Université Paris-Sud
M1 MIAGE CFA

Année 2011-2012

Recherche Opérationnelle
Responsable : C. Bentz
Nombre de pages : 4

TD 8 (Flots & coupes)

Exercice I

On considère le réseau routier entre deux villes A et H, constitué de plusieurs tronçons : chaque tronçon relie soit A à une "ville-étape", soit deux "villes-étapes" entre elles, soit une "ville-étape" à H. Soucieux de garantir la sécurité des usagers de ces routes en renflouant les finances de son département, le président du conseil général Nicolas S. décide de doter ce réseau routier d'un dispositif de radars. Il souhaite installer ces radars sur les tronçons de façon à s'assurer que tout conducteur effectuant le trajet entre ces deux villes soit contrôlé au moins une fois, quel que soit le chemin qu'il emprunte pour se rendre de A à H. Cependant, le coût de ces appareils étant très élevé, il voudrait faire en sorte d'installer le moins de radars possible. En modélisant le réseau routier par un graphe, montrer que ce problème de placement de radars routiers peut en fait être formulé comme un problème vu en cours, puis résolu par un algorithme approprié. Appliquer ensuite ces idées pour résoudre ce problème sur le réseau constitué des tronçons suivants :

Ville	**Tronçon(s)**
A	Vers B, vers C, vers F
B	Vers F
C	Vers D, vers E
D	Vers E, vers H
E	Vers F, vers G, vers H
F	Vers G
G	Vers H

Exercice II

Soit $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un ensemble de n processus (ou tâches) d'un programme parallèle et soit $P = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_p\}$ un ensemble de p processeurs d'une architecture donnée. Le placement du programme sur cette architecture consiste à placer (pour l'exécuter) chacune des n tâches sur l'un des processeurs : il y a alors p^n placements possibles (si toute tâche peut être placée sur tout processeur).

On considère ci-dessous le placement statique des tâches sur les processeurs : il est réalisé à la compilation ou au chargement du programme. Le coût d'un tel placement est la somme de deux coûts (connus à l'avance) :

- les coûts d'exécution des tâches placées : pour tous i et j, le coût d'exécution de la tâche t_j sur le processeur π_i est noté q_{ij},
- les coûts de communication entre tâches : si deux tâches t_j et t_k sont exécutées sur le même processeur, ce coût de communication est nul, et, dans le cas contraire, ce coût vaut c_{jk} (ce coût est symétrique, c'est-à-dire que $c_{jk} = c_{kj}$).

Le problème qu'on va étudier consiste donc à trouver un placement des tâches sur les processeurs qui soit de coût minimum. Dans le cas général, c'est un problème difficile à résoudre, mais, dans cet exercice, on va considérer le cas particulier où $p = 2$, c'est-à-dire qu'il n'y a que deux processeurs. On va modéliser ce problème à l'aide d'un graphe $G = (S, A)$ défini ainsi :

- On associe un sommet à chaque processeur et à chaque tâche ($S = P \cup T$) : le sommet π_1 est la source de G et le sommet π_2 est son puits.
- Pour tout sommet t_j avec $j \in \{1, \ldots, n\}$, on ajoute un arc du sommet π_1 vers t_j avec une capacité q_{2j}, et un arc de t_j vers le sommet π_2 avec une capacité q_{1j}.
- Pour toute paire de sommets t_j et t_k avec $j \neq k$: si $c_{jk} \neq 0$ alors on ajoute un arc (t_j, t_k) et un arc (t_k, t_j), tous deux de capacité c_{jk}.

Questions :

1. Construire le graphe G ainsi défini pour l'exemple suivant (où $p = 2$ et $n = 5$), et rappeler brièvement pourquoi G est un réseau de transport.

q_{ij}	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
π_1	2	3	5	1	7
π_2	4	3	2	3	3

c_{jk}	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1	–	2	0	1	0
t_2	2	–	5	0	0
t_3	0	5	–	0	1
t_4	1	0	0	–	1
t_5	0	0	1	1	–

2. On considère à présent la coupe séparant les 3 sommets $\{\pi_1, t_2, t_1\}$ des 4 sommets $\{t_3, t_4, t_5, \pi_2\}$: quelle est la capacité de cette coupe ? On considère ensuite le placement suivant : t_1 et t_2 sont exécutées sur π_1, alors que t_3, t_4 et t_5 sont exécutées sur π_2. Quel est son coût ? Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que, dans le cas général également, il est toujours possible d'associer un et un seul placement à chaque coupe séparant le graphe en deux parties. Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer, à l'aide d'un algorithme approprié, le placement optimal des cinq tâches sur les deux processeurs pour l'exemple précédent.

Exercice III

Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$ et un ensemble de k sommets particuliers de ce graphe (appelés sommets **terminaux**) $t_1, \ldots, t_k$, un **flot multiterminal entier** sur G est un ensemble d'unités de flots circulant dans le graphe tel que chacune de ces unités est routée de t_i à t_j pour $i \neq j$. Le problème du flot multiterminal entier maximum consiste alors à déterminer un flot multiterminal entier qui soit de valeur maximum. Bien que, contrairement au problème du flot maximum, ce problème soit difficile à résoudre dans le cas général, nous allons étudier sa résolution dans le cas particulier des graphes sans circuits.

Questions :

1. Montrer que, dans les graphes sans circuits, ce problème peut se modéliser, et donc se résoudre, comme un simple problème de flot maximum. Pour cela, on se propose de transformer le graphe en remplaçant chaque sommet s_i du graphe par deux sommets s'_i et s''_i : pour tout arc de la forme (u, s_i) dans le graphe initial, on aura un arc (u, s'_i) (de même capacité) dans le graphe transformé, et, pour tout arc de la forme (s_i, v), on aura un arc (s''_i, v) (de même capacité). Puis, on ajoute deux nouveaux sommets s et p et, pour tout i, un arc de capacité $+\infty$ de s à v''_i et un arc de capacité $+\infty$ de v'_i à p.

2. Montrer ensuite, à l'aide d'un exemple, que cette transformation n'est pas toujours valide lorsqu'il y a des circuits, même si $k = 2$. Pour cela, on pourra considérer le graphe constitué de quatre sommets a, b, c, d (avec $a = t_1$ et $d = t_2$) et des cinq arcs (a, b), (b, c), (c, d), (c, a), (d, b), munis des capacités adéquates.

3. Enfin, appliquer les idées de la question 1 pour résoudre le problème de flot multiterminal entier maximum dans le graphe suivant, composé de 8 sommets dont 4 terminaux t_1, t_2, t_3, t_4 (chaque capacité vaut 1) :

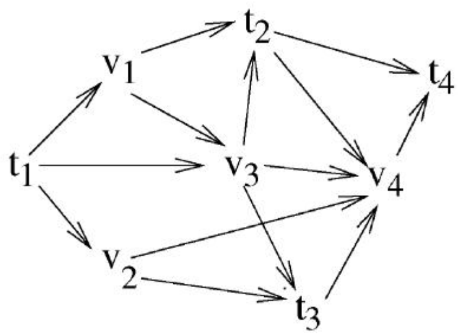

Figure 1: Flot multiterminal

Exercice IV

Soit un réseau de télécommunication composé de 6 nœuds a, b, c, d, e, f. Chaque lien du réseau est muni d'une bande passante (en Mo/s) et d'un coût de transmission unitaire. Les unités d'information qui circulent dans ce réseau doivent être acheminées de a et b vers e et f. On désire déterminer le débit maximum de ce réseau, tout en minimisant le coût total de transmission de l'information : formuler ce problème comme un problème vu en cours, puis le résoudre.

Lien	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(c,d)	(c,e)	(d,f)
Bande passante	3	2	2	2	5	3
Coût unitaire	2	1	2	2	6	3