

Programmation Linéaire

Cédric BENTZ
Maître de conférences UPSud

Polytech Paris-Sud
3ème année INFO
2011-2012

<http://www.lri.fr/~bentz/supports/PL.html>

Organisation du cours

- Format de l'UE :
 - 12h de cours : C. B. (LRI, UPSud)
 - 12h de TD (2 groupes) :
 - Pierre Le Bodic (LRI, UPSud)
 - Maxime Delorme (LIMSI, UPSud)
- Evaluation :
 - CC (partiel(s)) = 40% de la note
 - Examen final sur table (2h) = 60% de la note
- Pré-requis :
 - Maths de base (pré-bac), notions d'algorithmique

Plan du cours (1/2)

- Introduction
 - Définitions, mise sous forme standard ou canonique
 - Modélisation, linéarisation
 - Résolution graphique
- Résolution par l'algorithme du simplexe
 - Description à l'aide de dictionnaires
 - Dégénérescences et cyclage
 - Initialisation (méthode des deux phases)

Plan du cours (2/2)

- Dualité
 - La dualité : point de vue économique
 - Théorèmes de dualité
 - Théorèmes de dualité : dualité faible et dualité forte
 - Théorème des écarts complémentaires
 - Interprétation économique des variables duales
 - Analyse de sensibilité
- Liens avec la programmation mathématique
 - Optimalité locale et méthodes de descente
 - Problèmes d'optimisation convexe

Bibliographie

- **Ouvrages en français :**
 - *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. M. Minoux. (DUNOD).
 - *Graphes et algorithmes*. Gondran, M. (EYROLLES).
 - *Précis de recherche opérationnelle*. R. Faure, B. Lemaire, C. Picouleau. (DUNOD).
- **Ouvrages en anglais :**
 - *Linear Programming*. V. Chvatal. (FREEMAN).
 - *Theory of linear and integer programming*. A. Schrijver. (WILEY).

Programmation Linéaire

Première partie :

Le modèle de la
Programmation Linéaire
et sa résolution graphique

La programmation linéaire (PL) en 2 mots et 3 slides (1/3)

- Origines militaires de la PL :
 - G. Dantzig, conseiller scientifique à la *U.S. Air Force*, met au point la méthode du simplexe pour résoudre des PL en 1947
 - Le terme « programmation » fait ici référence à l'« organisation » d'opérations militaires et à leur « planification » (et non au sens informatique usuel)
- Puis, extension au domaine « civil » grâce à
 - L'essor des connaissances dans le domaine,
 - L'amélioration de la puissance de calcul des CPU.

La programmation linéaire (PL) en 2 mots et 3 slides (2/3)

- Aussi appelée **Optimisation linéaire**
 - Car on cherche à **optimiser** (min/max) une **fonction linéaire** sous des **contraintes linéaires**
 - Cas particulier de la programmation mathématique (fonction à optimiser et contraintes quelconques)
- Utilisation optimale de ressources limitées ?
 - Problèmes fréquents dans l'industrie : FT, EDF, GDF, SNCF, RATP, Air France, etc.
 - La PL peut être vue comme un des moyens de résoudre certains de ces problèmes

La programmation linéaire (PL) en 2 mots et 3 slides (3/3)

- PL = technique de résolution de problèmes :

Modélisation par un Programme Linéaire (PL) :

- Modèle assez générique,
- Permet de capturer de nombreux problèmes concrets.
- Phase initiale absolument indispensable !



Résolution par des algo. dédiés efficaces en théorie et/ou en pratique

- Plus efficaces que des algorithmes génériques de Prog. Math.,
- Par ex. : algorithme du simplexe, points intérieurs, ellipsoïdes, etc.

Solveurs rapides maintenant disponibles, basés sur ces algorithmes

- Par exemple : CPLEX, LPSolve, Xpress, Excell...
- Intégration aisée dans tout type d'applications (Java, C++, C, C#...)

Un exemple introductif (1/5)

- Un brasseur doit décider de son plan de fabrication de bière. Il peut fabriquer :
 - Bière blonde (prix de vente : 15 euros par UV)
 - Bière brune (prix de vente : 25 euros par UV)
- 3 ingrédients sont à disposition, présents en quantités différentes dans les deux bières :
 - Maïs
 - Houblon
 - Malt

Un exemple introductif (2/5)

- Quantités requises (par UV) :
 - Bière blonde : 2.5 kg de maïs, 125 g de houblon, 17.5 kg de malt
 - Bière brune : 7.5 kg de maïs, 125 g de houblon, 10 kg de malt
- Le brasseur dispose, après achat, de ces quantités de matières premières (MP) :
 - 240 kg de maïs
 - 5 kg de houblon
 - 595 kg de malt

Un exemple introductif (3/5)

- Problématique du brasseur ?
 - Maximiser son bénéfice
 - Calcul du bénéfice ?
 - Revenus de la vente des 2 types de bières - Prix d'achat des matières premières
- Il « suffit » donc de maximiser son revenu
 - Comment ? Autrement dit, quelles quantités (en UV) de chaque bière fabriquer ?

Un exemple introductif (4/5)

- Formulation du problème
 - **Variables**
 - $x_1 \geq 0$ est le nb d'UV de bière blonde fabriquées
 - $x_2 \geq 0$ est le nb d'UV de bière brune fabriquées
 - **Objectif** : maximiser le revenu
 - Revenu = revenu b. blonde + revenu b. brune
 - **Contraintes** de quantité sur les MP disponibles
 - Utiliser au plus 240 kg de maïs (en kg)
 - Utiliser au plus 5 kg de houblon (en g)
 - Utiliser au plus 595 kg de malt (en kg)

Un exemple introductif (5/5)

- Modèle mathématique obtenu (PL)

$\max 15 x_1 + 25 x_2$ } **Maximiser** une fonction **linéaire** en x_1 et x_2

sous contraintes :

$$x_1 + 3 x_2 \leq 96 \text{ (maïs) //en divisant par 2.5}$$

$$x_1 + x_2 \leq 40 \text{ (houblon) //en divisant par 125}$$

$$7 x_1 + 4 x_2 \leq 238 \text{ (malt) //en divisant par 2.5}$$

} 3 **contraintes**
linéaires
en x_1 et x_2

$$\underbrace{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}$$

Deux variables réelles x_1 et x_2 , contraintes à être **positives**

Description formelle d'un PL

- Fonction **économique** / fonction **objectif** :

$$\max/\min \underbrace{c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n}$$

c_i = ième coefficient (réel) de la fonction économique

- m **contraintes linéaires** = de la forme :

$$\underbrace{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n} \left\{ \begin{array}{l} \geq b \\ \leq b \\ = b \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} b = \text{second} \\ \text{membre de} \\ \text{la contrainte} \end{array}$$

m_i = ième coefficient (réel)
de la contrainte

**Contraintes
de borne :**
 $x_i \geq 0, x_i \leq 5, \dots$

- Les contraintes et la fonction économique sont des **combinaisons linéaires** des n variables réelles x_i

Forme canonique (FC) d'un PL

- Objectif : max $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

- Sous les contraintes :

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n \leq \underline{b}_1$$

...

$$m_{m1}x_1 + m_{m2}x_2 + \dots + m_{mn}x_n \leq \underline{b}_m$$

$x_i \geq \underline{0}$ pour tout i entre 1 et n

Notation compacte pour la FC d'un PL

- Objectif : $\max c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \Rightarrow \max c(x)$
- Sous les contraintes :

$$m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n \leq b_1$$

...

$$m_{m1}x_1 + m_{m2}x_2 + \dots + m_{mn}x_n \leq b_m$$

} $\Rightarrow x \in A$
($A =$ **polyèdre**
admissible)

$$x_i \geq 0 \text{ pour tout } i \text{ entre } 1 \text{ et } n$$

} $\Rightarrow x \geq 0$

Notation compacte pour le problème du brasseur

- Problème du brasseur (rappel)

$$\left. \begin{array}{l} - \max 15 x_1 + 25 x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \max c(x) = 15 x_1 + 25 x_2$$

$$x_1 + 3 x_2 \leq 96 \text{ (maïs)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 40 \text{ (houblon)}$$

$$7 x_1 + 4 x_2 \leq 238 \text{ (malt)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in A$$

Propriété de la FC d'un PL

- **Tout PL peut être mis sous FC**
 - Contrainte $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \geq b \Leftrightarrow ?$
 - Contrainte $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = b \Leftrightarrow ?$
 - $x_i \leq 0 \Leftrightarrow ?$
 - x_i réelle (non contrainte en signe) $\Leftrightarrow ?$
 - Transformation de la fonction objectif
 - $\text{Min } c(x) \Leftrightarrow \text{Max } ?$ (réponse dans la suite...)
- Hyp. non restrictive pour la suite : PL sous FC

Forme standard (FS) d'un PL

- Forme standard (FS) d'un PL ?
 - Idem forme canonique, **sauf que toutes les contraintes sont des égalités**
- Propriété : on peut passer de la FC d'un PL à sa FS en ajoutant à chaque contrainte une **variable d'écart** $e_j \geq 0$ (car associée à un écart ≥ 0)
 - On peut aussi retrancher une variable d'écart à toute contrainte de la forme $\geq b$
- Conséquence : tout PL peut être mis sous FS !

Petit lexique de la PL

- x_1, x_2, \dots, x_n : variables de décision (par opposition aux **variables d'écart**)
- Solution **admissible** = affectation de valeurs aux x_i **vérifiant les contraintes**
- Région/ensemble/domaine/polyèdre **admissible** = ensemble des solutions admissibles
- Solution **optimale** = solution admissible qui maximise la fonction économique

Optimalité d'une solution

- Soit A un polyèdre et c une fonction objectif
- Une solution x^* dans A est optimale pour le PL $P = \{\max c(x), \text{ avec } x \in A\}$ si et seulement si **pour tout x dans A , on a $c(x) \leq c(x^*)$**
 - Transformation de $\min c(x)$? De $\max (-c(x))$?
- **Valeur optimale** de $P = c(x^*)$, avec x^* optimale
 - Droite d'équation $c(x) = c(x^*)$: **droite optimale**

Linéarisation d'un problème

- Parfois, un programme mathématique PM peut être « **linéarisé** », c'est-à-dire mis sous la forme d'un PL **équivalent** au PM initial :
 - Intérêt : le résoudre à l'aide d'algorithmes de PL !
 - Ici, « équivalent » ne signifie rien d'autre que « qui a la même valeur optimale »
- Par exemple, comment linéariser :
 - Le PM $\{\max \exp(c(x)), \text{ avec } x \in A\}$?
 - Le PM $\{\max \min\{c(x), c'(x)\}, \text{ avec } x \in A\}$?

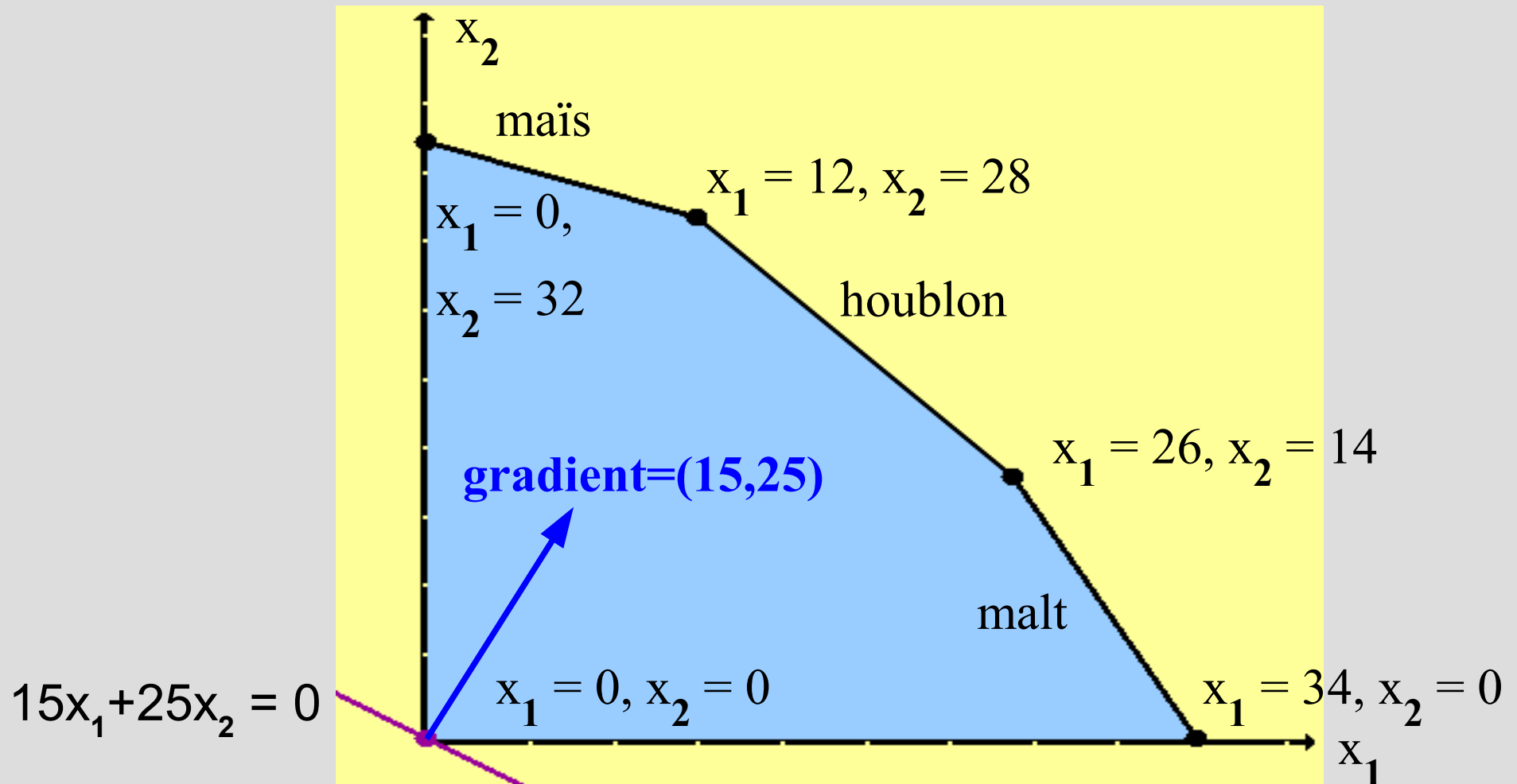
Résolution graphique d'un PL

- Méthode dite de « **résolution graphique** »
 - Exploite le fait qu'on a 2 variables : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$
- Toute inégalité est vérifiée par une moitié du plan
 - Contrainte d'inégalité = demi-plan (dimension 2)
 - Frontière/bord d'un demi-plan = droite (dimension 2)
 - Tracé du domaine admissible dans le plan
 - Tracé du bord du demi-plan défini par chaque contrainte
 - Région admissible = intersection de tous ces demi-plans
 - Tracé d'une droite parallèle à la droite optimale
 - Recherche « visuelle » d'une solution optimale

Résolution graphique du problème du brasseur (1/3)

- Dans le domaine admissible (en bleu), on cherche une solution qui maximise $15x_1 + 25x_2$
- On trace la droite $15x_1 + 25x_2 = 0$ (en violet)
 - La droite optimale est $15x_1 + 25x_2 = ?$ (où $? = val. opt.$)
 - Cette droite est donc **parallèle** à $15x_1 + 25x_2 = 0$
- Idée (visuelle) : « déplacer » la droite $15x_1 + 25x_2 = 0$
 - La faire « glisser » le plus possible dans le bon sens
 - C'est-à-dire dans une direction qui augmente la valeur de la fonction objectif $15x_1 + 25x_2$
 - Tout en restant dans le domaine admissible

Résolution graphique du problème du brasseur (2/3)

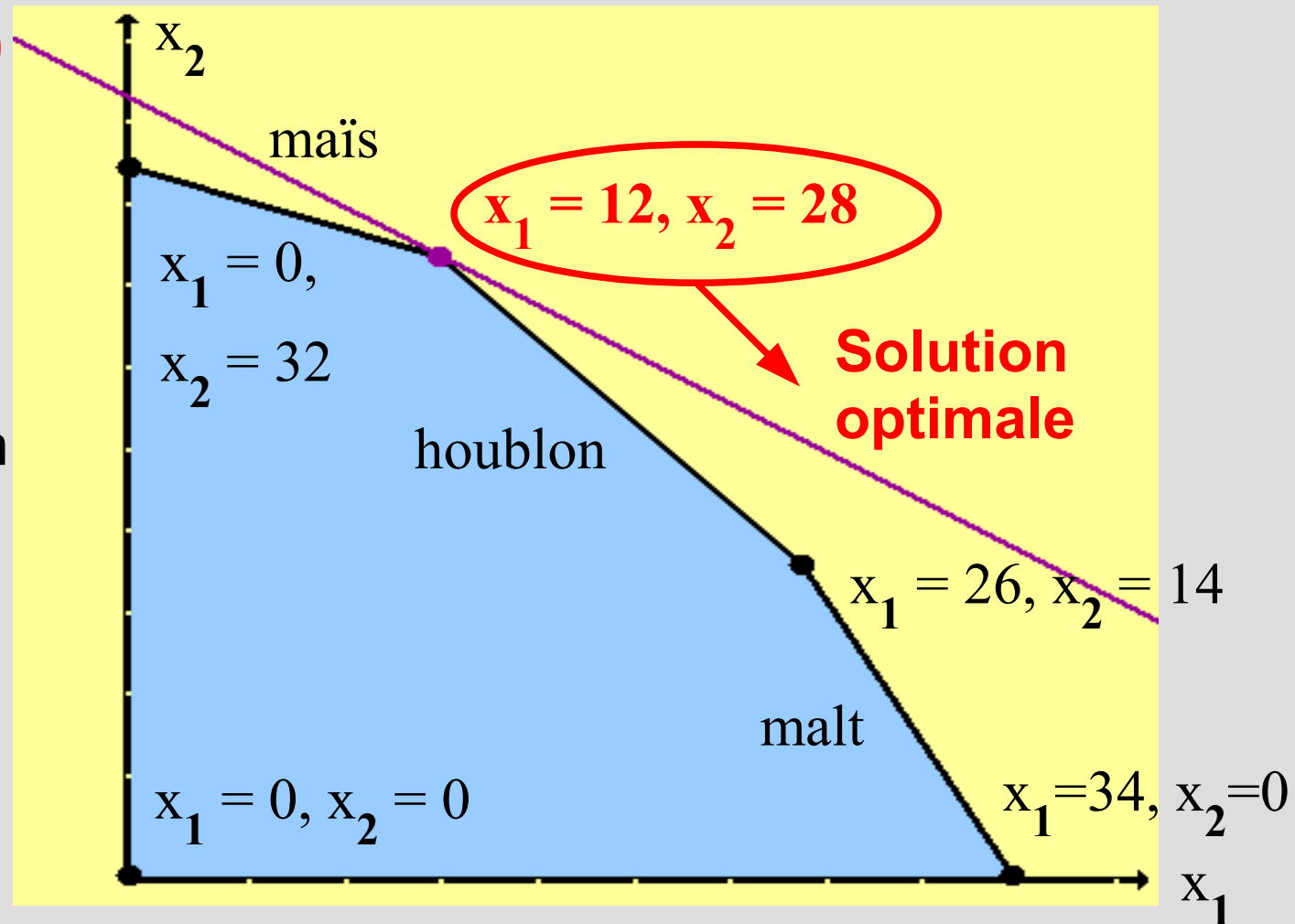


Résolution graphique du problème du brasseur (3/3)

$$15x_1 + 25x_2 = 880$$

Droite optimale

Plan de fabrication optimal (unique) :
12 UV de b. blonde,
28 UV de b. brune,
maïs épuisé,
houblon épuisé,
revenu = 880 euros

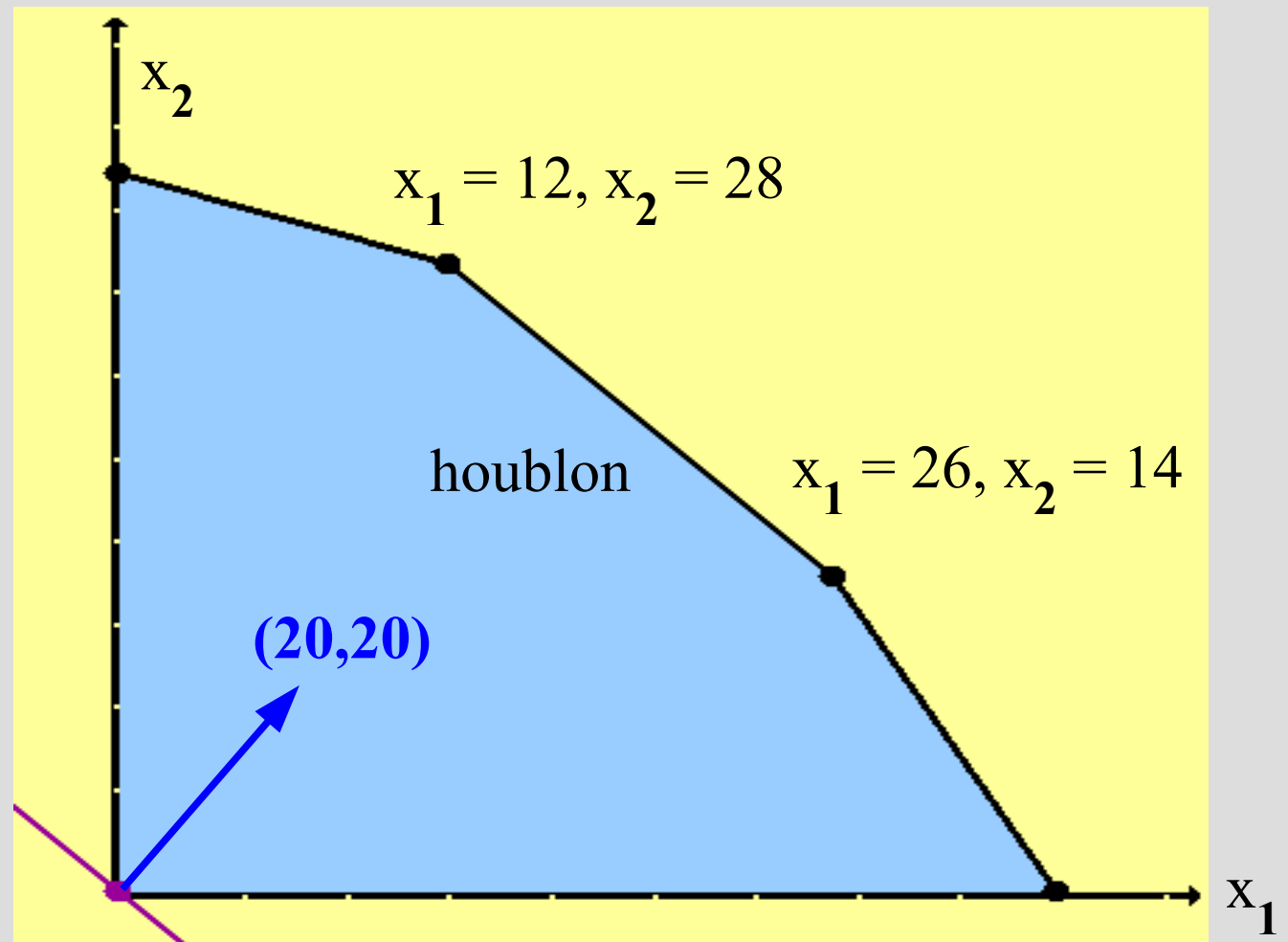


Une deuxième variante (1/2)

- Si revenu b. blonde = revenu b. brune = 20 ?

Nouvelle fonction économique :
 $\max 20 x_1 + 20 x_2$

$$20 x_1 + 20 x_2 = 0$$



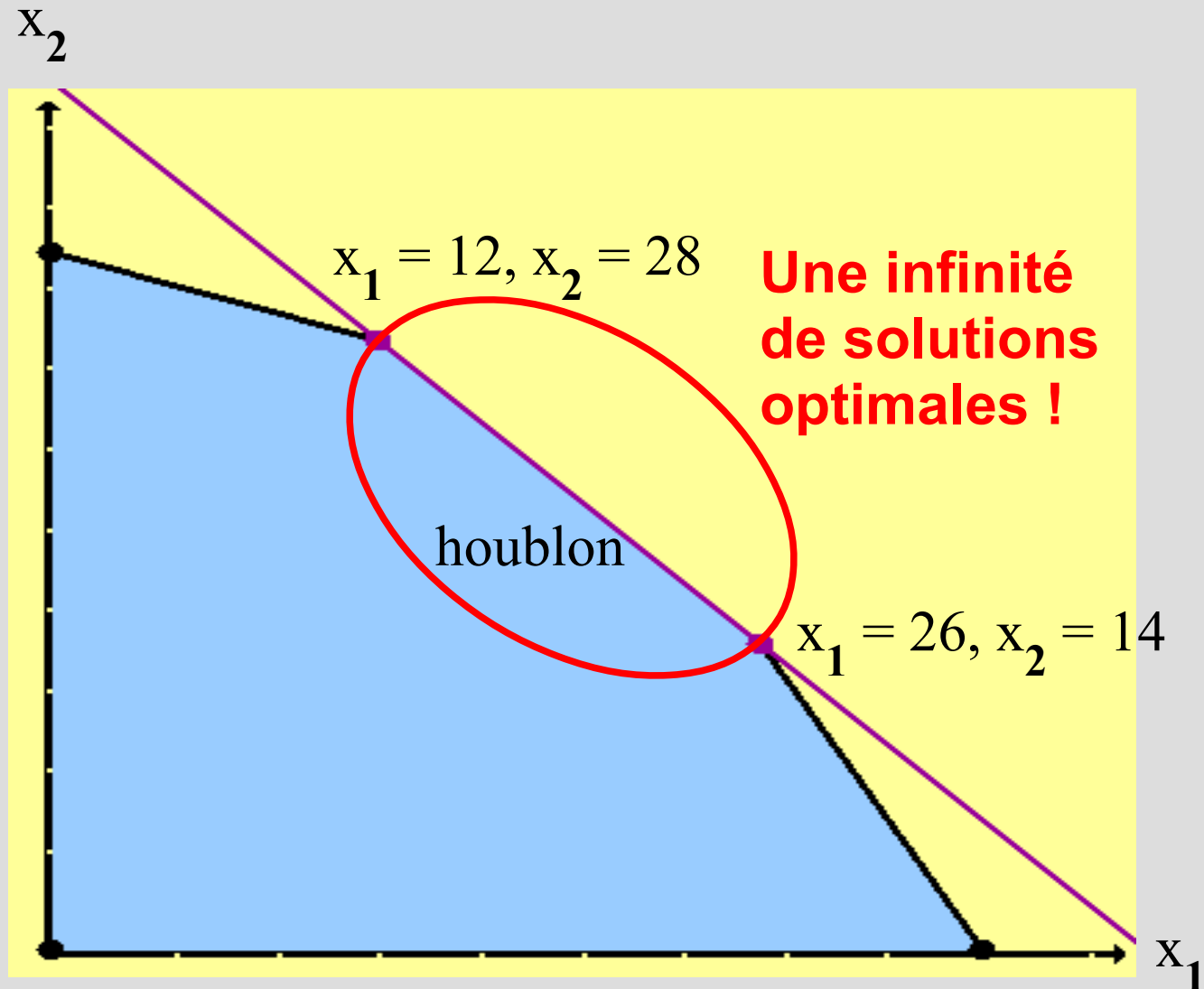
Une deuxième variante (2/2)

$$20x_1 + 20x_2 = 800$$

Droite optimale

Plans de fabrication optimaux :

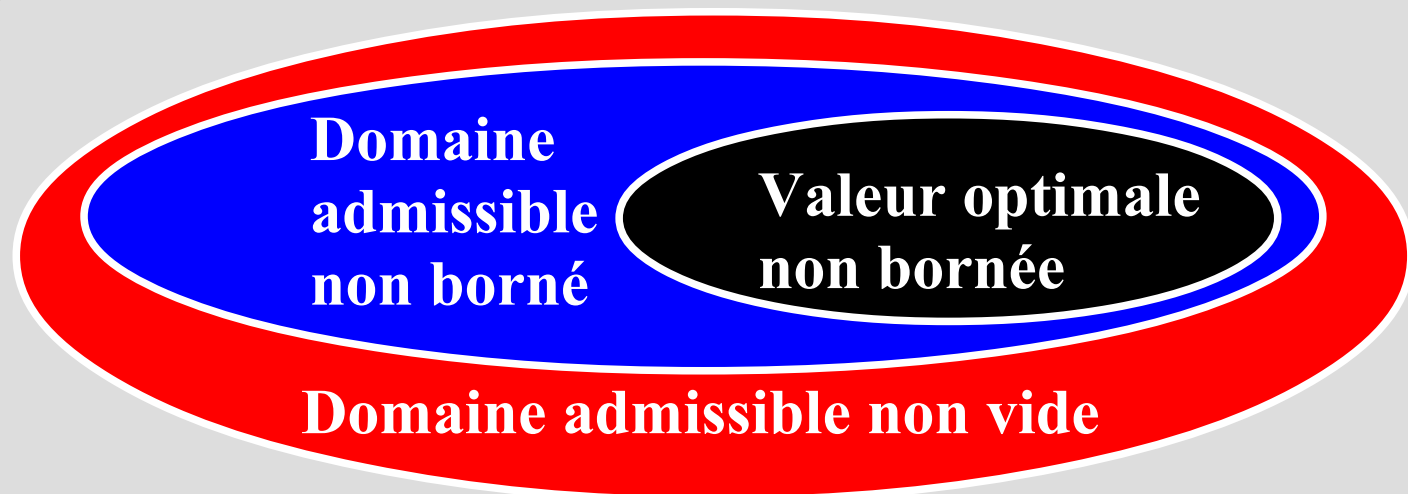
houblon épuisé,
revenu = 800 euros
(Par exemple :
12 UV de b. blonde,
28 UV de b. brune)



Un premier bilan sur la PL (1/2)

- Ensemble admissible d'un PL ?
 - En dimension 2 ($n=2$), région du plan bornée par des droites, c'est-à-dire polygone
 - En dimension quelconque, région de \mathbb{R}^n bornée par p **hyperplans** (**polyèdre**)
- Solutions optimales d'un PL ?

Pas de solution admissible



Un premier bilan sur la PL (2/2)

- Si la valeur optimale est bornée, alors, que le domaine admissible soit borné ou non, on a :
 - Soit **une seule solution optimale**
 - En un sommet du polyèdre (polygone si $n=2$) constituant la région admissible
 - Soit **une infinité de solutions optimales**
 - Si $n=2$, fonction objectif parallèle à l'une des contraintes
- Dernier cas : l'inverse est-il vrai ?
 - Non, il peut n'y avoir qu'une solution optimale, même si la fonction objectif est parallèle à une contrainte !

Aller plus loin ?

- On sait maintenant résoudre des PL si $n = 2$
 - On pourrait imaginer le faire avec $n=3$ variables (résolution graphique en dimension 3)
 - Et avec $n \geq 4$ variables ?
 - Résolution graphique **inapplicable**
 - Nécessité d'une **méthode algébrique** (et automatisée)
- A retenir...
 - PL = optimisation linéaire
 - Forme canonique, forme standard
 - Résolution graphique de PL à 2 variables (3 cas)

Programmation Linéaire

Deuxième partie :

L'algorithme du simplexe

Intuition « géométrique » derrière l'algorithme du simplexe

- Rappel : on veut résoudre des PL à $n \geq 4$ variables
 - Méthode graphique inexploitable !
 - Difficulté initiale en PL : trouver une meilleure solution parmi un ensemble **infini** de solutions potentielles
 - Se ramener à un nombre **fini** de solutions ?
 - Idée simple conduisant à deux algorithmes :
 - Approche naïve (peu efficace)
 - Algorithme du simplexe

Solution de base (concept non géométrique)

- Base d'un PL en FS à n variables et m contraintes
 - On suppose les contraintes linéairement indépendantes
 - **Base = choix de m variables**
 - Les m colonnes associées sont linéairement indépendantes (sous-matrice inversible)
 - **Les $n-m$ autres variables sont nulles** ($\Rightarrow \leq m \text{ var. } > 0$)
- Solution de base d'un PL en FS (définition « light »)
 - Solution associée à une base de ce PL \Rightarrow exemple ?
 - Une telle solution x est **admissible** ssi $x \geq 0$
 - Un PL en FC peut en avoir jusqu'à $C_{n+m}^m = (n+m)! / (n!m!)$

Convexité

- Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si pour tout x, y dans S , tout point du segment $[x, y]$ est dans S
 - Exemple ($n=2$) : segment $[x, y]$, un carré, un disque...
- **Enveloppe convexe** d'un ensemble de points x_i
 - C'est le plus petit ensemble convexe contenant les x_i
 - Par exemple : triangle pour 3 points non alignés...

Sommet d'un polyèdre (concept géométrique)

- Un point x d'un polyèdre P est un **sommet** (ou **point extrême**) ssi il n'est pas sur un segment reliant deux autres points de P entre eux
 - Ex. : sommets d'un segment $[x,y]=\{x,y\}$
- **Propriété : un polyèdre borné est exactement l'enveloppe convexe de ses sommets**
 - Corollaire 1 : tout polyèdre borné est convexe
 - Corollaire 2 : tout PL qui a une (ou des) solution(s) optimale(s) a (au moins) un de ses sommets optimal
 - Vrai même si le domaine admissible est non borné...

Approche « naïve » pour la PL

- Idée initiale simple :
 - Tout polyèdre de \mathbb{R}^n a un nombre **fini** de sommets
 - Calculer la valeur de la fonction objectif en chaque sommet et garder le meilleur d'entre eux ?
 - NON : méthode peu efficace, car on peut montrer que
 - **Pour un polyèdre P et pour $x \in P$, x est un sommet de P ssi x est une solution de base admissible de P**
 - Le PL du brasseur a donc 5 solutions de base admissibles
 - Si $m=n=50$, on peut avoir $C_{n+m}^m = C_{100}^{50} \approx 10^{29} = 10^{12}(10^9 \cdot 10^8)$ solutions de base admissibles (impraticable) !

Vers une approche moins naïve : idée de l'algorithme du simplexe

- Principe de l'**algorithme du simplexe** :
 - Plutôt que d'énumérer toutes les solutions de base admissibles, on va en parcourir certaines
 - Concrètement, on passe d'un sommet (solution de base admissible) à un autre, dont la valeur est meilleure (vis-à-vis de la fonction objectif)
 - Finalement, quand ce n'est plus possible, on peut montrer qu'on obtient bien une solution optimale
 - Il reste à trouver comment faire : la présentation qui suit ne nécessite même pas d'avoir compris les liens évoqués avec les solutions de base admissibles...

Une autre vision de la FS : les dictionnaires

- Soit $P = \{\max c(x), x \in A, x \geq 0\}$ un PL sous FS
 - On définit le **dictionnaire initial** de P en faisant passer toutes les variables à droite, sauf les variables d'écart
 - Donc, équivalence entre la FS et ce dictionnaire initial
 - Plus généralement, un **dictionnaire** est l'expression de m variables en fonction des autres ($m = \text{nb contraintes}$)
 - Les variables « à gauche » sont supposées non nulles, les variables « à droite » sont supposées nulles
 - Dictionnaire \leftrightarrow solution de base !
 - Le dictionnaire « initial » est donc associé à l'origine (variables de décision nulles, variables d'écart non nulles)

Exemple de dictionnaire : le PL du brasseur

Dictionnaire initial de valeur 0 (associé aux variables d'écart x_3, x_4, x_5) : $x_3=96, x_4=40, x_5=238$

1

$$\begin{aligned} x_3 &= 96 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 40 - x_1 - x_2 \\ x_5 &= 238 - 7x_1 - 4x_2 \\ z &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} x_2 &= 32 - 1/3 x_1 - 1/3 x_3 \\ x_4 &= 8 - 2/3 x_1 + 1/3 x_3 \\ x_5 &= 110 - 17/3 x_1 + 4/3 x_3 \\ z &= 160 + 4/3 x_1 - 5/3 x_3 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} x_1 &= 12 + 1/2 x_3 - 3/2 x_4 \\ x_2 &= 28 - 1/2 x_3 + 1/2 x_4 \\ x_5 &= 42 - 3/2 x_3 + 17/2 x_4 \\ z &= 176 - x_3 - 2x_4 \end{aligned}$$

Améliorer cette solution (admissible) ?
Idée : augmenter une seule des variables nulles (à droite), en améliorant z
1. Choix de variable (dictionnaire initial) : x_2 (choix arbitraire), x_1 reste nul
2. Problème : $x_1=0$, mais de combien peut-on augmenter x_2 pour que :

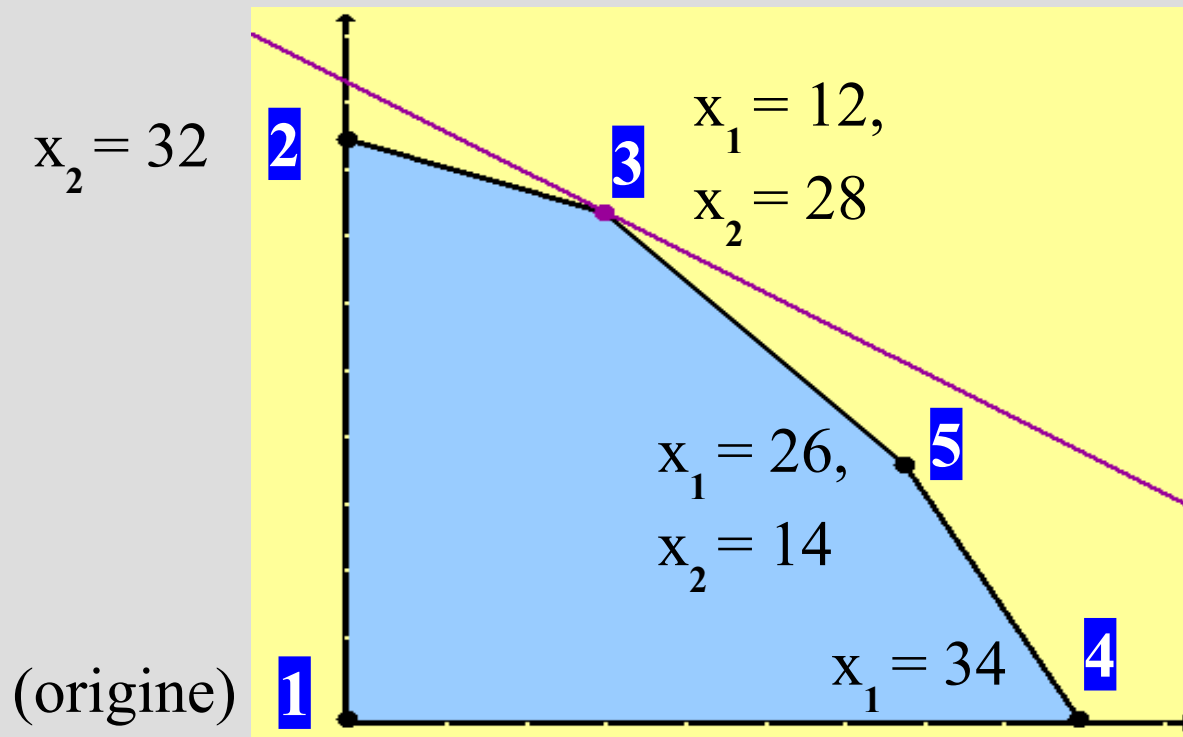
$$\left. \begin{aligned} x_3 \geq 0 &\Leftrightarrow 96 - 3x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 32 \\ x_4 \geq 0 &\Leftrightarrow 40 - x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 40 \\ x_5 \geq 0 &\Leftrightarrow 238 - 4x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \leq 119/2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2 = 32 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

3. Recommencer (nouveau dictionnaire) ?
Exprimer z, x_2, x_4, x_5 en fonction de x_1, x_3

STOP, car $z \leq 176$ et donc solution optimale !

Bilan de la résolution du PL du brasseur par les dictionnaires

Durant le processus, 3 solutions admissibles (sommets) visitées



- 1** Montre que $z \geq 0$
- 2** Montre que $z \geq 160$
- 3** Montre que $z \geq 176$
(cette solution, de valeur $5 \cdot 176 = 880$, est optimale car $176 - x_3 - 2x_4 \leq 176$)

Si, dans le 1er dictionnaire, on augmente x_1 et non x_2 , on visite $4 > 3$ solutions admissibles **1 4 5 3** \Rightarrow en général, quel est le meilleur chemin ? Sa taille ?

Tableaux du simplexe

- **Tableau** = dictionnaire avec toutes les variables (nulles et non nulles) à gauche de l'égalité
 - Forme « traditionnelle » de l'algorithme du simplexe
 - Principe identique aux dictionnaires
 - Sur chaque ligne : une variable non nulle exprimée (donc de coefficient 1) en fonction des variables nulles
 - Condition d'optimalité identique : ligne de z quasi-inchangée (gauche \leftrightarrow droite), seul le terme constant change de côté
 - Comme pour les dictionnaires, 1 tableau=1 solution de base
 - Formules de mises à jour (= passage de la solution courante à la solution suivante) ?

Vocabulaire des tableaux

- Variable :
 - **hors-base** = variable nulle
 - **en base** = variable non nulle
 - **entrante** = variable nulle qui devient non nulle
 - **sortante** = variable non nulle qui devient nulle
- **Coûts réduits** = coefficients dans l'expression de la fonction objectif z
- **Pivot** = coefficient de la variable entrante dans l'expression de la variable sortante

Résolution de PL sous FC à l'aide de tableaux

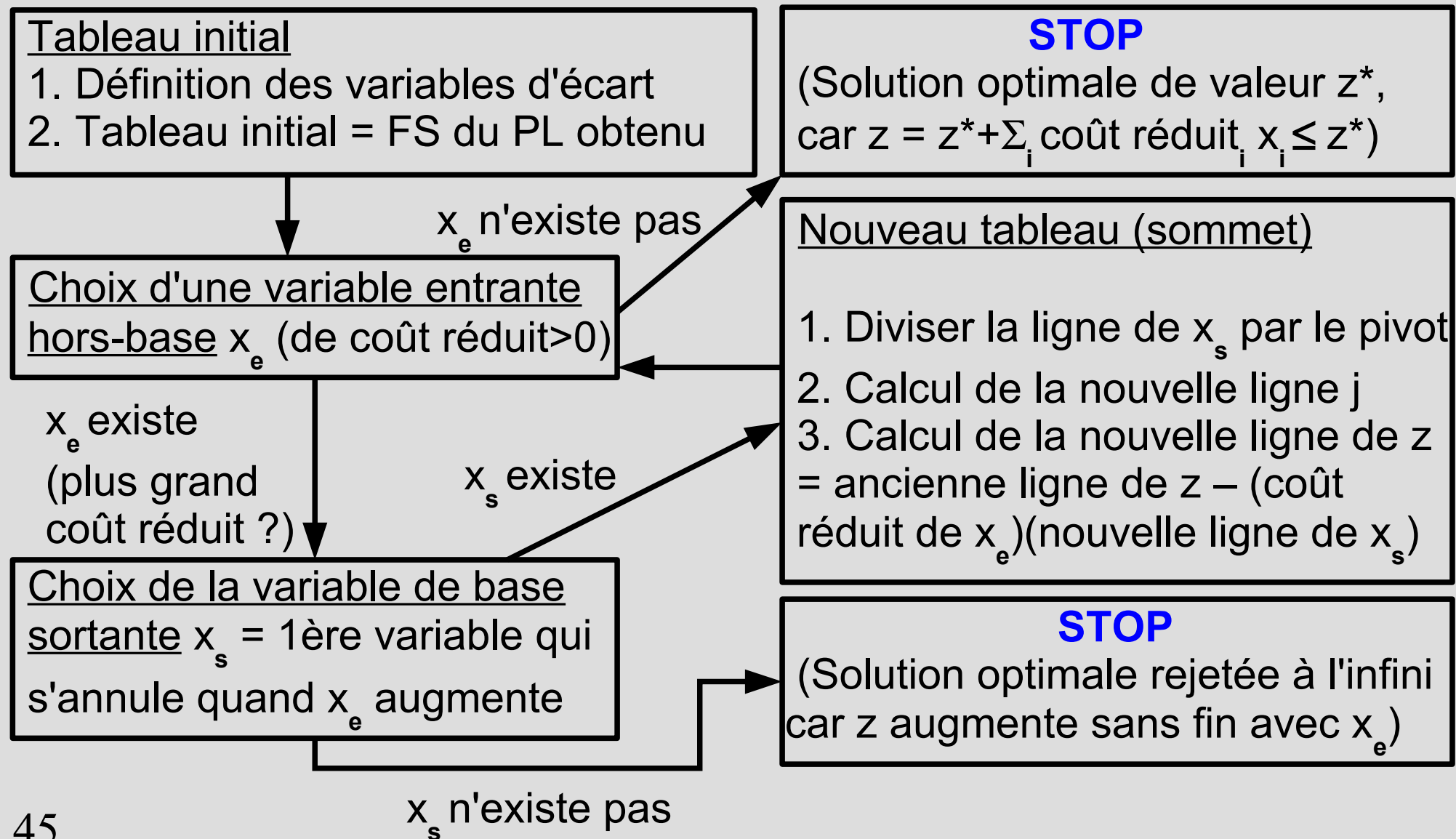
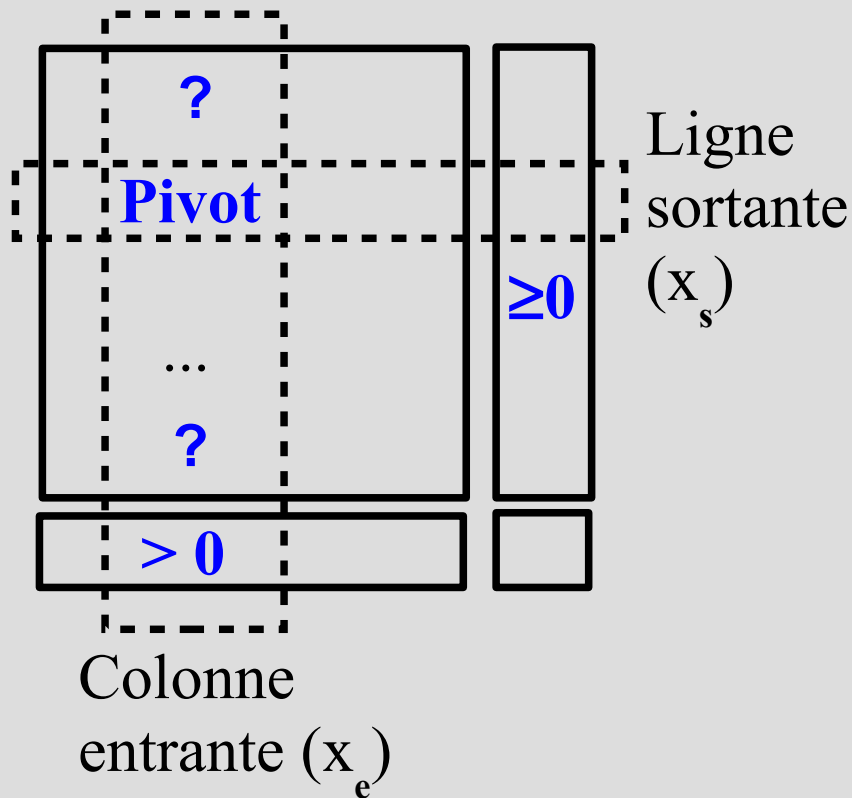
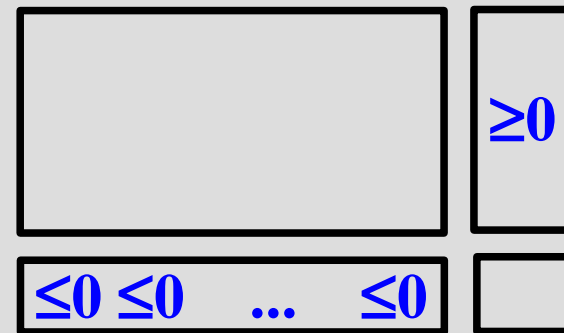


Illustration de la méthode des tableaux du simplexe

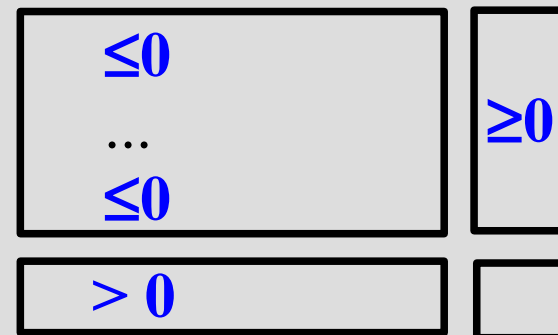
Cas général



Cas particulier 1 : la solution est optimale



Cas particulier 2 : solution optimale rejetée à l'infini



Une infinité de solutions optimales

- Rappel : un PL ayant une valeur optimale finie peut admettre une infinité de solutions optimales
 - Condition nécessaire et suffisante (cf PL brasseur) ?
 - Cas $n=2$: une contrainte parallèle à la fonction objectif, qui définit un des côtés « bien situés » de la région admissible
 - Et en terme de tableaux du simplexe ?
 - A une itération associée à un des sommets situés sur cette contrainte, une des variables hors-base a un coût réduit nul
 - Augmenter cette variable ne modifie donc pas la valeur de l'objectif
 - D'où CNS : infinité de solutions optimales ssi une solution optimale avec (au moins) un coût réduit hors-base nul

Efficacité du simplexe

- Rappel : plusieurs « cheminements » possibles pour aboutir à la solution optimale par simplexe
 - Comment trouver le meilleur ? Et sa longueur ?
 - Cf PL du brasseur : deux, de longueurs respectives 3 et 4
 - Problème : en théorie, l'algorithme peut être obligé de visiter un nb de sommets non polynomial en m et n
 - Cf Klee & Minty
 - Mais il finit : à chaque itération, on explore un sommet meilleur, donc au pire on explore tous les sommets (nb fini)
 - En fait, l'algorithme peut parfois ne pas finir : cf dégénérescences...
 - En pratique, il est très utilisé car très efficace : **entre $3m/2$ et $3m$ itérations en moyenne** (m = nombre de contraintes)

Instances de Klee & Minty

- Instances où le simplexe fonctionne très mal
 - Les bonnes performances pratiques de l'algorithme tendent à indiquer que ce genre d'instances est rare
 - 2^n itérations nécessaires = 2^n sommets visités
 - Choix variable entrante ?

Forme générale

$$\max \sum_{j=1}^n 10^{n-j} x_j$$

sous contraintes :

$$(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j) + x_i \leq 100^{i-1},$$

pour $1 \leq i \leq n$

$$x_i \geq 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

Pour le cas $n=2$

$$\max \{10 x_1 + x_2, \text{ sous contraintes : } x_1 \leq 1, 20 x_1 + x_2 \leq 100, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Quatre sommets visités :

1. $(x_1=0, x_2=0)$, de valeur 0
2. $(x_1=1, x_2=0)$, de valeur 10
3. $(x_1=1, x_2=80)$, de valeur 90
4. $(x_1=0, x_2=100)$, solution optimale de valeur 100

Une première complication : les dégénérescences

- En général, l'algorithme du simplexe termine car
 - A chaque itération, la valeur de la fonction objectif est strictement augmentée (solution meilleure)
 - Ainsi, on n'explore pas deux fois chaque sommet
- Cette stricte augmentation provient du fait qu'une variable nulle (hors-base) devient > 0 (en base)
 - En cas de **dégénérescence**, toutes les variables d'une même ligne peuvent être nulles
 - De telles solutions ont donc plus de $n-m$ variables nulles
 - La terminaison de l'algo. du simplexe est alors compromise

Solutions dégénérées et cyclage

- Un tableau correspond à une **solution dégénérée**
 - S'il y a au moins un 0 dans le 2nd membre du tableau
 - De façon équivalente, si au moins une variable de base est nulle dans la solution associée au tableau
- Non seulement la preuve de terminaison de l'algorithme du simplexe est remise en cause par le phénomène de dégénérescence, mais en fait il peut **effectivement** empêcher sa terminaison
 - Phénomène de **cyclage** : l'algorithme peut tourner indéfiniment sans jamais trouver une solution optimale

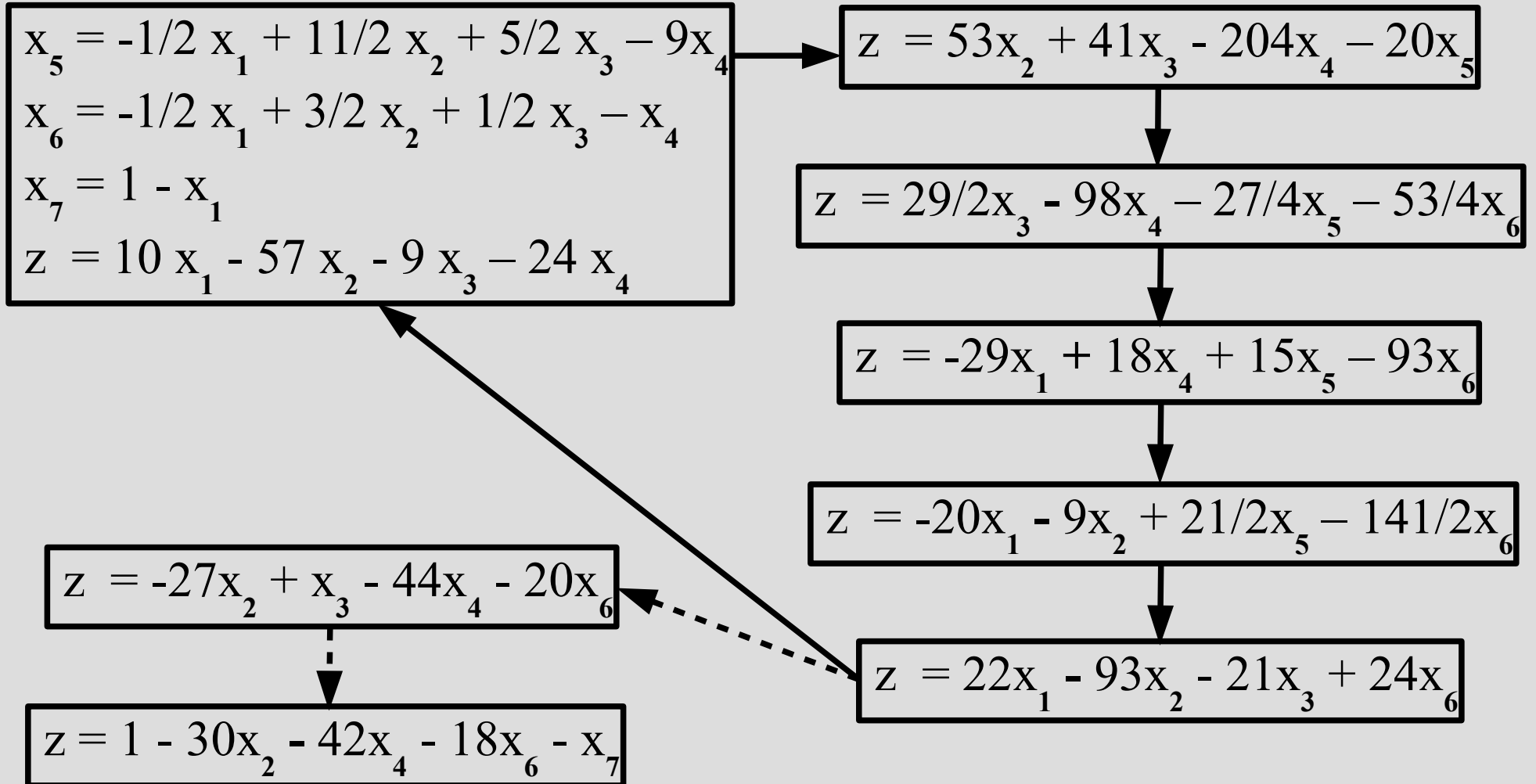
Un exemple de cyclage (1/2)

- Pour décrire la version du simplexe utilisée, on a besoin de spécifier le choix de la variable :
 - Entrante : une dont le coût réduit est le plus grand
 - Sortante : s'il y a le choix, celle de plus petit indice

Dictionnaire obtenu pour ce PL après 6 itérations = dictionnaire initial (6 dictionnaires qui correspondent tous au même sommet, l'origine)

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 10 x_1 - 57 x_2 - 9 x_3 - 24 x_4 \\ \text{sous contraintes :} \\ 0.5 x_1 - 5.5 x_2 - 2.5 x_3 + 9 x_4 \leq 0 \\ 0.5 x_1 - 1.5 x_2 - 0.5 x_3 + x_4 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Un exemple de cyclage (2/2)



Règle de Bland

- Des règles existent pour éviter le cyclage, dont la **règle de Bland**, décrivant le choix de la variable
 - Entrante : celle de coût réduit > 0 de plus petit indice
 - Sortante : s'il y a le choix, celle de plus petit indice
 - Pour le PL précédent, on trouve alors une solution optimale (coûts réduits ≤ 0) de valeur $1 > 0$, après 7 itérations
 - En pratique, les dégénérescences et, plus encore, le cyclage, sont des phénomènes rares
 - S'il n'y en a pas, alors le simplexe converge souvent plus vite si la variable entrante est celle de plus grand coût réduit
 - Ainsi, on peut définir une stratégie mixte (on utilise cette règle ssi la solution associée au tableau courant est dégénérée)

Dégénérescences et solutions optimales

- La présence de dégénérescences peut parfois gêner la reconnaissance de solutions optimales :

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 + 2/7 x_3 - 1/7 x_6 \\x_2 &= 5 - 1/14 x_3 - 3/14 x_6 \\x_4 &= -5/7 x_3 + 6/7 x_6 \\x_5 &= 1 - 2/7 x_3 + 1/7 x_6 \\z &= 7 + 3/14 x_3 - 5/14 x_6\end{aligned}$$

Un dictionnaire
(de valeur 7, donc optimal)

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 - 2/5 x_4 + 1/5 x_6 \\x_2 &= 5 + 1/10 x_4 - 3/10 x_6 \\x_3 &= -7/5 x_4 + 6/5 x_6 \\x_5 &= 1 + 2/5 x_4 - 1/5 x_6 \\z &= 7 - \underbrace{3/10 x_4 - 1/10 x_6}_{\text{(Coûts réduits } < 0 \text{)}}\end{aligned}$$

Dictionnaire optimal
(de valeur 7)

Le dictionnaire initial, bien qu'optimal, a un coût réduit > 0 :
c'est l'un des effets du phénomène de dégénérescence !

Une seconde complication : et si l'origine ne compte pas ?

- Solution admissible initiale pour un PL P ?
 - Origine = solution initiale associée aux var. d'écart
 - Contrainte $x_1 \geq 5 \Rightarrow$ origine non admissible (cas **défavorable**, par opposition au cas **favorable**)
 - La contrainte $x_1 - e_1 = 5$ la rend non admissible
 - La contrainte $x_1 - e_1 + a_1 = 5$ la rendrait admissible
 - Ces 2 contraintes sont équivalentes ssi $a_1 = 0$
 - Idée pour trouver une solution admissible (**Phase 1**) :
 - Modifier les contraintes (ajouter les a_i)
 - Chercher à rendre les a_i nuls, en min. leur somme

Phase 1 et PL auxiliaire

- On appelle **PL auxiliaire** le PL P' obtenu en
 - Partant de la FS de P (hypothèse non restrictive : 2^{nds} membres positifs),
 - Ajoutant une variable **artificielle** (ou **auxiliaire**) sur chaque contrainte non vérifiée par l'origine,
 - Remplaçant la fonction de coût par la minimisation de la somme des variables auxiliaires.
- La **Phase 1** consiste à résoudre P'
 - Si sa valeur optimale est nulle ($a_i = 0$ pour tout i), on a une solution admissible pour P ,
 - Sinon, P n'admet aucune solution admissible !

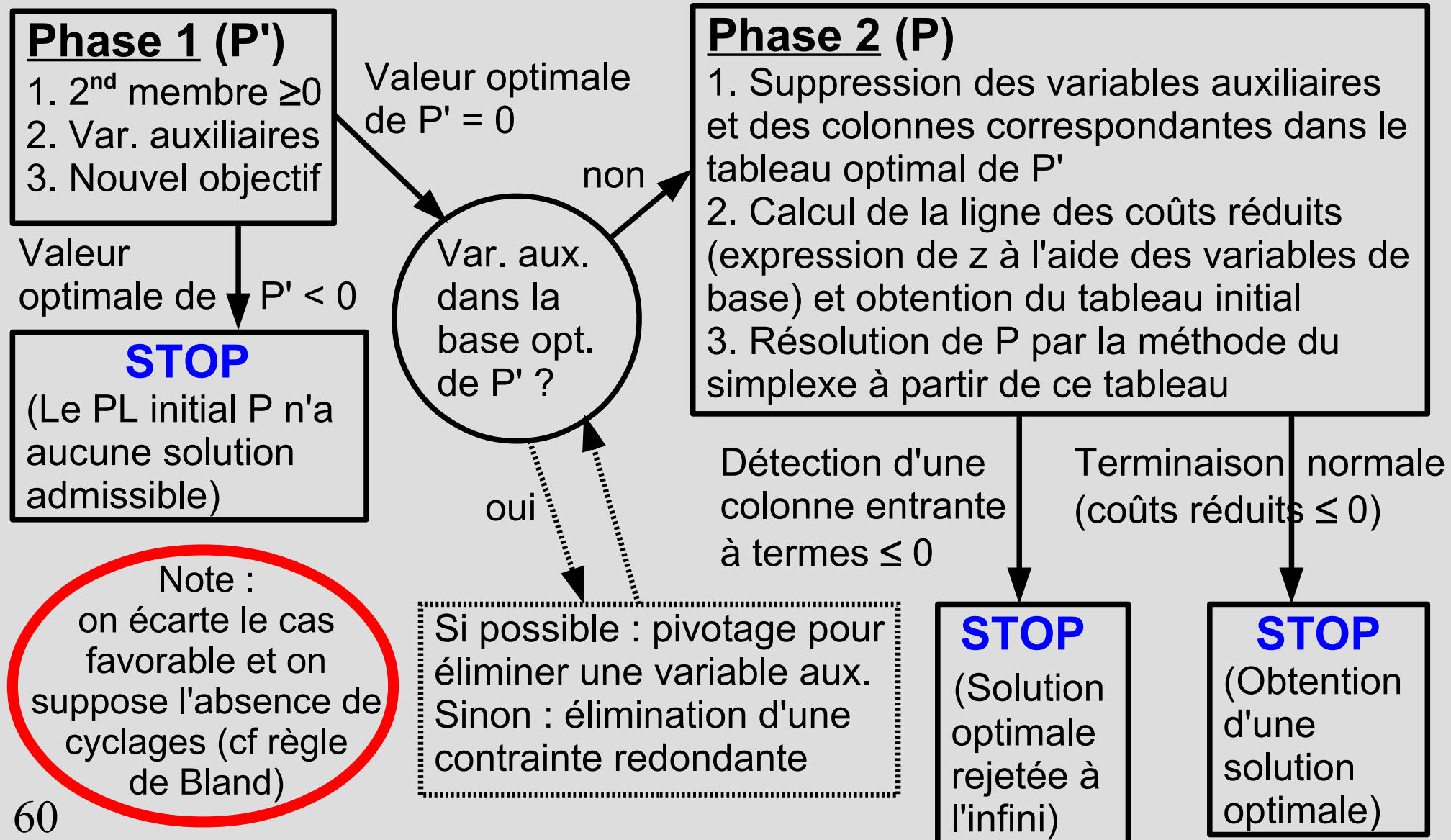
Tableaux initiaux de P et P'

- Si x^*, a^* est une solution optimale non dégénérée de P' de valeur 0, alors :
 - $a^*=0$, et toute variable auxiliaire est donc hors-base
 - **x^* est donc une solution admissible pour P**, et le tableau initial du simplexe pour P est obtenu **en supprimant les colonnes associées aux var. aux. a^***
 - Tableau initial de P' ?
 - Base initiale : variable en base sur la j^e ligne = variable auxiliaire s'il y en a une, variable d'écart sinon
 - Solution initiale admissible car 2nd membre positif
- 58 – Il reste à réécrire la fonction objectif $z' = \max \sum_i -a_i \dots$

Tableau initial de P (cas général)

- Et si la solution optimale de P' est de valeur nulle, mais il reste des variables artificielles en base ?
 - Ces variables étant nulles, la solution est dégénérée !
 - On peut éliminer ces variables de la base :
 - Si la k^{e} variable de base est une variable artificielle, on choisit l'élément en colonne j de cette ligne
 - Non nul (et donc pas en base)
 - Correspondant à une variable du PL initial
 - Si j n'existe pas, alors la matrice M n'est pas de rang plein, et la ligne k correspond donc à une contrainte **redondante**
 - Sinon k sort de la base, j rentre dans la base, puis pivotage du tableau (tableau associé à la nouvelle base)

Bilan : un algorithme COMPLET pour la résolution des PL



A retenir...

- Méthode du simplexe
 - Solutions de base admissibles, dictionnaires et tableaux du simplexe
 - Variable entrante, variable sortante, coûts réduits
- Dégénérescences
 - Solution de base dégénérée, cyclage, règle de Bland
- Méthode des deux phases
 - Variables artificielles/auxiliaires, PL auxiliaire
 - Variante : méthode du grand M (la fonction objectif s'écrit alors $\max c(x) - M \cdot \sum_i a_i$)

Programmation Linéaire

Troisième partie :

Dualité en
Programmation Linéaire

La dualité : point de vue économique (1/5)

- On considère à nouveau le PL du brasseur :

$$\max 15 x_1 + 25 x_2$$

sous contraintes :

$$2.5 x_1 + 7.5 x_2 \leq 240 \text{ (maïs)}$$

$$0.125 x_1 + 0.125 x_2 \leq 5 \text{ (houblon)}$$

$$17.5 x_1 + 10 x_2 \leq 595 \text{ (malt)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

La dualité : point de vue économique (2/5)

- Rappel : ce PL est équivalent au PL suivant

$$\max 15 x_1 + 25 x_2$$

sous contraintes :

$$x_1 + 3 x_2 \leq 96 \text{ (maïs)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 40 \text{ (houblon)}$$

$$7 x_1 + 4 x_2 \leq 238 \text{ (malt)}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

La dualité : point de vue économique (3/5)

- Pour produire sa bière, le brasseur doit auparavant acheter ses matières premières (MP)
 - maïs, houblon et malt
- A partir de quel(s) prix d'achat des MP l'activité de production de bière n'est-elle plus rentable ?
 - Coût de fabrication d'une UV \geq Prix de vente d'une UV
 - On cherche donc à minimiser la somme des prix des MP sous les 2 contraintes de non rentabilité
 - Soit $u_i \geq 0$ le prix de la i^e MP : ce problème d'achat des MP peut se modéliser par un PL à 3 variables et 2 contraintes

La dualité : point de vue économique (4/5)

- PL obtenu :

$$\min 240 u_1 + 5 u_2 + 595 u_3$$

sous contraintes :

$$2.5 u_1 + 0.125 u_2 + 17.5 u_3 \geq 15 \text{ (bière blonde)}$$

$$7.5 u_1 + 0.125 u_2 + 10 u_3 \geq 25 \text{ (bière brune)}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$$

- Réécriture du PL ?

- Via un changement de variables... (Ex. : $y_3 = 2.5 u_3$)

La dualité : point de vue économique (5/5)

- On obtient un nouveau PL (qui est le PL «**dual**» du PL «**primal**» = PL du brasseur modifié) :

$$\min 96 y_1 + 40 y_2 + 238 y_3$$

sous contraintes :

$$y_1 + y_2 + 7 y_3 \geq 15 \text{ (bière blonde)}$$

$$3 y_1 + y_2 + 4 y_3 \geq 25 \text{ (bière brune)}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

Bilan : écriture du PL dual

- Primal P : $\max c(x)$, avec $x \in A$ et $x \geq 0$
- Règles de passage Primal P \rightarrow Dual D :
 - « max » \rightarrow « min »
 - $b \rightarrow c$ ($b = 2^{\text{nds}}$ membres de P)
 - $c \rightarrow b$
 - lignes \rightarrow colonnes
 - « \leq » \rightarrow « \geq »
 - m contraintes primales \rightarrow m variables duales
 - n variables primales \rightarrow n contraintes duales

◇? Propriété : la dualisation (passage primal \rightarrow dual) est une opération **involutive**. (Le dual du dual est le primal.)

Dualiser un PL primal : s'affranchir de la FC ?

- Comment écrire le dual directement si on a :
 - Contrainte 1 (maïs) de la forme $x_1 + 3 x_2 \geq 96 (y_1)$?
 - Forme équivalente : $-x_1 - 3 x_2 \leq -96 (y'_1)$, avec $y'_1 \geq 0$
 - On a alors $y_1 = -y'_1$, et donc $y_1 \leq 0$
 - Contrainte 1 (maïs) de la forme $x_1 + 3 x_2 = 96 (y_1)$?
 - Forme équivalente : $x_1 + 3 x_2 \leq 96 (y^+_1)$ et $-x_1 - 3 x_2 \leq -96 (y^-_1)$, avec $y^+_1 \geq 0$ et $y^-_1 \geq 0$
 - On a alors $y_1 = y^+_1 - y^-_1$, et donc $y_1 \in \mathbb{R}$

Bilan : écriture du PL dual à partir d'un PL primal quelconque (1/2)

PRIMAL	max	min	DUAL
contraintes	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 réelle	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 réelle	$\geq c_j$ $\leq c_j$ $= c_j$	contraintes

Bilan : écriture du PL dual à partir d'un PL primal quelconque (2/2)

DUAL	max	min	PRIMAL
contraintes	$\leq b_i$ $\geq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 réelle	variables
variables	≥ 0 ≤ 0 réelle	$\geq c_j$ $\leq c_j$ $= c_j$	contraintes

Théorèmes de dualité

- Intérêt du dual ? Lien entre primal P et dual D ?
- Théorème de dualité **faible (TDFa)**
 - **La valeur de toute solution admissible de P est au plus celle de toute solution admissible de D**
 - Preuve simple (x et y admissibles pour P et D resp.) :
$$c(x) = \sum_j c_j x_j \leq \sum_j (\sum_i m_{ij} y_i) x_j = \sum_i (\sum_j m_{ij} x_j) y_i \leq \sum_i y_i b_i = \sum_i b_i y_i$$
- Théorème de dualité **forte (TDFo)**
 - **Si P admet une solution optimale x^* , alors P et D ont la même valeur optimale**
 - Preuve (idée) : x^* a même valeur que y_i^* = -coût réduit (≤ 0) de la i^e var. d'écart de P dans le tableau de x^*

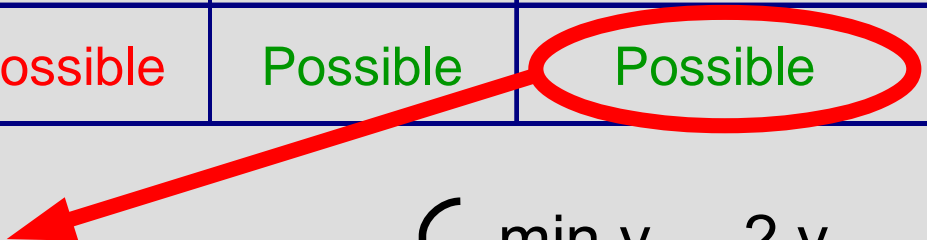
TDFa et TDFo : bilan

		Primal		
		Optimum fini	Non borné	Non admissible
Dual	Optimum fini	Possible	Impossible	Impossible
	Non borné	Impossible	Impossible	Possible
	Non admissible	Impossible	Possible	Possible

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 2x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \min y_1 - 2y_2 \\ y_1 - y_2 \geq 2 \\ -y_1 + y_2 \geq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



Utilisation du TDFo

- Observation : on peut résoudre le primal à l'aide du dual... Mais quand a-t-on intérêt à le faire ?
 - 1^{er} cas : le primal P a seulement 2 contraintes (et le dual D a donc 2 variables), mais plus de 4 variables
 - On peut alors résoudre D graphiquement, mais pas P !
 - 2^e cas : le primal P a peu de variables, mais un nombre élevé de contraintes
 - Le dual a alors peu de contraintes, et peut donc être efficacement résolu par le simplexe !

Conséquences du TDFO

- Test d'optimalité pour un PL P
 - Soit x solution admissible pour P et y solution admissible pour le dual D, alors x est optimale pour P et y est optimale pour D ssi elles ont même valeur
- Pour un PL P et son dual D, équivalence entre
 - Condition d'optimalité de P (coûts réduits ≤ 0)
 - Condition d'admissibilité de D (variables duales ≥ 0)
- Théorème des écarts complémentaires (**TEC**)

Théorème des écarts complémentaires (TEC)

- **TEC** : deux solutions x^* (admissible pour un PL donné P) et y^* (admissible pour le dual D de P) sont optimales pour P et D respectivement ssi
 - (1) Pour tout j, la j^{e} variable de x^* est nulle **OU** la j^{e} contrainte duale est saturée (vérifiée à l'égalité)
- ET**
- (2) Pour tout i, la i^{e} variable de y^* est nulle **OU** la i^{e} contrainte primale est saturée (vérifiée à l'égalité)

Preuve du TEC

- Démonstration (avec $P : \{\max c(x), x \in A, x \geq 0\}$) :
 - On a $c_j x_j^* \leq (\sum_i m_{ij} y_i^*) x_j^*$ et $(\sum_j m_{ij} x_j^*) y_i^* \leq b_i y_i^*$
(b= 2nds membres de P)
 - Ces deux inégalités impliquent :
$$\sum_j c_j x_j^* \leq \sum_j (\sum_i m_{ij} y_i^*) x_j^* = \sum_i (\sum_j m_{ij} x_j^*) y_i^* \leq \sum_i b_i y_i^*$$
(On a l'égalité ssi tous les \leq sont des =)
 - On a donc $\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i y_i^*$ si et seulement si $\sum_j (c_j - \sum_i m_{ij} y_i^*) x_j^* = 0$ et $\sum_i (b_i - \sum_j m_{ij} x_j^*) y_i^* = 0$
 - D'après le TDFO, $\sum_j c_j x_j^* = \sum_i b_i y_i^*$ ssi x^* et y^* sont simultanément optimales

Utilisation pratique du TEC

- **En pratique, une solution admissible x^* de P est optimale ssi la solution y^* , calculée de façon à satisfaire (1)+(2) avec x^* , est admissible pour le dual D de P**
 - En effet, si x^* est optimale pour P, alors :
 - D a une solution optimale (donc admissible) y^* (cf TDFo)
 - Ces deux solutions optimales satisfont (1)+(2) (cf TEC)
 - Réciproquement, si y^* existe, elle est admissible pour le PL dual D, et donc, d'après le TEC, optimale

Test d'optimalité utilisant le TEC

- Tester l'optimalité d'une solution x de P ?
 - On injecte la valeur des x_j dans (1)+(2)
 - On en déduit les valeurs des y_i via ces règles :
 - $x_j > 0 \Rightarrow j^{\text{e}}$ contrainte duale saturée
 - i^{e} contrainte primale non saturée $\Rightarrow y_i = 0$
 - Finalement, on vérifie si y , la solution duale ainsi obtenue, est admissible ou non pour le dual D

Exemple d'application du TEC

- On considère à nouveau le PL du brasseur :
 - Soit la solution primale $x_1 = 0$ et $x_2 = 32$
 - Solution duale associée : $y_2 = y_3 = 0$, et donc $y_1 = 25/3$
 - Solution duale non admissible ($y_1 < 15$), et donc solution primale considérée **non optimale** !
 - Soit à présent la solution primale $x_1 = 12$ et $x_2 = 28$
 - Solution duale associée : $y_3 = 0$, et donc $y_1 = 5$ et $y_2 = 10$ (solution du système $\{y_1 + y_2 = 15, 3y_1 + y_2 = 25\}$)
 - Solution duale admissible, et donc, d'après le TEC, solution primale considérée **optimale**

Interprétation économique des variables duales (1/2)

- On a vu que les variables duales pouvaient être vues comme les prix maximaux des MP garantissant la rentabilité de la vente de bière
- Il existe une autre interprétation économique :
 - On appelle **coût marginal** de la i^{e} MP (la ressource associée à la i^{e} contrainte primale) la valeur dans la solution optimale de la i^{e} variable duale
 - Cf ex. précédent : $y_1=5$ (maïs), $y_2=10$ (houblon), $y_3=0$ (malt)
 - Ce nom signifie qu'augmenter cette ressource de ε unités génère un profit égal à ε fois ce coût marginal (vrai pour ε suffisamment petit !) : ici $\varepsilon_1=24$, $\varepsilon_2=84/17$

Interprétation économique des variables duales (2/2)

- Preuve (idée) ?
 - Utiliser la caractérisation matricielle des bases
 - Soit B une base optimale (non dégénérée) pour le PL primal P , et y^* la solution optimale du dual D
 - Comme $B^{-1}b > 0$, B reste admissible pour P si on remplace le 2nd membre b par $(b + \Delta b)$ (où $\Delta b = (0, \dots, 0, \varepsilon, 0, \dots, 0)$)
 - y^* indépendant de b (car coûts réduits $= c^T - c_B^T B^{-1} M$)
 - On a alors 2 solutions admissibles pour P et D vérifiant les conditions du TEC : y^* reste donc optimale !
 - Sa valeur est $(b + \Delta b)^T y^*$, d'où une variation de coût de $\Delta b^T y^*$
 - Bilan : le critère à vérifier est donc $B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1}\Delta b \geq 0$

Analyse de sensibilité

- Soit x^* une solution optimale pour un PL P :
 - Si la fonction objectif c est légèrement modifiée, que devient la valeur optimale de P ? En particulier, pour quelles modifications (de c) x^* reste-t-elle optimale ?
 - On repart du tableau du simplexe associé à x^*
 - Les variables de base sont écrites en fonction des autres
 - Si z change, le nouveau tableau associé à x^* est obtenu en écrivant le nouveau z à l'aide des variables hors-base
 - x^* reste optimale ssi la solution duale associée reste admissible, et donc ssi tous les coûts réduits sont ≤ 0

Analyse de sensibilité pour le problème du brasseur

Dictionnaire optimal x^*

$$x_1 = 12 + 1/2 x_3 - 3/2 x_4$$

$$x_2 = 28 - 1/2 x_3 + 1/2 x_4$$

$$x_5 = 42 - 3/2 x_3 + 17/2 x_4$$

$$z = 15x_1 + 25x_2 \rightsquigarrow z = (15 + \delta)x_1 + 25x_2 ?$$

$$\hookrightarrow z = 880 + 12\delta + (-5 + \delta/2)x_3 + (-10 - 3\delta/2)x_4$$

Ainsi : coûts réduits ≤ 0 ssi $(-5 + \delta/2) \leq 0$ ET $(-10 - 3\delta/2) \leq 0$

x^* reste donc optimale ssi le coefficient de x_1 dans z est compris entre $15 - 20/3$ et 25

A retenir...

- Ecriture du PL dual, involutivité de la dualisation
- Théorèmes de dualité (TDFa, TDFo, TEC), et leurs conséquences...
- Interprétation économique des variables duales (coûts marginaux)
- Analyse de sensibilité

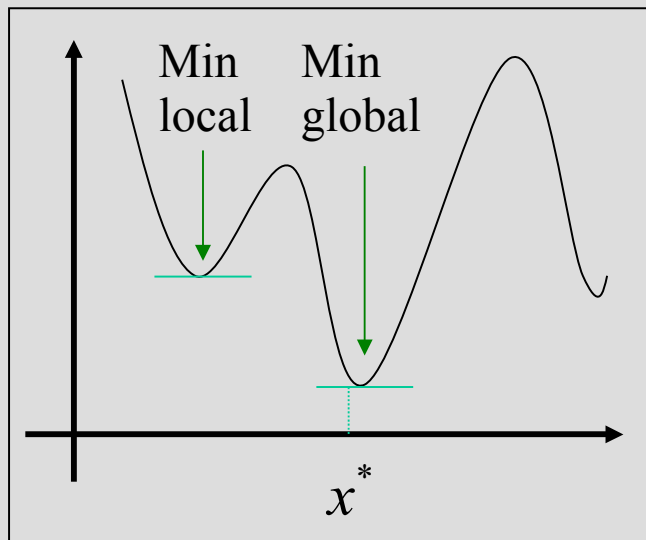
Programmation Linéaire

Quatrième partie :

La Programmation Linéaire
et ses liens avec la
Programmation Mathématique

Optimalité locale en Programmation Mathématique

- Rappel : Programmation Mathématique (PM) \Rightarrow fonction objectif et contraintes **quelconques**
- Problèmes très difficiles à résoudre en général
- Notion fondamentale en PM : optimum local



Une solution admissible x^* d'un PM est un **optimum local** pour ce PM si elle est meilleure que **toute** solution admissible suffisamment « proche » de x^* (global \Rightarrow local)

Note : en opti. **différentiable** sans contraintes, gradient nul = CN d'optimalité locale (pas CS)

Calculer des optimums locaux (1/2)

- Conditions générales d'optimalité (locale), cf TEC :
 - Conditions de Karush-Kuhn-Tucker = CN d'optimalité sous l'hypothèse de **qualification des contraintes**
- Méthode itérative « de descente » pour trouver un minimum local (on génère une suite de points x_k) :
 - Solution admissible initiale x_0 ; $k := 0$;
 - Tant que le point x_k est non optimal faire
$$x_{k+1} := x_k + p_k d_k ; k++ ; /* \text{ où } p_k = \text{pas de déplacement} \\ \text{et } d_k = \text{direction de descente/direction admissible } */$$

Calculer des optimums locaux (2/2)

- De nombreuses méthodes, en fonction du choix du pas de déplacement/de la direction admissible
 - Méthode du gradient (d_k = opposé du **gradient** de la fonction objectif, qui est le vecteur des dérivées partielles et la direction de plus forte augmentation)
 - Variante de la méthode de plus forte pente (p_k = pas de déplacement assurant la plus grande diminution)
 - Méthodes du gradient projeté/réduit (méthodes de points intérieurs pour l'optimisation **avec contraintes**)
 - Méthodes de sous-gradient (opti. non différentiable)
 - Méthodes de Newton (résolution des CN d'optimalité)

Convexité en PM

- Rappel : une fonction f est **convexe** si, pour tous x, y et $0 < \lambda < 1$, on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
 - De façon équivalente, f est convexe ssi sa Hessienne (matrice des dérivées secondes partielles) est semi-définie positive (toutes ses valeurs propres sont ≥ 0)
- Un problème d'optimisation convexe consiste à
 - minimiser une fonction (objectif) convexe
 - sur un domaine (admissible) convexe
- Propriété fondamentale en optimisation convexe :

optimum local = optimum global

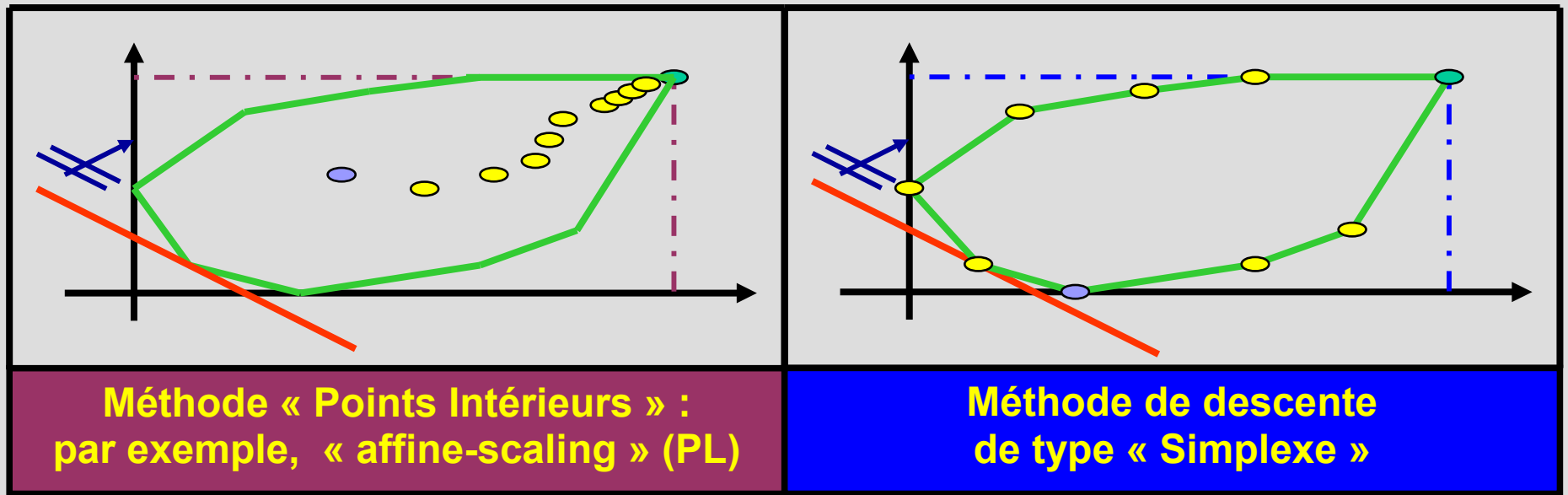
Convexité et conditions de Karush-Kuhn-Tucker

- Dans le cas convexe différentiable, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker deviennent suffisantes !
 - Dans ce cas, on a aussi optimum local=optimum global
 - La qualification des contraintes est vérifiée :
 - Si toutes les contraintes sont convexes et si le domaine admissible a un intérieur non vide,
 - Ou bien si toutes les contraintes sont linéaires.
- On en déduit le résultat fondamental suivant :

Pour un problème d'optimisation convexe différentiable satisfaisant la qualification des contraintes, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker sont des CNS d'optimalité globale

Conséquences de la convexité en PM

- Trouver un optimum global devient alors possible (famille de problèmes d'optimisation « faciles »)
 - La PL est un cas particulier d'optimisation convexe : plusieurs méthodes de descente efficaces



- CPLEX intègre un solveur efficace de programmes quadratiques convexes sous contraintes linéaires

A retenir...

- Optimalité locale vs globale
- Conditions de Karush-Kuhn-Tucker
- Méthodes de descente
- Gradient, Hessien
- Optimisation convexe

