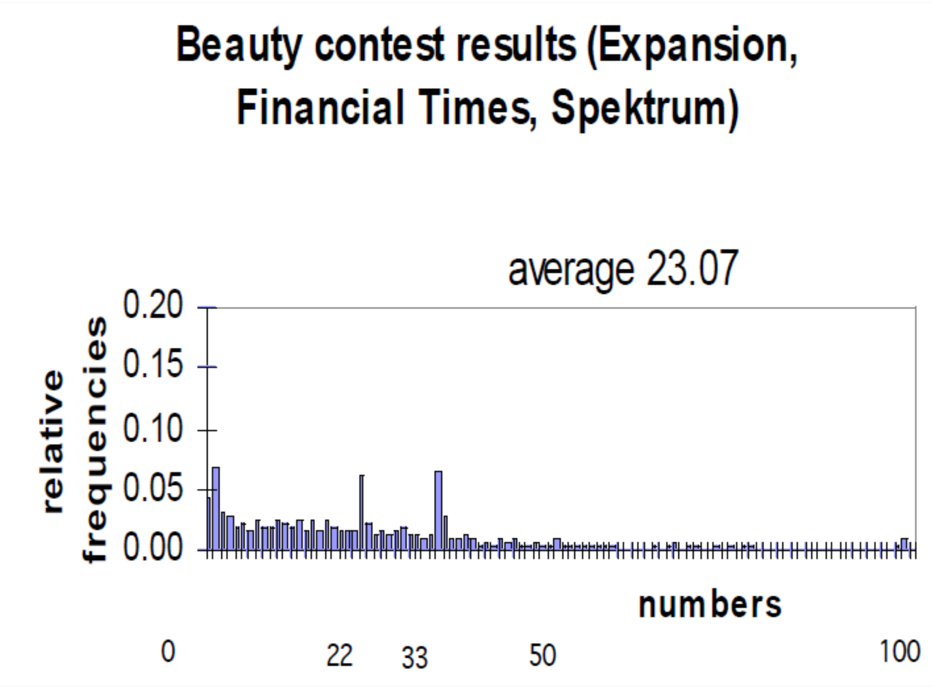
Behavioral Game Theory et le Cognitive Hierarchy Model

- Concours de beauté:
  - Donner un nombre entre 0 et 100
  - Celui qui gagne est celui qui donne la valeur la plus proche des 2/3 de la moyenne

[Camerer 2005]

Behavioral Game Theory et le Cognitive Hierarchy Model

- Concours de beauté:
  - Donner un nombre entre 0 et 100
  - Celui qui gagne est celui qui donne la valeur la plus proche des 2/3 de la moyenne



- Plusieurs niveaux de réflexion possible (cognitive hierarchy)
  - Niveau 1: 33
  - Niveau 2: 22
  - Niveau infini (rationalité parfaite, hypothèse de la théorie des jeux): 0

- Niveau k: je suppose que les autres suivent (k-1) niveaux et se distribuent selon une loi de poisson

- Niveau median: 1.6 étapes de raisonnement

[Camerer 2005]

TABLE II

DATA AND CH ESTIMATES OF τ IN VARIOUS p-BEAUTY CONTEST GAMES

Subject pool or game	Source[a]	Group size	Sample size	Nash equil'm	Pred'n error	Data			Fit of CH model				
						Mean	Std dev	Mode	τ	Mean	Error	Std dev	Mode
p = 1.1	HCW (98)	7	69	200	47.9	152.1	23.7	150	**0.10**	151.6	−0.5	28.0	165
p = 1.3	HCW (98)	7	71	200	50.0	150.0	25.9	150	**0.00**	150.4	0.5	29.4	195
High $	CHW	7	14	72	11.0	61.0	8.4	55	**4.90**	59.4	−1.6	3.8	61
Male	CHW	7	17	72	14.4	57.6	9.7	54	**3.70**	57.6	0.1	5.5	58
Female	CHW	7	46	72	16.3	55.7	12.1	56	**2.40**	55.7	0.0	9.3	58
Low $	CHW	7	49	72	17.2	54.8	11.9	54	**2.00**	54.7	−0.1	11.1	56
.7(Mean+18)	Nagel (98)	7	34	42	−7.5	49.5	7.7	48	**0.20**	49.4	−0.1	26.4	48
PCC	CHC (new)	2	24	0	−54.2	54.2	29.2	50	**0.00**	49.5	−4.7	29.5	0
p = 0.9	HCW (98)	7	67	0	−49.4	49.4	24.3	50	**0.10**	49.5	0.0	27.7	45
PCC	CHC (new)	3	24	0	−47.5	47.5	29.0	50	**0.10**	47.5	0.0	28.6	26
Caltech board	Camerer	73	73	0	−42.6	42.6	23.4	33	**0.50**	43.1	0.4	24.3	34
p = 0.7	HCW (98)	7	69	0	−38.9	38.9	24.7	35	**1.00**	38.8	−0.2	19.8	35
CEOs	Camerer	20	20	0	−37.9	37.9	18.8	33	**1.00**	37.7	−0.1	20.2	34
German students	Nagel (95)	14–16	66	0	−37.2	37.2	20.0	25	**1.10**	36.9	−0.2	19.4	34
80 yr olds	Kovalchik	33	33	0	−37.0	37.0	17.5	27	**1.10**	36.9	−0.1	19.4	34
U. S. high school	Camerer	20–32	52	0	−32.5	32.5	18.6	33	**1.60**	32.7	0.2	16.3	34
Econ PhDs	Camerer	16	16	0	−27.4	27.4	18.7	N/A	**2.30**	27.5	0.0	13.1	21
1/2 mean	Nagel (98)	15–17	48	0	−26.7	26.7	19.9	25	**1.50**	26.5	−0.2	19.1	25
Portfolio mgrs	Camerer	26	26	0	−24.3	24.3	16.1	22	**2.80**	24.4	0.1	11.4	26
Caltech students	Camerer	17–25	42	0	−23.0	23.0	11.1	35	**3.00**	23.0	0.1	10.6	24
Newspaper	Nagel (98)	3696, 1460, 2728	7884	0	−23.0	23.0	20.2	1	**3.00**	23.0	0.0	10.6	24
Caltech	CHC (new)	2	24	0	−21.7	21.7	29.9	0	**0.80**	22.2	0.6	31.6	0
Caltech	CHC (new)	3	24	0	−21.5	21.5	25.7	0	**1.80**	21.5	0.1	18.6	26
Game theorists	Nagel (98)	27–54	136	0	−19.1	19.1	21.8	0	**3.70**	19.1	0.0	9.2	16
Mean									**1.30**				
Median									**1.61**				

Loterie suédoise

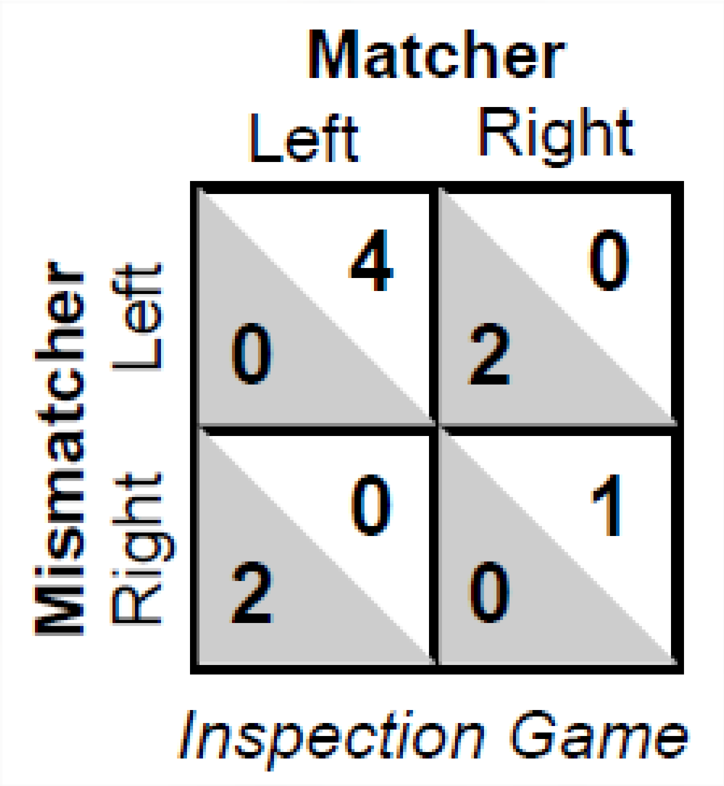
- Choisissez un nombre entre 1 et 99999
- Le plus petit nombre choisi une fois gagne
- 18% des mises au gagnant (1€ le nombre)
- Du 29 janvier au 18 mars 2007
- Arrêté après un article sur des collusions entre joueurs

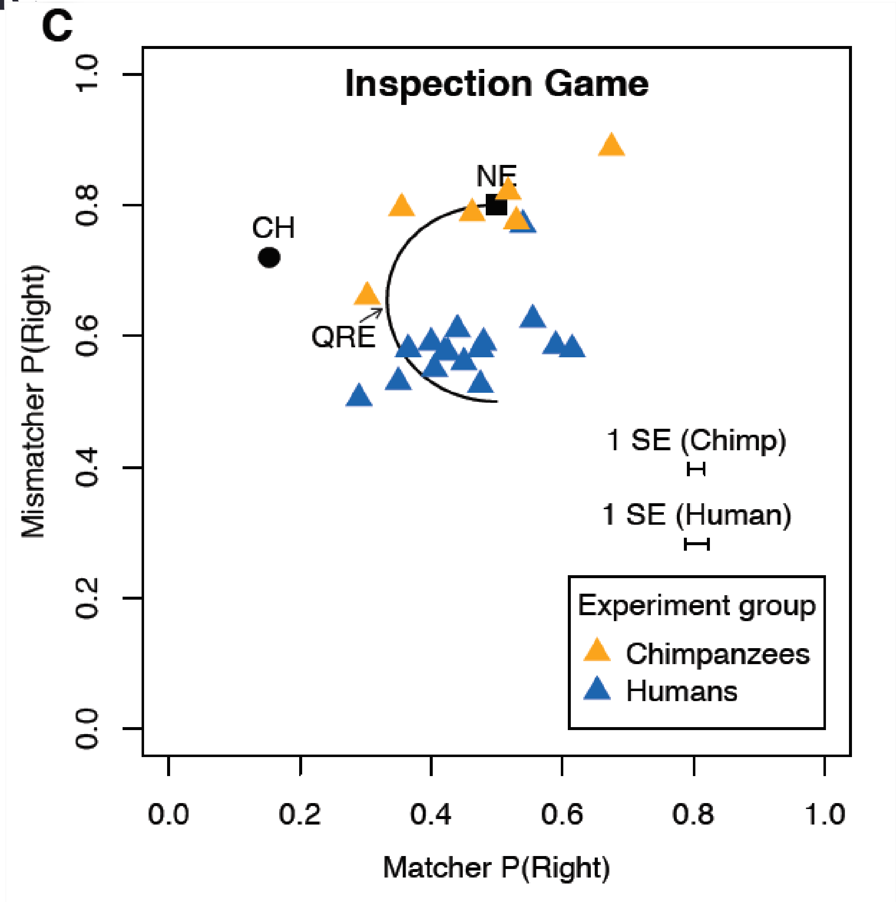
	All days				1^{st} week	7^{th} week	Eq.
	Avg.	Std.	Min	Max	Avg.	Avg.	Avg.
# Bets	53783	7782	38933	69830	57017	47907	53783
Average number played	2835	813	2168	6752	4512	2484	2595
Median number played	1675	348	436	2273	1204	1936	2542
Winning number	2095	1266	162	4465	1159	1982	2595
Lowest number not played	3103	929	480	4597	1745	3462	4938
Above $T = 5513$ (%)	6.65	6.24	2.56	30.32	20.11	2.80	0.00
First (25%) quartile	780	227	66	1138	425	914	1251
Third (75%) quartile	2898	783	2130	7610	3779	3137	3901
Below 100 (%)	6.08	4.84	2.72	2.97	15.16	3.19	2.02
Below 1000 (%)	32.31	8.14	21.68	63.32	44.91	27.52	20.03
Below 5000 (%)	92.52	6.44	68.26	96.74	78.75	96.44	93.32
Below 10000 (%)	96.63	3.80	80.70	98.94	88.07	98.81	100.00
Even numbers (%)	46.75	0.58	45.05	48.06	45.91	47.45	50.00
Divisible by 10 (%)	8.54	0.466	7.61	9.81	8.43	9.01	9.99
Proportion 1900–2010 (%)	71.61	4.28	67.33	87.01	79.39	68.79	49.78
11, 22,...,99 (%)	12.2	0.82	10.8	14.4	12.39	11.44	9.09
111, 222,...,999 (%)	3.48	0.65	2.48	4.70	4.27	2.78	0.90
1111, 2222,...,9999 (1/1000)	4.52	0.73	2.81	5.80	4.74	3.95	0.74
11111, 22222,...,99999 (1/1000)	0.76	0.84	0.15	5.45	2.26	0.21	0

Week	1	2	3	4	5	6	7
Poisson-Nash equilibrium							
χ^2(for average frequency)	640.45	323.76	257.42	259.27	261.19	121.29	107.60
(Degree of freedom)	***(10)	***(10)	***(10)	***(10)	***(10)	***(10)	***(10)
Proportion below (%)	48.95	61.29	67.14	67.44	69.93	76.25	76.23
ENO	2176.4	4964.4	6178.4	7032.4	8995.0	14056.8	13879.3
Cognitive hierarchy model							
Log-likelihood	-53740	-31881	-22085	-19672	-19496	-19266	-17594
τ	1.80	3.17	4.17	4.64	5.02	6.76	6.12
λ	0.0034	0.0042	0.0058	0.0068	0.0069	0.0070	0.0064

Chimpanzee Game Theory

- [Camerer 2012]
- Matching Pennies asymétrique





Bibliographie

- Cours en ligne
  - Base
    - http://www.cril.univ-artois.fr/~konieczny/enseignement/TheorieDesJeux.pdf
  - DIP
    - http://www.irit.fr/recherches/RPDMP/persos/Konieczny/enseignement/DIP.pdf
  - Forme extensive:
    - catalogue.polytechnique.fr/site.php?id=191&fileid=1093

- Livre de base
  - Théorie des jeux de K. Binmore
  - Computational aspects of cooperative game theory de Georgios Chalkiadakis, Edith Elkind, and Michael Wooldridge