Enumération et génération aléatoire de polyominos convexes en réseau hexagonal.

(Résumé long)

Alain Denise Christoph Dürr* Fouad Ibn-Majdoub-Hassani

LRI, Université Paris-Sud†

Abstract

A polyomino is a connected set of cells in a grid. A classification of convex polyominos in the hexagonal grid is defined, obtained by combination of the six natural convexity-directions, the three principal ones and the three diagonals. For some of these classes generating functions are provided, according to several parameters. Finally efficient uniform sampling rejection algorithms are presented to generate convex polyominos for some of these classes given the perimeter.

Résumé

Un polyomino est un ensemble connexe de cellules sur une grille. Nous définissons sept classes de convexité des polyominos en réseau hexagonal, selon les six axes principaux ou diagonaux du réseau. En utilisant la technique de “décomposition par strates”, nous donnons les séries génératrices de quelques-unes de ces classes selon plusieurs paramètres. Enfin, nous présentons des algorithmes à rejet efficaces pour la génération aléatoire uniforme de polyominos de périmètre donné de certaines classes.

1 Introduction

Considérons le plan $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Nous appellerons *réseau* un pavage de ce plan par des polygones réguliers de même forme carrée, hexagonale ou triangulaire et de mêmes dimensions ; chacun de ces polygones est une *cellule*. Un *polyomino* est un ensemble fini connexe de cellules sur un réseau donné (figure 1). Les polyominos sont définis à translation près, c'est-à-dire que deux polyominos sont égaux si l'un peut être obtenu par translation de l'autre. L'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent ; son *périmètre* est le nombre de segments, côtés des cellules, qui composent sa frontière.

Les problèmes d'énumération de polyominos, selon l'aire — combien existe-t'il de polyominos d'aire n donnée? — ou le périmètre, mobilisent depuis plusieurs dizaines d'années des mathématiciens, des physiciens et des informaticiens. Bien que certains résultats partiels aient pu être établis, ces problèmes sont réputés extrêmement difficiles dans leur généralité. Une

*Soutenu par le groupe de travail Esprit RAND2.

†LRI, Université Paris-Sud, bât 490, 91405 Orsay Cedex, France. {denise,durr,ibnmajdo}@lri.fr. http://www.lri.fr/~{denise,durr,ibnmajdo}.

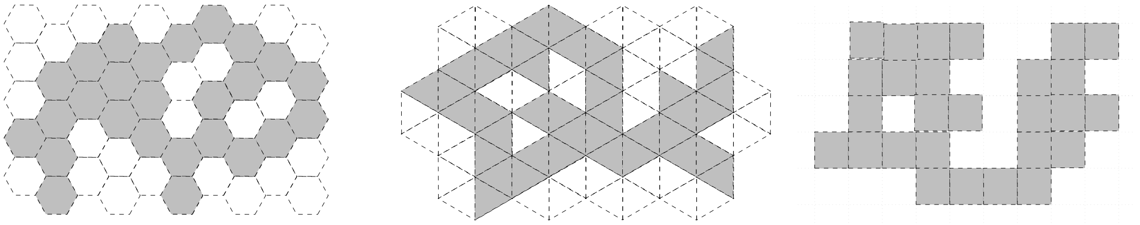


FIG. 1 - *Polyominos sur les trois réseaux.*

manière de les approcher consiste à énumérer des polyominos soumis à des contraintes particulières, comme les contraintes de direction de croissance ou de convexité. En les combinant, on obtient des familles de polyominos dont certaines peuvent être précisément énumérées. Les contributions sur ce sujet étant très nombreuses, nous nous bornerons à recommander la lecture de l'article de Xavier Viennot [15] sur l'état de l'art en 1992, ainsi que du récent mémoire de Mireille Bousquet-Mélou [2] qui présente un panorama complet des connaissances actuelles sur le sujet.

Certains auteurs s'intéressent depuis peu à un problème différent : la génération aléatoire de polyominos. Une des motivations de ce genre de travail est de pouvoir mesurer expérimentalement certains paramètres sur des polyominos de grande taille. Il s'agit de tirer au hasard un polyomino uniformément dans l'ensemble des polyominos de périmètre (ou aire) donné(e). On sait que les problèmes d'énumération et de génération aléatoire sont étroitement liés (voir par exemple [11]). En particulier, il est maintenant classique d'utiliser certaines "décompositions récursives" d'objets pour donner naissance aussi bien à des résultats d'énumération qu'à des algorithmes de génération aléatoire [8, 5]. Pour des classes particulières d'objets, des méthodes spécifiques, dites "à rejet", peuvent donner des algorithmes plus efficaces en termes de complexité [1, 9].

La plupart des travaux sur les polyominos concernant l'énumération ou la génération aléatoire, portent sur le réseau carré. Quelques auteurs cependant ont étudié l'énumération sur réseau hexagonal [12, 6, 13, 7, 10] ; certains travaux de [10] sont repris ici. En revanche, à notre connaissance, aucun travail n'a été effectué touchant la génération aléatoire sur ce réseau.

Notre propos est d'étudier, sous ces deux aspects, les polyominos convexes en réseau hexagonal. Dans la seconde section de cet article, nous décrivons sept classes de convexité sur le réseau hexagonal ; à rotations et symétries près, elles sont les seules pouvant être définies en utilisant uniquement les six directions principales et diagonales du réseau. La troisième section est consacrée à l'énumération : en utilisant une technique de "décomposition par strates" introduite par Temperley [14] puis largement développée par Bousquet-Mélou [3], nous calculons des séries génératrices, selon plusieurs paramètres, pour six des sept classes. Dans la section 4, nous décrivons un codage des polyominos par des mots. Ce codage nous permet de développer en section 5 des algorithmes à rejet pour la génération aléatoire, selon le périmètre, de polyominos de quatre classes. Ces algorithmes s'avèrent particulièrement efficaces, en termes de complexité, comparés aux méthodes plus classiques de génération récursive.

2 Classification des convexités en réseau hexagonal

On dit qu'un polyomino est *convexe* selon une direction donnée si l'intersection du polyomino avec toute droite parallèle à cette direction et passant par le centre d'une cellule du plan est connexe. En réseau carré, on considère classiquement les convexités selon quatre axes - les quatre directions principales et diagonales du réseau - ainsi que leurs combinaisons. On recense ainsi au total huit classes de convexité en réseau carré [2].

Nous définissons similairement des convexités selon les six directions principales (droites d'angle 0, $\pi/3$ et $2\pi/3$) et diagonales (droites d'angle $\pi/6$, $\pi/2$ et $5\pi/6$) du réseau hexagonal. Ces différents types de convexités peuvent être combinés pour former sept classes de polyominos définies par le tableau suivant.

	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$
C^1				O		
C^2		O		O		
C^3		O		O		O
EG	O	o		O		o
F^1				o	O	o
F^2		o	O	o	O	o
F^3	O	o	O	o	O	o

Chaque ligne du tableau correspond à une classe de convexité (C^1-convexité, C^2-convexité etc). Un "O" majuscule a l'intersection d'une ligne X et d'une colonne α indique que les polyominos X-convexes sont *par définition* convexes selon la direction d'angle α. Ainsi, un polyomino est dit F^2-convexe s'il est convexe selon les directions d'angle $\pi/3$ et $2\pi/3$.

Un "o" minuscule dans une case signifie que les polyominos X-convexes sont aussi convexes selon la direction α, non par définition mais en vertu du lemme suivant.

Lemme 2.1 *Si un polyomino est convexe selon une direction d'angle $k\pi/3$ ($k \in \{0,1,2\}$), alors il est aussi convexe selon les directions d'angles $(k\pi/3 - \pi/6)$ et $(k\pi/3 + \pi/6)$.*

Certaines des classes ainsi définies sont déjà connues. Ainsi, les polyominos C^1-convexes ont été énumérés selon plusieurs paramètres par Lin et Wu [13] puis par Feretić et Svrtan [7] ; les EG-convexes ont été définis et étudiés par Enting et Guttmann [6] et par Lin et Chang [12]. A notre connaissance, les autres classes n'ont pas été étudiées.

On peut prouver sans grande difficulté le résultat qui suit.

Proposition 2.1 *Les sept types de convexité précédemment définis sont, à rotations et symétries près, les seuls possibles selon les six angles donnés. Ils caractérisent sept ensembles distincts de polyominos. De plus, si $S(X)$ désigne l'ensemble des polyominos X-convexes, pour $X \in \{C^1, C^2, C^3, EG, F^1, F^2, F^3\}$, alors les inclusions strictes suivantes sont vérifiées :*

$$S(F^3) \subset S(F^2) \subset \begin{array}{c} S(F^1) \\ S(EG) \subset S(C^3) \end{array} \subset S(C^2) \subset S(C^1).$$

3 Enumération des polyominos convexes

Dans cette section, nous allons donner des séries génératrices pour les polyominos F^3, F^2, F^1, C^3 et EG-convexes. D'après la proposition 2.1, ces classes de polyominos sont toutes incluses dans l'ensemble des polyominos C1-convexes. On peut donc considérer tout polyomino appartenant à l'une d'entre elles comme une suite de *colonnes* adjacentes. Une colonne est une suite verticale de cellules adjacentes ; sa *hauteur* est le nombre de cellules qui la composent. Nous pouvons alors appliquer à ces classes de polyominos la technique d'énumération de "décomposition par strates" décrite dans [3]. Les paramètres d'énumération sont l'aire comptée par q, le demi-périmètre compté par x, le nombre de colonnes (ou largeur) compté par y, enfin la hauteur de la colonne la plus à droite comptée par t. La présence de ce dernier paramètre est liée à la technique d'énumération employée. Pour tout type de convexité X, on note $X(x, y, q, t)$ la série génératrice des polyominos de la classe $S(X)$.

3.1 Polyominos F^3-convexes

Si P est un polyomino F^3-convexe, alors il existe un hexagone minimal H qui le contient et dont les côtés sont parallèles aux cotés des cellules du réseau. On remarque que chaque côté de H touche une unique cellule de P.
Soit Γ_1 la colonne de P qui contient la cellule touchant le côté haut de H, Γ_2 celle qui contient la cellule qui touche le côté bas de H et Γ_3 la première colonne qui se trouve à droite de Γ_1 et Γ_2 ; Γ_3 peut éventuellement ne pas exister.
Soient $\mathcal{F}_1^3$, $\mathcal{F}_2^3$, $\mathcal{F}_3^3$ et $\mathcal{F}_4^3$ les ensembles définis par :

1. $P \in \mathcal{F}_1^3 \Leftrightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2$ et Γ_3 n'existe pas.
2. $P \in \mathcal{F}_2^3 \Leftrightarrow \Gamma_1$ est à gauche de Γ_2 et Γ_3 n'existe pas.
3. $P \in \mathcal{F}_3^3 \Leftrightarrow \Gamma_1$ est à droite de Γ_2 et Γ_3 n'existe pas.
4. $P \in \mathcal{F}_4^3 \Leftrightarrow \Gamma_3$ existe.

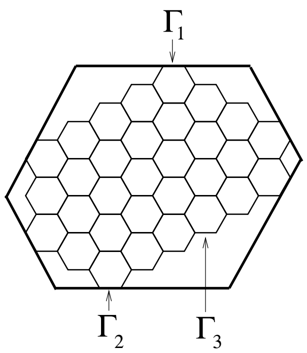


FIG. **2** - Colonnes particulières d'un polyomino F^3-convexe.

Clairement, ces ensembles forment une partition de l'ensemble des polyominos F^3-convexes. Soit $F^3(x, y, q, t) = \sum_{i\geq 1} f_i^3(x, y, q)t^i$ la série génératrice des polyominos F^3-convexes. On a alors $F^3(x, y, q, t) = F_1^3(x, y, q, t) + F_2^3(x, y, q, t) + F_3^3(x, y, q, t) + F_4^3(x, y, q, t)$.

Théorème 3.1 *Les séries génératrices F_1^3, F_2^3, F_3^3 et F_4^3 vérifient les équations suivantes :*

$$F_1^3(x, y, q, t) = \frac{x^3yqt}{1 - x^2qt} + x^3yqtF_1^3(x, y, q, qt), \tag{1}$$

$$F_2^3(x, y, q, t) = x^2yF_1^3(x, y, q, qt) + x^2yF_2^3(x, y, q, qt), \tag{2}$$

$$F_3^3(x, y, q, t) = x^2yF_1^3(x, y, q, qt) + x^2yF_3^3(x, y, q, qt), \tag{3}$$

$$F_4^3(x, y, q, t) = \frac{xy}{qt}(F^3(x, y, q, qt) - f_1^3(x, y, q)qt). \tag{4}$$

Idée de preuve. Un polyomino de $\mathcal{F}_1^3$ peut soit contenir une unique colonne, soit être construit en dupliquant la dernière colonne d'un polyomino de $\mathcal{F}_1^3$ augmentée d'une cellule (Fig. 3). Chacune de ces alternatives donne un terme du membre droit de l'équation (1). Les équations (2), (3) et (4) sont obtenues par une construction similaire. □

En éliminant le paramètre aire ($q := 1$), et en résolvant les équations (1), (2), (3) et (4), on obtient la série génératrice des polyominos F^3-convexes.

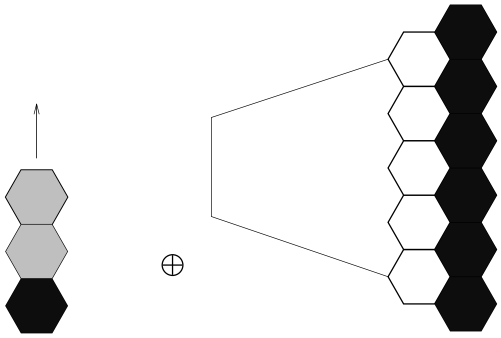


FIG. **3** - Construction d'un polyomino de F_1^3.

Théorème 3.2 *La série génératrice des polyominos F^3-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) et la largeur (comptée par y) est :*

$$F^3(x,y,1,1) \quad = \quad x^3y\frac{1+x^3y}{(1-x^2y)^2(1-x^2)(1-x^3y)}.$$

Par restriction au paramètre demi-périmètre (on pose $y := 1$), on obtient :

Corollaire 3.1 *La série génératrice des polyominos F^3-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) est :*

$$F^3(x,1,1,1) \quad = \quad x^3\frac{1+x^3}{(1-x^2)^3(1-x^3)}.$$

En effectuant un développement de Taylor, on obtient le nombre de polyominos F^3-convexes de demi-périmètre donné.

Corollaire 3.2 *Le nombre p_n de polyominos F^3-convexes de demi-périmètre n est :*

$$\begin{aligned}
&si \quad n \equiv 0[3], \quad p_n = \frac{n(2n^2+3)}{144} - \frac{3n(-1)^n}{16},\\
&si \quad n \equiv 1[3], \quad p_n = \frac{n(2n^2+3)}{144} - \frac{3n(-1)^n}{16} - \frac{2}{9},\\
&si \quad n \equiv 2[3], \quad p_n = \frac{n(2n^2+3)}{144} - \frac{3n(-1)^n}{16} + \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Par l'analyse des singularités de la série $F^3(x,1,1,1)$, on trouve finalement le résultat suivant.

Corollaire 3.3 *Le nombre de polyominos F^3-convexes de demi-périmètre n est asymptotiquement égal à $n^3/72$.*

3.2 Polyominos F^2, F^1, C^3 et EG-convexes

Nous avons effectué un travail similaire pour d'autres classes de convexité. Nous donnons ici, sans preuve, les résultats que nous avons obtenus pour les polyominos F^2, F^1, C^3 et EG-convexes.

Théorème 3.3 *La série génératrice des polyominos F^2-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) est :*

$$F^2(x,1,1,1) \quad = \quad \frac{x[2x^4+4x^3-1+x^2+(1-x^2)\sqrt{1-4x^2}]}{2(x-1)(1+x)(x^3+2x^2+x-1)^2}$$

Corollaire 3.4 *Le nombre de polyominos F^2-convexes de demi-périmètre n est asymptotiquement égal à* $\sqrt{2/\pi}\ 2^{n+3} n^{-\frac{3}{2}}$.

Théorème 3.4 *La série génératrice des polyominos F^1-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) est :*

$$F^1(x,1,1,1) \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{1-x^2(3-x)(1+x)-(1+x-x^2)\sqrt{(1+x+x^2)(1-3x+x^2)}}{x(2+2x-x^2)}.$$

Corollaire 3.5 *Le nombre de polyominos F^1-convexes de demi-périmètre n est asymptotiquement égal à*

$$\sqrt{\frac{6\sqrt{5}-10}{2\pi}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} n^{-\frac{3}{2}}.$$

Théorème 3.5 *La série génératrice des polyominos C^3-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) est :*

$$C^3(x,1,1,1) \quad = \quad \frac{x^3[\eta - 3x^4(1+x)^2(1-2x)^2\sqrt{1-4x^2}]}{2[(1-2x)(1+x)]^4}$$

où $\eta = 2-8x+2x^2+20x^3+x^4-34x^5-19x^6+28x^7+32x^8-12x^9-6x^{10}$.

Corollaire 3.6 *Le nombre de polyominos C^3-convexes de demi-périmètre n est asymptotiquement égal à* $n^3 2^{n-10}/27$.

Théorème 3.6 *La série génératrice des polyominos EG-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) et la largeur (comptée par y) est :*

$$EG(x,y,1,1) \quad = \quad \frac{x^3[1-2x+x^2y(1-x^2y)+x^3(2-x)(1-y)-x^2y\sqrt{\delta}]}{(1+x)^2(1-2x+x^2-x^2y)^2}$$

où $\delta = 1-2x^2(1+y)+x^4(1-y)^2$.

Corollaire 3.7 *La série génératrice des polyominos EG-convexes suivant le demi-périmètre (compté par x) est :*

$$EG(x,1,1,1) \quad = \quad \frac{x^3[1-2x+x^2-x^4-x^2\sqrt{1-4x^2}]}{(1+x)^2(1-2x)^2}$$

Cette dernière série, conjecturée par Enting et Guttmann [6], a été obtenue de façon différente par Lin et Chang [12].

Corollaire 3.8 *Le nombre de polyominos EG-convexes de demi-périmètre n est asymptotiquement égal à* $n2^{n-5}/3$.

4 Codage des polyominos par des mots

Considérons les *chemins* composés des six types de *pas* présentés en figure 4 ; chaque pas relie le centre d'une cellule au centre d'une cellule adjacente. Chacun de ces chemins peut — à translation près — être représenté par un mot (éventuellement vide) sur l'alphabet $\Sigma = \{u, \bar{l}, l, d, r, \bar{r}\}$.

A tout chemin fermé on associe le polyomino composé des cellules empruntées ou enfermées par le chemin. Appelons *origine* d'un polyomino la cellule la plus basse de la colonne la plus à gauche, et *bord* d'un polyomino l'ensemble de ses cellules qui bordent sa frontière. Parmi tous les chemins décrivant le même polyomino, il y en a exactement un qui commence à l'origine, qui est le plus court et qui parcourt les cellules du bord dans le sens des aiguilles d'une montre. Nous dirons que ce chemin est *bien formé* et nous l'appellerons le *chemin de bord* du polyomino. Le *périmètre intérieur* d'un polyomino sera la longueur de son chemin de bord. Rappelons que le périmètre (tout court) d'un polyomino est le nombre de segments, côtés des cellules, qui composent sa frontière ; ce nombre est toujours pair. Ces deux périmètres sont liés par une relation très simple qui peut être prouvée par induction sur le nombre de cellules :

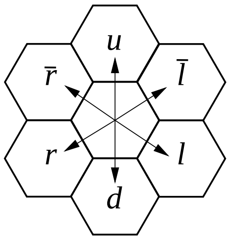


FIG. 4 - Les 6 directions dans le réseau hexagonal.

Lemme 4.1 *Soit un polyomino sans trou de périmètre $2n$ et de périmètre intérieur m ; alors $n = m + 3$.*

Soit L_w l'ensemble des mots correspondant aux chemins bien formés, et $L(X)$ l'ensemble des mots codant des polyominos X-convexes, pour tout type de convexité X.

Lemme 4.2 *Ces langages satisfont les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}
L(F^3) &= L_w \cap u^*\bar{r}^*r^*d^*l^*\bar{l}^* \\
L(F^2) &= L_w \cap u^*\{\bar{r}, r\}^*d^*\{l, \bar{l}\}^* \\
L(EG) &= L_w \cap \{u, \bar{r}\}^*\{r, d\}^*\{d, l\}^*\{\bar{l}, u\}^* \\
L(F^1) &= L_w \cap \{u, \bar{r}, r\}^*\{d, l, \bar{l}\}^* \\
L(C^3) &= L_w \cap \{u, \bar{r}\}^*\{\bar{r}, r\}^*\{r, d\}^*\{d, l\}^*\{l, \bar{l}\}^*\{\bar{l}, u\}^* \\
L(C^2) &= L_w \cap \{u, \bar{r}\}^*\{\bar{r}, r, u\}^*\{d, l\}^*\{l, \bar{l}, u\}^* \\
L(C^1) &= L_w \cap \{u, \bar{r}, r, d\}^*\{d, l, \bar{l}, u\}^*
\end{aligned}$$

Idée de la preuve pour la C^1-convexité seulement. Pour les autres convexités les preuves sont soit similaires soit obtenues par l'intersection des langages.

Puisqu'un polyomino convexe doit être nécessairement sans trou, nous devons seulement prouver que $L(C^1) \subseteq \{u, \bar{r}, r, d\}^*\{d, l, \bar{l}, u\}^*$. Soit $w \in L(C^1)$ un chemin arbitraire. Parmi les

cellules du bord du polyomino décrit par w, il y en a une qui est la plus haute, parmi les plus à droite. Alors le chemin de bord se décompose de manière unique en $w = w'w''$, tel que w' est le plus court préfixe de w se terminant sur cette cellule. Il nous faut maintenant prouver que $w' \in \{u, \bar{r}, r, d\}^*$ et $w'' \in \{d, l, \bar{l}, u\}^*$. Par symétrie ne considérons que w'.
Supposons que w' comporte l ou $\bar{l}$ et soit i l'indice d'une des occurrences. Nous allons maintenant montrer que w' comporte un facteur de $\{r, \bar{r}\}u^*\{l, \bar{l}\}$ ou de $\{l, \bar{l}\}d^*\{r, \bar{r}\}$ ce qui est en contradiction avec le fait que w' est bien formé, soit avec le fait que le polyomino ainsi décrit est C^1-convexe. (Voir figure 4. Le chemin de bord de ce polyomino est codé par $w = w'w''$ avec $w' = uuur\bar{r}ur\bar{r}rlddrr \notin \{u, r, \bar{r}, d\}^*$ et $w'' = l\bar{l}luu\bar{l}ldl \in \{u, l, \bar{l}, d\}^*$.)

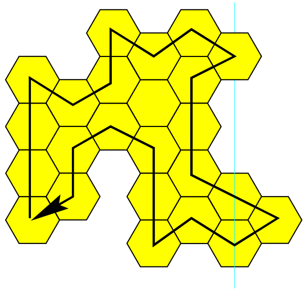


FIG. **5** - Polyomino non C^1-convexe

Puisque le chemin codé par w' commence sur une des cellules les plus à gauche et termine sur une des cellules les plus à droite, les facteurs de w' avant et après l'indice i doivent contenir r ou $\bar{r}$. Sachant que w est bien formé on peut montrer que w' comporte alors un des facteurs menant à une contradiction. □

Pour tout mot w et toute lettre x, notons $|w|_x$ le nombre d'occurrences de x dans w. La propriété suivante est vérifiée :

Lemme 4.3 *Soit $w \in \Sigma$ un mot codant un chemin. Ce chemin est fermé si et seulement si*

$$\begin{aligned} |w|_{\bar{r}} + |w|_r &= |w|_l + |w|_{\bar{l}}, \\ |w|_r + |w|_d &= |w|_{\bar{l}} + |w|_u, \\ |w|_d + |w|_l &= |w|_u + |w|_{\bar{r}}. \end{aligned}$$

5 Génération des polyominos

Nous allons maintenant présenter pour chaque convexité F^3, C^3, EG et F^2 un algorithme probabiliste qui, étant donné un nombre m, génère aléatoirement et uniformément le chemin de bord d'un polyomino convexe de périmètre intérieur m. La complexité de l'algorithme sera exprimée en fonction de m[1]. Nous considérerons qu'un bit ou un nombre en $O(m)$ peut être tiré aléatoirement en temps constant.

Il serait possible de concevoir des algorithmes de génération utilisant les décompositions de polyominos utilisées pour leur énumération ([8, 5]). Cependant, ces algorithmes auraient une complexité de l'ordre de $\Omega(n^3)$. Les algorithmes à rejet que nous allons présenter sont plus efficaces.

Pour chaque convexité X soit $L_m(X)$ l'ensemble des mots de $L(X)$ de longueur m. Nous allons définir un ensemble $A_m(X)$ et une injection $f_m^X : L_m(X) \to A_m(X)$. L'algorithme génère alors un élément a de $A_m(X)$. Si a est dans l'image de f_m^X il calcule la préimage et l'accepte, sinon il le rejette et recommence. Le temps moyen de cet algorithme est alors $|A_m(X)|/|L_m(X)|$ multiplié par le temps d'une itération, c'est-à-dire le temps de génération de a. Sauf pour la F^3-convexité, le temps d'une itération sera linéaire.

1. En d'autres mots, m est donné en notation unaire.

5.1 Génération des polyominos F^3-convexes

Soit $A_m(F^3) = \{(m_1, m_2, m_3) : m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N},\ m_1 + m_2 + m_3 \leq m\}$ et $f_m^{F^3}(w) = (|w|_u, |w|_{\bar{r}}, |w|_r)$.

Lemme 5.1 *La fonction $f_m^{F^3}$ est injective.*

Preuve. Soit $w \in L_m(F^3)$ un chemin arbitraire et $f_m^{F^3}(w) = (m_1, m_2, m_3)$. Soient $m_4 = |w|_d, m_5 = |w|_l$ et $m_6 = |w|_{\bar{l}}$. Lemme 4.2 implique que $w = u^{m_1}\bar{r}^{m_2}\ldots\bar{l}^{m_6}$. Or lemme 4.3 implique pour des chemins fermés :

$$\begin{aligned} m_4 &= m - m_1 - 2m_2 - 2m_3, \\ m_5 &= -m + 2m_1 + 3m_2 + 2m_3, \\ m_6 &= m - 2m_1 - 2m_2 - m_3. \end{aligned}$$

□

L'algorithme est le suivant. On tire au hasard trois nombres m_1, m_2 et m_3 dont la somme est inférieure ou égale à m ; ceci peut être fait en temps constant. Puis on calcule m_4, m_5 et m_6 avec les formules ci-dessus. Si ces trois derniers nombres sont positifs, alors $w = u^{m_1}\bar{r}^{m_2}r^{m_3}d^{m_4}l^{m_5}\bar{l}^{m_6}$ code un polyomino F^3-convexe ; sinon, on recommence le procédé.

Théorème 5.1 *Le temps moyen de l'algorithme est $O(1)$.*

Preuve. D'après le corollaire 3.3, la valeur asymptotique de $|L_m(F^3)|$ est $m^3/72$; d'autre part, $|A_m(F^3)| = (m+3)(m+2)(m+1)/6$ ce qui donne asymptotiquement une probabilité de succès de $1/12$. Le temps d'une itération est clairement constant, ce qui conclut la preuve. □

Notons que ce temps est celui de l'obtention des six nombres m_i. Si l'on veut écrire le mot w ou tracer le polyomino correspondant, il faudra bien sûr ajouter un terme linéaire à cette complexité.

5.2 Génération des polyominos C^3-convexes

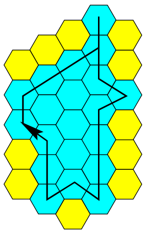
Commençons par une remarque sur les polyominos F^3-convexes. Le bord d'un polyomino F^3-convexe est l'union de 6 *côtés*. Chaque côté est associé à une direction et est composé des cellules parcourues par la partie correspondante du chemin de bord. Notons que certaines cellules peuvent faire partie de plusieurs côtés. Soit le *premier coté* le coté associé à u, le *deuxième* le coté associé à $\bar{r}$, etc.

Posons $A_m(C^3) = \{(Q, k, v) : Q \in L_m(F^3),\ v \in \{0,1\}^m,\ 0 \leq k \leq m/2\}$. Pour tout $w \in L_m(C^3)$ soit $f_m^{C^3}(w) = (Q, k, v)$ où que Q, k, v sont définis comme suit (Voir figure 6).

Soit P le polyomino décrit par w. Alors Q est le plus petit polyomino F^3-convexe contenant P. Clairement chaque coté de Q a au moins une cellule en commun avec le bord de P.

Le mot w peut être décomposé en $w = w_{(1)}w_{(2)}\ldots w_{(6)}$ tel que dans Q $w_{(1)}$ relie le premier coté au second, $w_{(2)}$ le second au troisième et ainsi de suite. Appelons *décomposition canonique*[2] celle qui minimise en premier la longueur de $w_{(1)}$, en deuxième celle de $w_{(2)}$ etc. On déduit du lemme 4.2 que $w_{(1)} \in \{u, \bar{r}\}^*$, $w_{(2)} \in \{\bar{r}, r\}^*$, etc. Pour chacun de ces alphabets, on définit les homomorphismes $f_1, f_2, \ldots, f_6$ tels que $f_1(u) = 0$, $f_1(\bar{r}) = 1$, $f_2(\bar{r}) = 0$, $f_2(r) = 1$ etc. Le mot v est alors défini par $v = f_1(w_{(1)})f_2(w_{(2)})\ldots f_6(w_{(6)})$.

2. Nous notons les indices par $w_{(i)}$ pour ne pas confondre avec w_i, la lettre d'indice i de w.



Ce polyomino C^3-convexe est codé par le polyomino F^3-convexe Q à son tour codé par $(4,3,1,5,2,2)$, l'entier $k = 2$ et le mot $v = 01110110100010110$ correspondant au chemin de bord $w = \underbrace{u\bar{r}\bar{r}\bar{r}u}_{w_{(1)}}\underbrace{\epsilon}_{w_{(2)}}\underbrace{ddr}_{w_{(3)}}\underbrace{lddd}_{w_{(4)}}\underbrace{\bar{l}l}_{w_{(5)}}\underbrace{uu\bar{l}}_{w_{(6)}}$.

FIG. 6 - *Codage d'un polyomino C^3-convexe*

Enfin, l'entier k est la distance entre l'origine de P et celle de Q.

Lemme 5.2 *La fonction $f_m^{C^3}$ est injective*

Théorème 5.2 *Le temps moyen de l'algorithme est $O(m^2)$.*

Preuve. Le nombre de triplets (Q, v, k) est asymptotiquement $((m+3)^3/72)2^m m/2$ et le nombre de polyominos C^3-convexes $2^{m+3}(m+3)^3/(2^{10}3^3)$ (voir le corollaire 3.6), ce qui donne une probabilité de succès asymptotique de $1/24m$. Le temps moyen d'une itération est $12 + m + 1$, ce qui conclut la preuve. □

5.3 Génération des polyominos EG-convexes

Soit $A_m(EG) = \{(k_1, v) : 0 \le k_1 \le m/2,\ v \in \{0,1\}^m,$ tel que $|v|_0$ est pair$\}$.

Soit $w \in L(EG)$. De manière similaire à la section précédente, soit $w = w_{(1)}w_{(2)}w_{(3)}w_{(4)}$ la *décomposition canonique* de w avec $w_{(1)} \in \{u, \bar{r}\}$, $w_{(2)} \in \{r, d\}$, $w_{(3)} \in \{d, l\}$ et $w_{(4)} \in \{\bar{l}, u\}$. Soit maintenant le morphisme $f : \Sigma \to \{0,1\}$, tel que $f(u) = f(d) = 1$ et $f(r) = f(\bar{r}) = f(l) = f(\bar{l}) = 0$.

Alors on définit l'image de w par $f_m^{EG}(w) = (|w_{(1)}|, f(w))$.

Lemme 5.3 *La fonction f_m^{EG} est injective.*

Preuve. Soit $w \in L_m(EG)$ et $f_m^{EG} = (k_1, v)$. Soient k_2, k_3 et k_4 les longueurs respectives de $w_{(2)}, w_{(3)}$ et $w_{(4)}$. Alors clairement la connaissance des ces nombres suffit pour décoder v. Nous allons maintenant montrer que ces nombres sont déterminés de manière unique.

Soit $i = |v|_0$. Le lemme 4.3 implique que i est pair. Soit j l'indice de la $i/2$-ième occurrence de 0 dans v. Alors, de par la définition d'une décomposition canonique, $k_2 = j - k_1$.

Il nous suffit maintenant de prouver que k_3 est déterminé de manière unique, car $k_4 = m - (k_1 + k_2 + k_3)$. Pour un k_3 donné, considérons les nombres m_1, m_2, m_4 et m_5 suivants.

$$\begin{aligned} m_1 &= |v_1 \dots v_{k_1}|_1 + |v_{k_1+k_2+k_3+1} \dots v_m|_1 & \qquad m_4 &= |v_{k_1+1} \dots v_{k+1+k_2+k_3}|_1 \\ m_2 &= |v_1 \dots v_{k_1}|_0 & m_5 &= |v_{k_1+k_2+1} \dots v_{k_1+k_2+k_3}|_0 \end{aligned}$$

Si v code w alors ces nombres sont $m_1 = |w|_u$, $m_2 = |w|_{\bar{r}}$, $m_4 = |w|_d$ et $m_5 = |w|_l$. Or avec k_3, $m_4 + m_5$ croit de manière monotone et $m_1 + m_2$ décroît. D'après le lemme 4.3 l'équivalence des deux sommes est nécessaire pour que w soit bien formé, et donc k_3 est déterminé de manière unique. □

Théorème 5.3 *Le temps moyen de cet algorithme est $O(m)$.*

Preuve. Le nombre de couples (k, v) est $2^{m-1}\lfloor m/2 \rfloor$ et le nombre asymptotique de polyominos EG-convexes est $2^{m-2}(m+3)/3$ d'après le corollaire 3.8, ce qui donne une probabilité asymptotique de succès de $(m+3)/3m$. Le temps d'une itération est clairement linéaire ce qui conclut la preuve. □

5.4 Génération de polyominos F^2-convexes

Soit $A_m(F^2) = \{(w_{(2)}, w_{(4)}) : w_{(2)} \in \{\bar{r}, r\}^*,\ w_{(4)} \in \{\bar{l}, l\}^*,\ 0 \leq |w_{(2)}| = |w_{(4)}| \leq m/2\}$.

Soit w le chemin de bord d'un polyomino F^2-convexe et $w = w_{(1)}w_{(2)}w_{(3)}w_{(4)}$ sa décomposition en $w_{(1)} \in u^*, w_{(2)} \in \{\bar{r}, r\}^*, w_{(3)} \in d^*$ et $w_{(4)} \in \{l, \bar{l}\}$. D'après le lemme 4.3, on a $|w_{(2)}| = |w_{(4)}|$.

Alors l'image de w est $f_m^{F^2}(w) = (w_{(2)}, w_{(4)})$.

Lemme 5.4 *La fonction $f_m^{F^2}$ est injective.*

Preuve. Soit $k = |w_{(2)}| = |w_{(4)}|$. Il nous faut montrer que les longueurs $m_1 = |w|_u$ et $m_4 = |w|_d$ sont définies de manière unique. On déduit du lemme 4.3 les équations suivantes : $m_1 + |w_2|_{\bar{r}} = |w_{(4)}|_l + m_4$, $m_1 + m_4 = m - 2k$. Ces équations sont indépendantes et contiennent deux inconnues. Donc le système a une unique solution, déterminant ainsi w. □

Théorème 5.4 *Cet algorithme se termine après un temps moyen de $O(m^2\sqrt{m})$.*

Preuve. Le nombre de couples est $\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{2i} = (4^{\lfloor m/2 \rfloor + 1} - 1)/(4-1)$. Le nombre asymptotique des polyominos F^2-convexes de périmètre intérieur m est $2^{m+6}(m+3)^{-3/2} * \sqrt{2/\pi}$ (corollaire 3.4, ce qui donne une probabilité de succès asymptotique de $96/(\sqrt{2\pi}m^{3/2})$. Le temps d'une itération est clairement linéaire, ce qui conclut la preuve. □

6 Remarques finales

Il reste encore des classes que nous n'avons pas pu énumérer, ou pour lesquelles nous n'avons pas d'algorithme efficace de génération. Nous tentons en ce moment de résoudre ces problèmes.

L'algorithme de génération des polyominos C^3-convexes peut être amélioré en si l'on rejette le mot v non après l'avoir entièrement généré, mais dès que l'on peut s'apercevoir qu'il n'aboutira pas à un mot valide [4]. La figure 7 illustre l'évolution expérimentale du facteur d'amélioration du temps de calcul moyen en fonction de l'entrée m ; nous conjecturons qu'il est en $O(\log m)$. Ce résultat reste cependant à prouver.

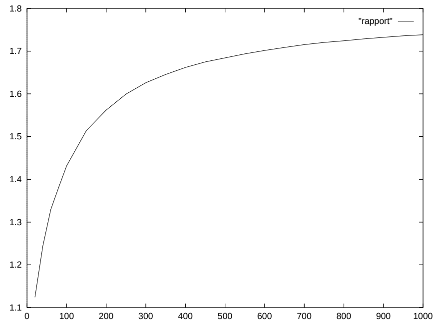


FIG. 7 - Facteur d'amélioration du générateur des polyominos C^3-convexes.

Pour un travail futur, il pourrait être intéressant de considérer les polyominos sur réseau triangulaire. Ce réseau est très proche du réseau hexagonal, puisque les polyominos (resp. animaux) du premier sont en bijection triviale avec les animaux (resp. polyominos) du second réseau. Cependant nos résultats ne s'y appliquent pas directement.

Une autre possibilité consisterait à classifier et étudier les polyominos convexes *dirigés*, comme cela a été fait pour le réseau carré [2]. Ce travail a été commencé dans [10].

Références

[1] Barcucci (E.), Pinzani (R.) et Sprugnoli (R.). – The random generation of directed animals. *Theoretical Computer Science*, vol. 127, n° 2, 1994, pp. 333–350.

[2] Bousquet-Mélou (M.). – *Mémoire d'habilitation à diriger des recherches.* – LaBRI, Université Bordeaux I, 1996.

[3] Bousquet-Mélou (M.). – A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Mathematics*, vol. 154, 1996, pp. 1–25.

[4] Denise (A.). – Génération aléatoire et uniforme de mots. *Discrete Mathematics*, vol. 153, 1996, pp. 69–84.

[5] Dutour (I.). – *Grammaires d'objets : énumération, bijections et génération aléatoire.* – Thèse de PhD, Université Bordeaux I, 1996.

[6] Enting (I.G.) et Guttmann (A.J.). – Polygons on the honeycomb lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1989, pp. 1371–1384.

[7] Feretić (S.) et Svrtan (D.). – On the number of column-convex polyominoes with given perimeter and number of columns. *In : Actes du 5ème colloque Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, éd. par Barlotti (A.), Delest (M.) et Pinzani (R.), pp. 201–214. – Florence, 1993.

[8] Flajolet (Ph.), Zimmermann (P.) et Van Cutsem (B.). – A calculus for the random generation of labelled combinatorial structures. *Theoretical Computer Science*, vol. 132, 1994, pp. 1–35.

[9] Hochstättler (W.), Loebl (M.) et Moll (C.). – Generating convex polyominoes at random. *Discrete Mathematics*, vol. 153, 1996, pp. 165–176.

[10] Ibn-Majdoub-Hassani (F.). – *Combinatoire des polyominos et des tableaux décalés oscillants.* – Thèse de PhD, Université Paris-Sud, 1996.

[11] Jerrum (M. R.), Valiant (L. G.) et Vazirani (V. V.). – Random generation of combinatorial structures from a uniform distribution. *Theoretical Computer Science*, vol. 43, 1986, pp. 169–188.

[12] Lin (K.Y.) et Chang (S.J.). – Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 21, 1988, pp. 2635–2642.

[13] Lin (K.Y.) et Wu (F.Y.). – Unidirectional convex polygons on the honeycomb lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 23, 1990, pp. 5003–5010.

[14] Temperley (H.N.V.). – Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules. *Phys. Rev.*, vol. 103, 1956, pp. 1–16.

[15] Viennot (X.G.). – A survey of polyominoes enumeration. *In : Actes du 4ème Colloque Séries Formelles et Combinatoire Algébrique*, éd. par Leroux (P.) et Reutenauer (C.), pp. 399–420. – Université du Québec à Montréal, 1992. Publications du LaCIM 11.