

# Kolam indiens, dessins sur le sable aux îles Vanuatu, courbe de Sierpinski et morphismes de monoïde

G. Allouche & J.-P. Allouche\*  
CNRS, LRI, Bâtiment 490  
F-91405 Orsay Cedex (France)  
`allouche@lri.fr`

J. Shallit  
School of Computer Science, University of Waterloo  
Waterloo, Ontario N2L 3G1 (Canada)  
`shallit@graceland.uwaterloo.ca`

## Résumé

Nous montrons que le tracé d'un kolam indien classique, que l'on retrouve aussi dans la tradition des dessins sur le sable aux îles Vanuatu, peut être engendré par un morphisme de monoïde. La suite infinie morphique ainsi obtenue est reliée à la célèbre suite de Prouhet-Thue-Morse, mais elle n'est  $k$ -automatique pour aucun entier  $k \geq 1$ .

## Abstract

We prove that the drawing of a classical Indian kolam (which one also finds in the tradition of drawings on the sand in the Vanuatu islands) can be described by a morphism of monoids. The corresponding infinite sequence is related to the celebrated Prouhet-Thue-Morse sequence, but it is not  $k$ -automatic for any integer  $k \geq 1$ .

## 1 Introduction

Lorsque l'un des auteurs (JPA) était enfant, il allait souvent voir sa mère (GA) en disant, comme les enfants de son âge, "Je m'ennuie". GA essayait alors de trouver quelque chose de nouveau et intéressant : parmi les innombrables suggestions et idées dont se souvient JPA se trouvait le dessin ci-dessous (figure 1). Le dessin – mathématico-ludique, un peu comme les ponts de Koenigsberg – devait être obtenu en tournant autour des 16 points du réseau carré représentés à la figure 1, sans lever le crayon. Le tracé sera expliqué plus précisément plus loin (voir paragraphe 2). GA se souvenait qu'elle avait pris connaissance de ce dessin de

---

\*avec le soutien partiel du MENESR, ACI NIM 154 Numération.

nombreuses années auparavant et qu'elle en avait découvert une généralisation (récursive) où les  $4 \times 4$  boucles étaient remplacées par  $2^N \times 2^N$  boucles (le cas  $N = 3$  est représenté figure 3).

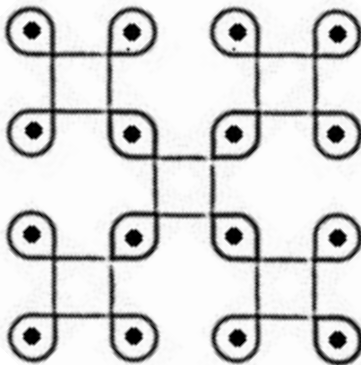


Figure 1

À la fin des années 70 ou au début des années 80, JPA trouva par hasard une référence sur les *kolam* indiens [35, p. 75], [37]. Les *kolam* (on trouve aussi la dénomination *rangoli*) sont des tracés traditionnels qui se présentent comme des dessins sur le sol réalisés avec de la farine de riz. Un de ces *kolam* (parfois appelé “serpent”) est représenté ci-dessous (figures 2 et 3). Les auteurs de [35] donnent une grammaire formelle de tableaux engendrant ces dessins. Les grammaires de ce type permettent le plus souvent d’obtenir le dessin global mais pas nécessairement le tracé, autrement dit elles ne donnent pas nécessairement un algorithme permettant le tracé “sans réfléchir”.

Plus récemment, lors d’une conférence au musée des arts d’Afrique et d’Océanie le 30 octobre 1997 intitulée “La logique de la longue ligne Vanuatu”, M. Chemillier présenta des dessins sur le sable aux îles Vanuatu (anciennement Nouvelles Hébrides) et en Angola, fort proches des *kolam* particuliers représentés ci-dessus. On pourra consulter :

<http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/marc/publi/vanuatu/ephemere.html>

(notons que le musée des arts d’Afrique et d’Océanie à Paris a vu ses collections déménager en 2002 pour le musée du quai Branly qui n’ouvrira pas avant 2006).

Toute une tradition de dessins artistiques et/ou rituels dans différents pays a été étudiée par Gerdes [16] et les dessins ci-dessous se retrouvent par exemple dans [16, vol. 3, p. 540–543, p. 580] (voir aussi [16, vol. 1, p. 64 et p. 226] et [16, vol. 2, p. 272]). On pourra consulter aussi les travaux d’Ascher (voir en particulier [9]).

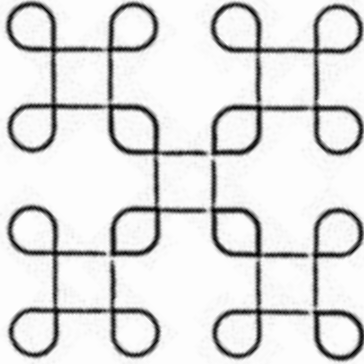


Figure 2 : Kolam  $4 \times 4$

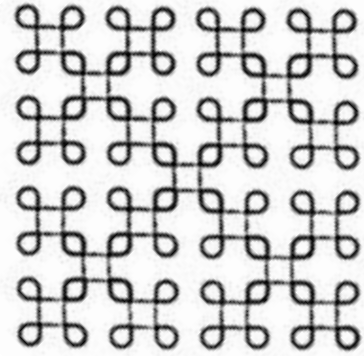


Figure 3 : Kolam  $8 \times 8$

Dans ce qui suit nous proposons de montrer que le tracé du dessin de la figure 1 généralisé aux carrés  $2^N \times 2^N$  peut s'obtenir à partir d'une suite morphique  $(u_n)_{n \geq 0}$  sur l'alphabet des points cardinaux  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  (pour en savoir plus sur les suites morphiques et les suites

automatiques, voir par exemple [5]). Cette suite peut-être recodée en une suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  sur l'alphabet des virages à droite ou à gauche  $\{G, D\}$ . Nous verrons que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est très liée à la célèbre suite de Prouhet-Thue-Morse (voir par exemple [4]). De plus les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  ne sont  $k$ -automatiques pour aucun  $k \geq 1$ .

## 2 Un morphisme de monoïde pour tracer le “kolam infini”

On peut coder le tracé des kolam  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$ , ... en spécifiant vers quel point cardinal on se dirige, étant sous-entendu qu'il faut contourner les  $2^n \times 2^n$  points du réseau ou qu'il faut dessiner des boucles autour d'eux suivant le cas (la situation est claire lors du tracé, mais elle est mieux expliquée dans la remarque 3 ci-dessous). Par exemple le tracé du kolam  $2 \times 2$  correspond aux instructions

$$\mathcal{S} \mathcal{E} \mathcal{N} \mathcal{O}$$

alors que le tracé du kolam  $4 \times 4$  correspond à

$$\mathcal{S} \mathcal{E} \mathcal{S} \mathcal{O} \mathcal{S} \mathcal{E} \mathcal{N} \mathcal{E} \mathcal{S} \mathcal{E} \mathcal{N} \mathcal{O} \mathcal{N} \mathcal{E} \mathcal{N} \mathcal{O} \mathcal{S} \mathcal{O} \mathcal{N} \mathcal{O}.$$

Dans le tracé du kolam  $2^n \times 2^n$ , l'on parcourt d'abord les points sous la diagonale principale et l'on applique ensuite une symétrie centrale par rapport au centre du carré formé par les  $2^n \times 2^n$  points. Cette symétrie se traduit par l'application qui échange  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{S}$  d'une part et  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{E}$  d'autre part. De plus l'examen des symétries du tracé pour entourer les points sous la diagonale principale montre comment passer du tracé pour les points sous la diagonale dans le kolam  $2^n \times 2^n$  aux points sous la diagonale dans le kolam  $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ . Ces remarques mènent aux définitions suivantes.

### Définition 1

- On note  $\varphi$  l'application de  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  dans lui-même définie par

$$\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{O}, \quad \varphi(\mathcal{N}) = \mathcal{E}, \quad \varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{S}, \quad \varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{N},$$

(de sorte que  $\varphi^2(\mathcal{N}) = \mathcal{S}$ ,  $\varphi^2(\mathcal{S}) = \mathcal{N}$ ,  $\varphi^2(\mathcal{E}) = \mathcal{O}$ ,  $\varphi^2(\mathcal{O}) = \mathcal{E}$ ).

- On définit les mots  $X_N, Y_N, Z_N$  sur l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  par :  $Z_1 := \mathcal{S}$  et pour tout  $N \geq 1$

$$Z_{N+1} := Z_N \mathcal{E} \mathcal{S} \varphi(Z_N) \mathcal{S} \varphi^3(Z_N) \mathcal{N} \mathcal{E} Z_N,$$

$$Y_N := Z_N \mathcal{E},$$

$$X_N := Y_N \varphi^2(Y_N) = Z_N \mathcal{E} \varphi^2(Z_N) \mathcal{O}.$$

- On note  $K_g(N)$  le kolam sur le carré  $2^N \times 2^N$  représenté ci-dessus dans les cas  $N = 2, 3$ . Le mot  $X_N$  est dit *mot du tracé de  $K_g(N)$* .

### Remarque 1

– Le mot  $Y_N$  est le préfixe de  $X_N$  de longueur moitié de celle de  $X_N$ . De plus le tracé finit toujours par  $\mathcal{O}$ .

– La relation qui donne  $Z_{N+1}$  en fonction de  $Z_N$  s'appelle une *formule localement caténative* (voir en particulier [28]). De plus  $Z_N$  étant un préfixe strict de  $Z_{N+1}$ , la suite de mots  $(Z_N)_{N \geq 1}$  tend vers une limite  $Z_\infty$  qui est une suite (infinie) sur l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$ . En fait cette suite est morphique. C'est l'objet du théorème suivant. La preuve de ce théorème reposera sur la relation de caténativité locale à laquelle satisfait la suite de mots  $(Z_N)$  mais on aura soin de remarquer qu'il n'y a pas équivalence en général entre caténativité locale et morphicité.

**Théorème 1** *Les suites de mots  $(X_N)$ ,  $(Y_N)$  et  $(Z_N)$  tendent vers une limite commune notée  $X_\infty$ . De plus la suite  $X_\infty$  est morphique. Plus précisément définissons le morphisme  $\Theta$  sur l'alphabet à 8 lettres  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  par*

$$\begin{aligned} \Theta(a_0) &:= a_0 \ \mathcal{E} \ \mathcal{S} \ a_1 \ \mathcal{S} \ a_3 \ \mathcal{N} \ \mathcal{E} \ a_0 \\ \Theta(a_1) &:= a_1 \ \mathcal{S} \ \mathcal{O} \ a_2 \ \mathcal{O} \ a_0 \ \mathcal{E} \ \mathcal{S} \ a_1 \\ \Theta(a_2) &:= a_2 \ \mathcal{O} \ \mathcal{N} \ a_3 \ \mathcal{N} \ a_1 \ \mathcal{S} \ \mathcal{O} \ a_2 \\ \Theta(a_3) &:= a_3 \ \mathcal{N} \ \mathcal{E} \ a_0 \ \mathcal{E} \ a_2 \ \mathcal{O} \ \mathcal{N} \ a_3 \\ \Theta(\mathcal{S}) &:= \mathcal{S} \\ \Theta(\mathcal{E}) &:= \mathcal{E} \\ \Theta(\mathcal{N}) &:= \mathcal{N} \\ \Theta(\mathcal{O}) &:= \mathcal{O} \end{aligned}$$

et définissons l'application  $p : \{a_0, a_1, a_2, a_3, \mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\} \rightarrow \{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  par

$$\begin{aligned} p(a_0) &:= p(\mathcal{S}) := \mathcal{S}, & p(a_1) &:= p(\mathcal{O}) := \mathcal{O}, \\ p(a_2) &:= p(\mathcal{N}) := \mathcal{N}, & p(a_3) &:= p(\mathcal{E}) := \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Alors

$$X_\infty = p(\Theta^\infty(a_0)).$$

*Démonstration.* Le mot  $Z_N$  étant un préfixe strict du mot  $Z_{N+1}$ , il est clair que la suite  $Z_N$  tend vers une limite qui est une suite infinie sur l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$ . La suite de mots  $Y_N$  et la suite de mots  $X_N$  tendent clairement vers la même limite que nous notons  $X_\infty$ .

Définissons alors les suites de mots  $(A_N)_{N \geq 1}$ ,  $(B_N)_{N \geq 1}$ ,  $(C_N)_{N \geq 1}$ ,  $(D_N)_{N \geq 1}$  sur l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  par

$$A_N := p(\Theta^{N-1}(a_0)), \quad B_N := p(\Theta^{N-1}(a_1)), \quad C_N := p(\Theta^{N-1}(a_2)), \quad D_N := p(\Theta^{N-1}(a_3)).$$

La définition du morphisme  $\Theta$  et de l'application  $p$  montre que

$$A_{N+1} = A_N \ \mathcal{E} \ \mathcal{S} \ B_N \ \mathcal{S} \ D_N \ \mathcal{N} \ \mathcal{E} \ A_N$$

et des relations analogues pour  $B_{N+1}, C_{N+1}, D_{N+1}$ . Il ne reste plus qu'à constater que les suites de mots  $(Z_N)$ ,  $(\varphi(Z_N))$ ,  $(\varphi^2(Z_N))$ ,  $(\varphi^3(Z_N))$  satisfont respectivement aux mêmes relations et que leurs valeurs respectives pour  $N = 1$  sont égales aux valeurs respectives de  $A_1, B_1, C_1, D_1$  pour conclure que, quel que soit  $N \geq 1$ , l'on a  $(A_N, B_N, C_N, D_N) = (Z_N, \varphi(Z_N), \varphi^2(Z_N), \varphi^3(Z_N))$ .  $\square$

**Remarque 2** Les suites de mots  $(X_N)$ ,  $(Y_N)$  et  $(Z_N)$  tendent vers la même limite  $X_\infty$ . Cependant la suite de mots  $(Z_N)$  a la propriété que chacun des  $Z_N$  est un préfixe de  $X_\infty$  : plus précisément la longueur  $\ell_N$  de  $Z_N$  satisfait à  $\ell_{N+1} = 4\ell_N + 5$  donc  $Z_N$  est le préfixe de longueur  $\frac{2 \cdot 4^n - 5}{3}$  de  $X_\infty$  et, bien sûr,  $X_N$  s'en déduit par  $X_N = Z_N \mathcal{E} \varphi^2(Z_N) \mathcal{O}$ .

Nous allons recoder la suite  $X_N$  et obtenir un lien inattendu entre le tracé de  $K_g(N)$  et la célèbre suite de Prouhet-Thue-Morse (pour cette suite voir par exemple [4]).

**Définition 2** Posons  $X_\infty := (u_n)_{n \geq 0}$ . Notons  $\psi$  l'application de l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}^2$  vers l'alphabet  $\{G, D\}$  définie par

$$\begin{aligned} \psi((\mathcal{S}, \mathcal{E})) &:= \psi((\mathcal{N}, \mathcal{O})) &:= \psi((\mathcal{O}, \mathcal{S})) &:= \psi((\mathcal{E}, \mathcal{N})) &:= G \\ \psi((\mathcal{S}, \mathcal{O})) &:= \psi((\mathcal{N}, \mathcal{E})) &:= \psi((\mathcal{E}, \mathcal{S})) &:= \psi((\mathcal{O}, \mathcal{N})) &:= D \end{aligned}$$

On définit alors la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  sur l'alphabet  $\{G, D\}$  par

$$v_n := \psi((u_n, u_{n+1}))$$

**Théorème 2** La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est point fixe du morphisme  $\lambda$  défini sur l'alphabet  $\{G, D\}$  par

$$\lambda(G) := GDD, \quad \lambda(D) := G.$$

*Démonstration.* La relation localement caténative à laquelle satisfait la suite de mots  $(Z_N)$  et la remarque que  $Z_N$  (respectivement  $\varphi(Z_N)$ ,  $\varphi^2(Z_N)$ ,  $\varphi^3(Z_N)$ ) commence et finit par la lettre  $\mathcal{S}$  (respectivement  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{E}$ ), jointes à l'observation que pour tout  $\alpha$  et tout  $\beta$  appartenant à  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  l'on a  $\psi(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = \psi(\alpha, \beta)$ , montrent que la suite de mots  $V_N$  définie pour  $N \geq 2$  par

$$V_N := v_0 v_1 \cdots v_{\frac{2 \cdot 4^N - 11}{3}}$$

satisfait à la relation localement caténative

$$V_{N+1} = V_N G D D V_N G G V_N G D D V_N.$$

Notons que  $V_2 = G D D G G G D D$ . Définissons alors, pour  $N \geq 2$ , les mots  $E_N$  et  $F_N$  par

$$E_N := V_N G D D, \quad F_N := V_N G G.$$

La relation entre  $V_N$  et  $V_{N+1}$  donne

$$E_{N+1} := E_N F_N E_N E_N, \quad F_{N+1} := E_N F_N E_N F_N.$$

On en déduit sans peine, par récurrence sur  $N$ , que

$$(E_N, F_N) = (\lambda^{2^N - 1}(G), \lambda^{2^N - 1}(DD)).$$

Ceci montre en particulier que la suite de mots  $(E_N)$  tend vers le point fixe de  $\lambda$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . Mais alors la suite de mots  $V_N$  tend vers cette même limite.  $\square$

**Remarque 3** Comme nous l'a fait remarquer S. Laplante il y a une différence dans le tracé du kolam  $K_g(N)$  suivant que l'on tourne à gauche ou à droite : dans le premier cas ( $G$ ) on trace une boucle autour du point du réseau carré sous-jacent, dans le second cas ( $D$ ) on se contente de contourner ce point.

La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est point fixe itératif d'un morphisme. On peut se demander si cette suite n'est pas  $k$ -automatique pour un certain entier  $k \geq 1$ , c'est-à-dire si elle n'est pas l'image lettre à lettre d'une suite, sur un alphabet peut-être plus gros, qui soit point fixe itératif d'un morphisme uniforme de longueur  $k$ . Nous prouvons ci-dessous qu'il n'en est rien.

### 3 Non-automaticité de la suite du tracé de kolam

Le but de ce paragraphe est de prouver la non-automaticité de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  du tracé du kolam sur l'alphabet  $\{\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{N}, \mathcal{O}\}$  et de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  du tracé du kolam sur l'alphabet  $\{G, D\}$ .

#### 3.1 Énoncé du résultat et réduction du problème

**Théorème 3** *Les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont morphiques (c'est-à-dire images lettre à lettre de point fixe itératif de morphisme), mais elles ne sont  $k$ -automatiques pour aucune valeur de  $k \geq 1$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème 1 la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est morphique. De plus, d'après le théorème 2, la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est point fixe itératif de morphisme, donc morphique. Si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  était  $k$ -automatique, alors, d'après la définition des suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  et de l'application  $\psi$ , et les propriétés de stabilité des suites automatiques (voir par exemple [5]), la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  serait aussi  $k$ -automatique. Or cette suite est point fixe du morphisme  $\lambda$  qui est primitif. Elle est donc uniformément récurrente. Si elle était  $k$ -automatique pour un entier  $k$ , il existerait un morphisme uniforme de longueur  $k$  sur un certain alphabet  $\mathcal{A}$ , un point fixe itératif de ce morphisme,  $(v'_n)_{n \geq 0}$ , et une application  $\pi$  de  $\mathcal{A}$  dans l'alphabet  $\{G, D\}$  telle que pour tout  $n$  l'on ait  $\pi(v'_n) = v_n$ . D'après un théorème de [14] on peut choisir la suite  $(v'_n)_{n \geq 0}$  et le morphisme uniforme qui l'engendre de manière que ce morphisme soit primitif. Comme la valeur propre dominante de la matrice d'incidence de  $\lambda$  est 2, il résulte alors d'un théorème de [15] que  $k$  doit être une puissance de 2. Il suffit donc de montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  n'est pas 2-automatique. C'est l'objet du théorème 5 ci-dessous.  $\square$

#### 3.2 Étude de la suite $(d_n)_{n \geq 0}$

Si l'on remplace l'alphabet  $\{G, D\}$  par l'alphabet  $\{2, 1\}$ , le morphisme  $\lambda$  du théorème 2 devient  $2 \rightarrow 211, 1 \rightarrow 2$ . La suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est remplacée par le point fixe itératif de ce morphisme  $2112221 \cdots$ , suite qui code les longueurs des blocs successifs de 0 et de 1 (sauf le premier zéro) dans la suite de Thue-Morse ; si l'on garde le premier zéro, la suite des longueurs des blocs est la suite  $12112221 \cdots$  qui est point fixe du morphisme  $1 \rightarrow 121, 2 \rightarrow 12221$ ,

(voir par exemple [3, p. 307] ou [29, p. 354] ; notons que ce résultat peut s'obtenir aisément à partir d'une relation localement caténative pour les préfixes de la suite de Thue-Morse de longueur  $4^N$ ). Cette suite a été introduite dans [11] pour énumérer les facteurs de la suite de Thue-Morse. Notre objectif est de montrer que le point fixe itératif de  $1 \rightarrow 121, 2 \rightarrow 12221$  n'est pas 2-automatique.

**Définition 3** On note  $h$  le morphisme défini sur l'alphabet  $\{1, 2\}$  par  $h(1) := 121, h(2) := 12221$ , et  $(d_n)_{n \geq 0}$  le point fixe de  $h$ .

**Lemme 1** Posons, pour tout  $n \geq 0$ ,  $h^n(1) = 1S_n = T_n1$  où  $S_n$  et  $T_n$  sont des mots sur l'alphabet  $\{1, 2\}$ . Alors  $S_{n+1} = 21h(S_n)$ ,  $T_{n+1} = h(T_n)12$  et  $h^n(2) = T_n2S_n$ .

*Démonstration.* Immédiate.

**Définition 4** On définit la suite d'entiers  $(V_n)_{n \geq 0}$  par  $V_0 := 0, V_1 := 1$ , et, pour tout  $n \geq 2$ ,  $V_n := V_{n-1} + 2V_{n-2}$ .

Si les  $x_i$  valent 0 ou 1, on note  $[x_k x_{k-1} \cdots x_1]_V = n$  si  $n = \sum_{1 \leq k \leq t} x_k V_k$ .

**Remarque 4** La suite  $(V_n)_{n \geq 0} = 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, \dots$  a été étudiée dans [12].

**Lemme 2** La suite  $(V_n)_{n \geq 0}$  a les propriétés suivantes.

(i) Pour tout  $n \geq 0$  on a  $V_n = (2^n - (-1)^n)/3$  et  $V_{n+1} = 2V_n + (-1)^n$ .

(ii) Pour tout  $n \geq 0$  la longueur du mot  $h^n(1)$  est égale à  $V_{2n+1}$  et la longueur du mot  $h^n(2)$  est égale à  $V_{2n+2}$ .

(iii) Pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$V_n = \begin{cases} 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-5} - \dots - 2^1 - 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-5} - \dots - 2^0, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(iv) Pour tout entier  $n \geq 1$  on a

$$\sum_{0 \leq k < n} V_k = \begin{cases} V_n, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ V_n - 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Les démonstrations sont immédiates.  $\square$

**Lemme 3** Tout entier  $n \geq 1$  s'écrit, et de manière unique, sous la forme

$$n = \sum_{1 \leq k \leq t} x_k V_k = [x_k x_{k-1} \cdots x_1]_V$$

où le mot  $x_k x_{k-1} \cdots x_1$  est composé de lettres 0 et 1, commence par un 1 et finit par un nombre pair (qui peut être nul) de 1.

*Démonstration.*

a) Nous montrons d'abord l'existence d'une telle représentation. On a  $[10]_V = 1$  et  $[11]_V = 2$ . Supposons que tous les entiers  $n$  tels que  $1 \leq n < V_k$  aient une telle représentation, et soit  $n \in [V_k, V_{k+1}[$ . Comme  $V_k = [10^{k-1}]_V$ , on peut supposer que  $n$  appartient à  $]V_k, V_{k+1}[$ . Soit  $m := n - V_k$ . On a  $m \leq V_k$  (lemme 2 (i)). Si  $m = V_k$ , alors  $n = 2V_k$  et  $k$  est pair (lemme 2 (iv)) ; on a alors  $n = [1^k]_V$ . On peut donc supposer que  $m < V_k$ . D'après l'hypothèse de récurrence, l'entier  $m$  admet une représentation  $m = [x_\ell x_{\ell-1} \cdots x_1]_V$  qui commence par 1 et finit par un nombre pair de 1. Collons  $10^{k-1-\ell}$  en tête de cette représentation obtenant ainsi une représentation de longueur  $k$  de l'entier  $m + V_k = n$ . Cette représentation commence par 1 et elle finit par un nombre pair de 1, sauf peut-être si elle ne comprend que des 1, en nombre impair ; dans ce cas on aurait  $n = V_1 + V_2 + \cdots + V_k = V_{k+1}$  (d'après le lemme 2 (iv)), alors qu'on a supposé  $n \in ]V_k, V_{k+1}[$ .

b) Nous montrons l'unicité d'une telle représentation. Comme il y a  $V_{n+1} - V_n$  entiers dans l'intervalle  $[V_n, V_{n+1}[$ , autrement dit  $V_{n+1} - V_n$  entiers s'écrivant, d'après ce qui précède, d'au moins une manière sous la forme  $[x_n x_{n-1} \cdots x_1]_V$  avec les  $x_i$  égaux à 0 ou 1,  $x_k = 1$  et le mot  $x_n x_{n-1} \cdots x_1$  finissant par un nombre pair de 1, il suffit de montrer que le nombre de tels mots est égal à  $V_{n+1} - V_n$  pour conclure à l'unicité de ces écritures.

Combien y a-t-il de mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$  qui commencent par 1 et finissent par un nombre pair de 1 ? On enlève des  $2^{n-1}$  mots de longueur  $n$  qui commencent par 1 et finissent par un nombre impair de 1, par 01, par 0111, par 011111, etc. obtenant ainsi

$$\begin{cases} 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-5} - \cdots - 2^0 - 1, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{n-1} - 2^{n-3} - 2^{n-5} - \cdots - 2^1, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

D'après le lemme 2 (iii), ceci vaut  $V_n - 1$  si  $n$  est impair et  $V_n + 1$  si  $n$  est pair, c'est-à-dire exactement  $V_{n+1} - V_n$ .  $\square$

**Théorème 4** *La suite  $(d_n)_{n \geq 0} = h^\infty(1)$  peut être caractérisée par :  $d_n = 1$  si et seulement si  $n = 0$  ou  $n = [x_k x_{k-1} \cdots x_1]_V$  où les  $x_i$  valent 0 ou 1,  $x_k = 1$  et le mot  $x_k x_{k-1} \cdots x_1$  finit par un nombre pair non nul de 0 ou un nombre pair non nul de 1.*

*Démonstration.* Le résultat est vrai pour  $n = 0, 1, 2$ . Supposons qu'il soit vrai pour les entiers  $n < V_{2k+1}$ , et soit  $n$  un entier tel que  $V_{2k+1} \leq n < V_{2k+3}$ . Comme  $(d_n)_{n \geq 0} = h^\infty(1)$  et que, en rappelant que  $h^k(1) = 1S_k = T_k 1$ , on a  $h^{k+1}(1) = h^k(121) = h^k(1)T_k 2S_k h^k(1)$  (lemme 1), on obtient en comparant les longueurs et en utilisant le lemme 2 (ii)

- (a)  $d(n) = d(n - V_{2k+1})$  si  $n$  est tel que  $V_{2k+1} \leq n < V_{2k+2}$ ,
- (b)  $d(V_{2k+2}) = 2$ ,
- (c)  $d(n) = d(n - V_{2k+2})$  si  $n$  est tel que  $V_{2k+2} < n < V_{2k+2} + V_{2k+1}$ ,
- (d)  $d(n) = d(n - (V_{2k+2} + V_{2k+1}))$  si  $n$  est tel que  $V_{2k+2} + V_{2k+1} \leq n < V_{2k+3}$ .

Dans le cas (a) on colle en tête de la représentation de  $n - V_{2k+1}$  le mot  $10 \cdots 0$  pour obtenir une représentation de  $n$  de longueur  $2k + 1$ . La seule possibilité à examiner qui ne soit pas immédiate est si le mot qui représente  $n - V_{2k+1}$  est composé de  $2k$  lettres égales à 1 ; mais cela signifierait, d'après le lemme 2 (iv) que  $n = V_{2k+1} + (V_{2k} + \cdots + V_1) = V_{2k+2}$ , ce qui n'est pas.

Dans le cas (b)  $n$  a pour représentation  $[10^{2k+1}]_V$ , qui finit par un nombre impair de 0.

Dans le cas (c) on colle en tête de la représentation de  $n - V_{2k+2}$  le mot  $10 \cdots 0$  (avec un nombre non nul de 0) pour obtenir une représentation de  $n$  de longueur  $2k + 2$ . Il est clair que ceci ne change pas le nombre de 0 ou de 1 en queue de la représentation de  $n - V_{2k+2}$ .

Dans le cas (d), on colle en tête de la représentation de  $n - (V_{2k+2} + V_{2k+1})$  le mot  $110 \cdots 0$  pour obtenir une représentation de  $n$  de longueur  $2k + 2$ . Il est clair que la parité du nombre de 0 en fin de représentation n'a pas changé. La seule possibilité à examiner est si la représentation de  $n - (V_{2k+2} + V_{2k+1})$  est composée uniquement de 1, mais dans ce cas celle de  $n$  s'obtient en collant en tête deux 1 ce qui ne change pas la parité du nombre de 1.  $\square$

**Lemme 4** Définissons l'entier  $b(k, n)$  pour  $k \geq 1$  et  $n \geq 0$  par

$$b(k, n) := [(10^{2k-1})^n]_V = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{4^{jk} - 1}{3} = \frac{4^{k(n+1)} - 4^k}{3(4^k - 1)} - \frac{n}{3}.$$

Alors on a  $b(k, n) = 4^k b(k, n-1) + \frac{4^k - 1}{3}$  pour  $n \geq 1$ , et pour tout  $k \geq 1$ , on a  $\frac{4^k - 1}{3} \mid b(k, n)$ . De plus on a

(a)  $d(b(k, n)) = 2$  pour tout  $k \geq 1$  et tout  $n \geq 0$ ,

(b)  $d(b(k, n) - (b(k, r) + 2\frac{4^k - 1}{3})) = 1$  pour tout  $r, k \geq 1$  et pour tout  $n$  assez grand,

(c) pour tout  $k \geq 1$ , pour tout  $c \geq 0$ , et pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i < 4^c$ , il existe une infinité de  $r \geq 0$  tels que  $b(k, r) \equiv i \pmod{4^c}$ .

*Démonstration.* Les premières assertions sont triviales. Les assertions (a) et (b) résultent facilement du théorème 4 et des représentations

$$\begin{aligned} b(k, n) &= [(10^{2k-1})^n]_V \\ b(k, r) &= [(10^{2k-1})^r]_V \\ b(k, n) - b(k, r) &= [(10^{2k-1})^{n-r} (0^{2k})^r]_V = [(10^{2k-1})^{n-r-1} (10^{2k-1}) (1^{2k})^r]_V \\ b(k, n) - b(k, r) - 2 \cdot \frac{4^k - 1}{3} &= [(10^{2k-1})^{n-r-1} (01^{2k-1}) (1^{2k})^{r-1} 0^{2k}]_V \end{aligned}$$

Pour montrer l'assertion (c), il suffit de prendre  $r \geq \frac{c}{k} - 1$  qui satisfasse à la congruence  $r \equiv -4^k(4^k - 1)^{-1} - 3i \pmod{4^c}$ .  $\square$

Nous pouvons alors prouver notre résultat de non-automaticité de la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  (donc bien sûr de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$ ).

**Théorème 5** La suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  n'est pas 2-automatic.

*Démonstration.* Il suffit (voir [5] par exemple) de montrer que le 2-noyau de la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$ , c'est-à-dire l'ensemble des sous-suites  $\{(d_{2^a n + b})_{n \geq 0}, a \geq 0, b \in [0, 2^a - 1]\}$  n'est pas un ensemble fini. Nous allons montrer que pour tous les entiers  $c, c'$  tels que  $0 \leq c < c'$ , les suites  $(d(4^c n)_{n \geq 0})$  et  $(d(4^{c'} n)_{n \geq 0})$  sont distinctes.

Définissons l'entier  $k \geq 1$  par  $k := c' - c$ . Soit  $i = (1 - 2 \cdot 4^k)3^{-1} \pmod{4^c}$ . D'après le lemme 4 (c), il existe une infinité d'entiers  $r$  tels que  $b(k, r) \equiv (1 - 2 \cdot 4^k)3^{-1} \pmod{4^c}$ . Posons  $\ell := 2 + \frac{b(k, r)}{(4^k - 1)/3}$ . D'après le lemme 4,  $j$  est un entier. De plus, en prenant  $r$  assez grand on peut faire en sorte que  $k\ell \geq c$ . On en déduit sans peine que  $b(k, \ell - 1) \equiv 0 \pmod{4^c}$ . Or, en utilisant le lemme 4 (a), on a  $d(b(k, \ell - 1)) = 2$ . Par ailleurs

$$\begin{aligned} 4^k b(k, \ell - 1) &= b(k, \ell) - \frac{4^k - 1}{3} \ell \\ &= b(k, \ell) - \frac{4^k - 1}{3} \left( 2 + \frac{b(k, r)}{\frac{4^k - 1}{3}} \right) \\ &= b(k, \ell) - 2 \cdot \frac{4^k - 1}{3} - b(k, r). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4 (b), on a donc  $d(4^k b(k, \ell - 1)) = 1$ .

En posant finalement  $j = b(k, \ell - 1)/4^c$  (c'est un entier), on a donc  $d(4^c j) = 2$  alors que  $d(4^{c'} j) = 1$ .  $\square$

**Remarque 5** Le 2-noyau de la suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  n'est pas fini mais certains de ses éléments sont bizarrement "assez proches" comme le montrent les exemples numériques suivants :

$$\begin{aligned} \min\{n \geq 0, d(16n + 1) \neq d(8n + 1)\} &= 57 \\ \min\{n \geq 0, d(32n) \neq d(8n)\} &= 14563 \\ \min\{n \geq 0, d(32n + 21) \neq d(8n + 5)\} &= 29127 \\ \min\{n \geq 0, d(64n + 1) \neq d(16n + 1)\} &= 1864135 \\ \min\{n \geq 0, d(64n) \neq d(16n)\} &= 119304647. \end{aligned}$$

## 4 Miscellanées et conclusion

La suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  a été introduite dans [11] pour énumérer les facteurs de la suite de Thue-Morse. Cette suite ou sa première décalée  $(d_n)_{n \geq 1}$  apparaît aussi dans [31] et [1]. Une occurrence inattendue de cette suite dans l'étude du quotient de récurrence des suites sturmiennes se trouve dans [13] où apparaît la fraction continuée  $\rho := [2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, \dots]$ . (Notons que  $\rho$  est transcendant [2].)

La géométrie du kolam  $K_g(N)$  étudié ci-dessus est la même que celle de la courbe de Sierpinski [32, 33]. On peut engendrer cette courbe de la même manière, nous nous contenterons de donner le dessin suivant (figure 4).

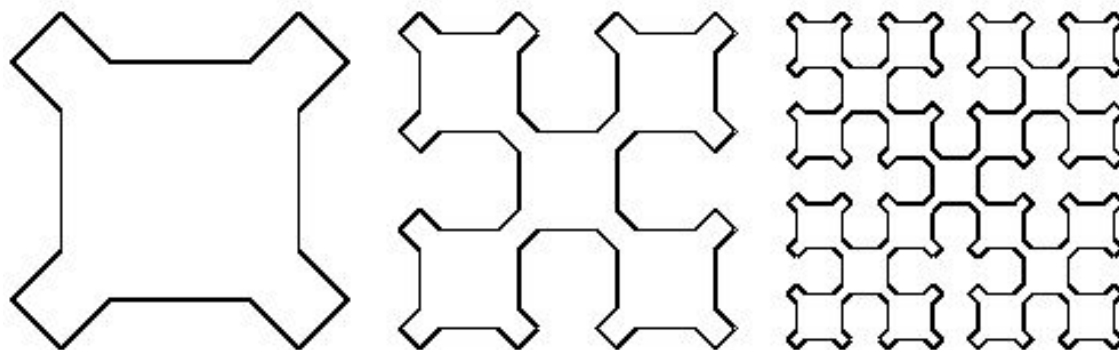


Figure 4

Notons que, curieusement, cette courbe de Sierpinski peut être utilisée dans le problème du voyageur de commerce (voir [21], voir aussi [20]).

Les dessins engendrés par grammaires ou par morphismes (comme ci-dessus ou en utilisant les morphismes différemment) sont nombreux dans la littérature en mathématiques ou en informatique théorique. Citons par exemple [10, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 34, 35, 36, 37].

En conclusion nous voudrions souligner qu’une discipline relativement nouvelle, appelée *ethnomathématique* s’intéresse aux activités artistiques (arts plastiques, musique) et/ou rituelles chez des peuples parfois qualifiés à tort ou à raison de “peuples sans écriture”, sous l’angle des mathématiques qui sont – ou que l’on peut trouver – derrière. Nous nous contenterons ici de suggérer quelques références qui permettent une première approche de ce domaine [6, 7, 8, 9, 16, 17, 18].

## 5 Remerciements

JPA tient à remercier chaleureusement A. Belotserkovets, M. Chemillier, A. Frid et S. Laplante pour de nombreuses et bien intéressantes discussions.

## Références

- [1] J.-P. Allouche, A. Arnold, J. Berstel, S. Brlek, W. Jockusch, S. Plouffe, B. E. Sagan, A relative of the Thue-Morse sequence, *Discrete Math.* **139** (1995) 455–461.
- [2] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions, *J. Number Theory* **91** (2001) 39–66.
- [3] J.-P. Allouche, M. Mendès France, Automata and automatic sequences, *in* Beyond quasicrystals (Les Houches, 1994), F. Axel, D. Gratias, (eds.), Springer/Les Éditions de Physique, 1995, pp. 293–367.
- [4] J.-P. Allouche, J. Shallit, The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence, *in* Sequences and Their Applications, Proceedings of SETA’98, C. Ding, T. Helleseth and H. Niederreiter (eds.), Springer, 1999, pp. 1–16.

- [5] J.-P. Allouche, J. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [6] M. Ascher, Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas. Brooks/Cole Publishing Co., Pacific Grove, CA, and Chapman & Hall, New York, 1991.
- [7] M. Ascher, Mathématiques d'ailleurs. Nombres, formes et jeux dans les sociétés traditionnelles, avec une postface de K. Chemla et S. Pahaut, Le Seuil, Paris, 1998.
- [8] M. Ascher, Mathematics Elsewhere: An Exploration of Ideas Across Cultures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- [9] M. Ascher, Les figures de kolam en Inde du sud, *in* Dossier Pour La Science, Mathématiques Exotiques, 2005, pp. 53–57.
- [10] A. Belotserkovets, Propriétés combinatoires de suites symboliques qui codent des courbes de Péano [en russe], Mémoire de Master, Université de Novosibirsk, 2003.
- [11] S. Brlek, Enumeration of factors in the Thue-Morse word, *Discrete Appl. Math.* **24** (1989) 83–96.
- [12] L. Carlitz, R. Scoville, V. E. Hoggatt, Jr., Representations for a special sequence, *Fibonacci Quart.* **10** (1972) 499–518, 550.
- [13] J. Cassaigne, Limit values of the recurrence quotient of Sturmian sequences, *Theoret. Comput. Sci.* **218** (1999) 3–12.
- [14] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972) 164–192.
- [15] F. Durand, A generalization of Cobham's theorem, *Theory Comput. Syst.* **31** (1998) 169–185.
- [16] P. Gerdes, Une tradition géométrique en Afrique, les dessins sur le sable, I, II & III, L'Harmattan, 1995.
- [17] P. Gerdes, Ethnomathematics as a new research field, illustrated by studies of mathematical ideas in African history, *in* Science and Cultural Diversity. Filling a Gap in the History of Science. Cuadernos de Quipu No. 5. México, J. J. Saldaña (et al.), éd., IASCUD, International Association for Science and Cultural Diversity, 2001.  
<http://iascud.univalle.edu.co/indicelibro.htm>
- [18] R. W. Hall, A course in multicultural mathematics, Primus, à paraître.
- [19] S. Kitaev, T. Mansour, P. Séébold, Generating the Peano curve and counting occurrences of some patterns, *J. Autom. Lang. Comb.* **9** (2004) 439–455.
- [20] M. G. Norman, P. Moscato, The euclidean traveling salesman problem and a space-filling curve, *Chaos, Solitons and Fractals* **6** (1995) 389–397.

- [21] L. K. Platzman, J. J. Bartholdi III, Spacefilling curves and the planar travelling salesman problem, *J. Assoc. Comput. Mach.* **36** (1989) 719–737.
- [22] P. Prusinkiewicz, F. F. Samavati, C. Smith, R. Karwowski, L-System description of subdivision curves, *Int. J. Shape Model.* **9** (2003) 41–59.
- [23] A. Rosenfeld, R. Siromoney, Picture languages: a survey, *Languages of Design* **1** (1993) 229–245.
- [24] O. Salon, Suites automatiques à multi-indices, *Sém. Théor. Nombres Bordeaux*, (1986-1987), Exposé 4, 4-01-4-27; suivi par un appendice par J. Shallit, 4-29A-4-36A.
- [25] P. Séébold, K. Slowinski, The shortest way to draw a connected picture, *Computer Graphics Forum* **10** (1991) 319–327.
- [26] P. Séébold, The Peano curve and iterated morphisms, 10èmes Journées Montoises d’Informatique Théorique, Liège (Belgique), (09/2004), Rapport ULg - Institut de Mathématiques 04.006, pp. 338–351.
- [27] P. Séébold, Tag-systems for the Hilbert curve, *J. Autom. Lang. Comb.*, à paraître.
- [28] J. Shallit, A generalization of automatic sequences, *Theoret. Comput. Sci.* **61** (1988) 1–16.
- [29] J. Shallit, Automaticity IV: sequences, sets, and diversity, *J. Théorie Nombres, Bordeaux* **8** (1996) 347–367.
- [30] J. Shallit, J. Stolfi, Two methods for generating fractals, *Computers and Graphics* **13** (1989) 185–191.
- [31] J. Tamura, Some problems having their origin in the power series  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{[an]}$ , *in Reports of the meeting on analytic theory of numbers and related topics*, (Gakushuin University, 1992), pp. 190–212.
- [32] W. Sierpinski, Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, *C. R. Acad. Sci.* **160** (1915) 302–305.
- [33] W. Sierpinski, Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, *C. R. Acad. Sci.* **162** (1916) 629–632.
- [34] G. Siromoney, R. Siromoney, Rosenfeld’s cycle grammars and kolam, *in Graph grammars and their application to computer science*, H. Ehrig, M. Nagl, A. Rosenfeld, G. Rozenberg, editors, Third International Workshop, *Lect. Notes Comput. Sci.* **291**, Springer, 1987, pp. 564–579.
- [35] G. Siromoney, R. Siromoney, K. Krithivasan, Array grammars and kolam, *Computer Graphics and Image Processing* **3** (1974) 63–82.

- [36] G. Siromoney, R. Siromoney, T. Robinsin, Kambi kolam and cycle grammars, *in* A perspective in theoretical computer science – commemorative volume for Gift Siromoney, R. Narasimhan, ed., Series in Computer Science **16**, World Scientific, Singapore, 1989, pp. 267–300.
- [37] R. Siromoney, K. G. Subramanian, Space-filling curves and infinite graphs, in Graph-grammars and their application to computer science, 2nd int. Workshop, Haus Ohrbeck/Ger. 1982, Lect. Notes Comput. Sci. **153** (1983), Springer, pp. 380–391.