

# Graphes de Cayley

CD & MCH

4 octobre 2002

# Table des matières

<b>1 Définitions</b>	<b>3</b>
1.1 Groupes . . . . .	3
1.1.1 Exemples . . . . .	3
1.2 Groupe opérant sur un ensemble . . . . .	4
1.2.1 Exemples . . . . .	5
1.2.2 Variantes . . . . .	5
1.3 Graphes . . . . .	5
1.3.1 Distances . . . . .	6
1.3.2 Symétries des graphes . . . . .	7
1.3.3 Variantes . . . . .	7
1.4 Graphes de Cayley . . . . .	8
1.4.1 Exemples . . . . .	9
1.4.2 Propriétés . . . . .	9
1.4.3 Variantes . . . . .	10
1.4.4 Exemples . . . . .	12
<b>2 Constructions</b>	<b>13</b>
2.1 Graphes . . . . .	13
2.2 Groupes . . . . .	13
2.2.1 Exemples . . . . .	14
<b>3 Aspects catégoriques</b>	<b>16</b>
3.1 Généralités . . . . .	16
3.1.1 Exemples . . . . .	16
3.2 Catégories de graphes . . . . .	17
3.3 Produits, noyaux, objet final . . . . .	18
3.3.1 Exemples . . . . .	18
3.4 Sommes, conoyaux, objet initial . . . . .	18
3.4.1 Exemples . . . . .	18
3.5 Objet nul . . . . .	19
3.5.1 Exemple . . . . .	19
3.6 Groupes et groupes abéliens . . . . .	19
3.7 Ensembles avec structure . . . . .	20
3.7.1 Ensembles pointés . . . . .	20

3.7.2	Ensembles munis d'une partition . . . . .	20
3.8	Produit tensoriel . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Catégories et graphes de Cayley</b>	<b>23</b>
4.1	Groupes avec générateur, graphes orientés connexes pointés . . . . .	23
4.1.1	Variante . . . . .	23
4.1.2	Exemple . . . . .	24
4.2	Graphes coloriés . . . . .	24
4.2.1	Exemple . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Hamiltonisme</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Isomorphismes d'Adám</b>	<b>28</b>
<b>7</b>	<b>Spectres</b>	<b>31</b>
7.1	Spectres . . . . .	31
7.2	Paramètres liés au spectre . . . . .	31
7.3	Groupes abéliens . . . . .	32
7.3.1	Exemple . . . . .	32
7.4	Autres groupes finis . . . . .	32
7.4.1	Cas du générateur stable par conjugaison . . . . .	32
7.4.2	Exemple . . . . .	33
7.5	Groupes engendrés par des transpositions . . . . .	33
7.5.1	Exemples . . . . .	33
<b>8</b>	<b>Graphes de Ramanujan</b>	<b>37</b>
8.1	Description . . . . .	37
8.1.1	Quaternions . . . . .	37
8.1.2	Variante . . . . .	38
8.1.3	Exemples . . . . .	38
<b>9</b>	<b>Diametre</b>	<b>39</b>
9.1	Constructions . . . . .	39
9.2	Groupes engendrés par des transpositions . . . . .	39
9.3	Groupes engendrés par des involutions . . . . .	39
<b>10</b>	<b>Un petit catalogue</b>	<b>42</b>
10.1	Les graphes planaires . . . . .	42

# Chapitre 1

## Définitions

### 1.1 Groupes

Un *groupe* est un ensemble  $G$  muni d'une opération  $*$ , c'est-à-dire d'une application  $G \times G \rightarrow G$ , soit  $(x, y) \mapsto x * y$ , qui a de plus les propriétés :

- pour tous  $x, y, z$  dans  $G$ , on a  $(x * y) * z = x * (y * z)$
- il y a un élément neutre  $e$  qui vérifie pour  $x$  de  $G$   $x e = e x = x$
- pour tout  $x$  de  $G$ , il y a un inverse  $y$  tel que  $x * y = y * x = e$ .

Pour des raisons d'économie et de légèreté de l'écriture, on ne met parfois aucun signe pour l'opération.

Un *homomorphisme de groupes*  $G \rightarrow H$  est une application  $f : G \rightarrow H$  telle que  $f(x * y) = f(x) * f(y)$  pour tous  $x, y$  de  $G$ . La première étoile est l'opération de  $G$ , la seconde celle de  $H$ .

Un *isomorphisme de groupes*  $G \rightarrow H$  est un homomorphisme qui est en plus bijectif. L'application réciproque est alors, elle aussi, un isomorphisme de groupes.

Un *sous-groupe* d'un groupe  $G$  est une partie  $H$  d'un groupe  $G$  non-vide, stable par l'opération de  $G$  et par passage à l'inverse. La restriction de l'opération de  $G$  à  $H$  en fait un groupe.

Soit  $x$  un élément du groupe  $G$ . S'il existe des entiers  $n > 0$  tels que  $x^n = e$ , on appelle *ordre* de  $x$  le plus petit de ces entiers.

#### 1.1.1 Exemples

Voici les tables des deux groupes non isomorphes à 4 éléments : la case à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  contient  $i * j$

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

	00	10	01	11
00	00	10	01	11
10	10	00	11	01
01	01	11	00	10
11	11	01	10	00

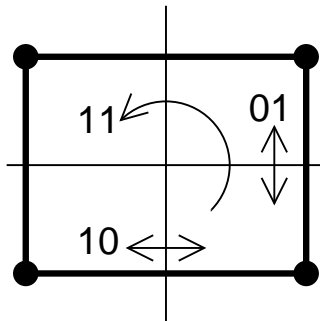


FIG. 1.1 – Symétries du rectangle dans le plan

On reconnaît dans le premier cas l'addition des entiers modulo 4 et dans le deuxième l'addition dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ . Il est isomorphe au groupe des isométries dans le plan d'un rectangle non carré (voir 1.1). L'élément neutre 00 est associé à l'identité.

Les groupes ci-dessus ont des sous-groupes à 2 éléments,  $\{0, 2\}$  pour le premier,  $\{00, 01\}$  entre autres pour le second.

Pour en savoir plus: [137]

## 1.2 Groupe opérant sur un ensemble

On dit qu'on a une *opération* d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $X$  quand on a une application  $G \times X \rightarrow X$ , soit  $(g, x) \mapsto g \star x$  qui vérifie en plus :

- pour tous  $g, h$  dans  $G$  et  $x$  dans  $X$ , on a  $(g * h) \star x = g \star (h \star x)$
- l'élément neutre  $e$  vérifie pour tout  $x$  de  $X$   $e \star x = x$

Il revient au même de dire qu'on a un homomorphisme du groupe  $G$  dans le groupe des bijections de  $X$  sur lui-même, muni de la composition, cet homomorphisme étant  $h \mapsto (x \mapsto h \star x)$ .

Si  $x \in X$ , l'*orbite*  $Gx$  de  $x$  par  $G$  (il faut bien sûr préciser l'opération en cas de doute) est l'ensemble des  $g \star x$ , où  $g$  parcourt  $G$ . Le *stabilisateur* de  $x$  est la partie de  $G$  formée des  $h$  tels que  $h \star x = x$ .

On constate que “être dans la même orbite” est une relation d'équivalence, dont l'ensemble des classes est noté  $X/G$ . Si  $G$  est fini, on a pour chaque  $x$  de  $X$  la relation  $|G| = |Gx| |\text{Stab}_G x|$ , et si  $X$  est fini aussi, le nombre d'orbites  $|X/G|$  satisfait

$$|G| |X/G| = \sum_{g \in G} |\{x; gx = x\}|.$$

Cette relation est le théorème de Burnside.

Ainsi, prendre une orbite est une façon de remplacer un objet “groupe opérant sur un ensemble” par un objet plus petit, avec le même groupe. Une autre “simplification” peut se produire: s'il existe une partition de  $X$  en parties  $X_i, i \in I$ , telles que  $gX_i$  est un des  $X_j$  quel que soit  $g \in G$ , on a une opération de  $G$  sur  $I$  déduite naturellement de celle de  $G$ . Cela devient intéressant quand  $X$  n'a qu'une

orbite, et que la partition n'est pas triviale (i.e.  $I$  a plus d'un élément, et ses éléments contiennent plus d'un élément de  $X$ ), et les parties s'appellent alors *blocs d'imprimitivité*. S'il n'y a pas de telle partition non-triviale, l'opération est dite *primitive*.

### 1.2.1 Exemples

Le groupe  $\mathfrak{S}_X$  des permutations de  $X$  est formé des bijections de  $X$ , avec la composition. Il a son opération naturelle sur  $X$ , à savoir  $(p, x) \mapsto p(x)$ .

#### Théorème de Lagrange

On considère un groupe fini  $G$ , l'ensemble  $X = G$  et l'opération d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  sur  $X$  définie par  $(h, x) = h * x$  par restriction de l'opération de  $G$ . Alors on constate que les orbites ont toutes le même nombre d'éléments, qui est  $|H|$ , donc  $|H| \cdot |G/H| = |G|$ .

En particulier, l'ordre de tout élément de  $G$  divise  $G$ .

#### Théorème de Cauchy

Soit  $G$  un groupe fini dont l'ordre est multiple du nombre *premier*  $p$ . On considère l'ensemble  $X$  des listes de  $p$  éléments de  $G$  indexées par  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  telles que  $g_1 * g_2 * \dots * g_p = e$ . Le groupe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  opère dessus par  $m \star (g_1, g_2, \dots, g_p) = g_{m+1}, g_{m+2}, \dots, g_p, g_1 \dots g_m$ . Les orbites ont 1 ou  $p$  éléments. Les orbites à un élément sont de la forme  $a, a, \dots, a$  avec  $a^p = e$ . Il y en a, car  $e, e, \dots, e$  en est une et leur nombre est multiple de  $p$  car l'ensemble  $X$  a  $|G|^{p-1}$  éléments et ce nombre est multiple de  $p$ . Donc il y a des éléments d'ordre  $p$  dans  $G$ .

#### Petit théorème de Fermat

On considère l'ensemble  $X$  des applications  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \{1, 2, \dots, k\}$ , qu'on interprète comme  $p$  emplacements et  $k$  couleurs. On fait agir  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  par  $(g, x) \mapsto gx$  avec  $(gx)(m) = x(m - g)$ . On regarde les orbites. Leur nombre est  $(k^p + (p - 1)k)/p$ . Le terme  $k^p$  vient de l'élément 0 et chacun des  $p - 1$  autres éléments du groupe donne  $k$  car il ne préserve que les applications constantes. Ce nombre est entier, donc  $p$  divise  $k^p + (p - 1)k$ , et donc aussi  $k^p - k$  pour tout entier  $k$ .

### 1.2.2 Variantes

Certains auteurs préfèrent que l'opération se fasse "de l'autre côté", c'est-à-dire que le résultat de l'opération de  $gh$  sur  $x$  soit celui de  $h$  sur le résultat de  $g$  appliqué à  $x$ , ce qui permet, en notant  $(g, x) \mapsto x^g$  l'opération d'avoir  $(x^g)^h = x^{(gh)}$ .

## 1.3 Graphes

Un *graphe* est formé d'un ensemble de *sommets* et d'un ensemble de paires de sommets, appelées les *arêtes*. Un graphe à 5 sommets et 6 arêtes est dessiné dans la figure 1.2.

Un *graphe orienté* est formé d'un ensemble de sommets et d'un ensemble de couples de sommets, appelés les *arcs*.

Sauf avis contraire, on ne considérera que des graphes ayant un ensemble fini de sommets et du coup un ensemble fini d'arêtes.

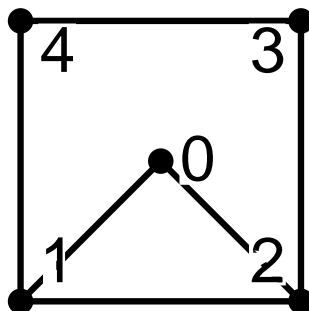


FIG. 1.2 – Un graphe à 5 sommets et 6 arêtes

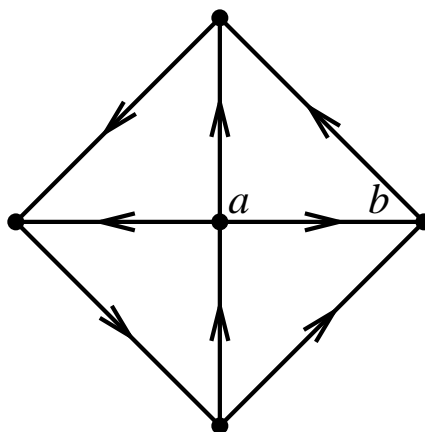


FIG. 1.3 – Un graphe à 5 sommets et 6 arêtes

### 1.3.1 Distances

Un graphe est dit *connexe* si toute paire de sommets  $\{x, y\}$  est reliée par une suite d'arêtes  $\{x_i, x_{i+1}\}, 0 \leq i < k$  avec  $x_0 = x$  et  $x_k = y$ . La longueur de la plus courte suite d'arêtes connectant  $x$  à  $y$  s'appelle *distance* de  $x$  à  $y$ . Pour un graphe orienté, ce sera la plus courte suite d'arcs successifs allant de  $x$  vers  $y$  qui sera prise en compte (cette distance n'est plus alors symétrique, en ce sens que l'on n'a plus forcément  $d(x, y) = d(y, x)$  comme dans le cas non-orienté). Le *diamètre* d'un graphe est la plus grande des distances entre deux sommets de ce graphe. L'*excentricité* d'un sommet est la distance maximum de ce sommet aux autres sommets. Le *rayon* est la plus petite des excentricités. Dans le cas orienté, il faut distinguer excentricités entrante et sortante et, du coup, rayons entrant et sortant, mais le diamètre n'est pas sujet à ces différences.

Le diamètre du graphe de la figure 1.2 est 2.

Le graphe de la figure 1.3 a pour rayon sortant 2 (sommet  $a$ ) et pour rayon entrant 3 (tous sommets sauf  $a$ ), et le diamètre vaut 4 (aller de  $b$  à  $a$ ).

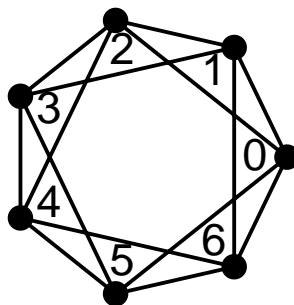


FIG. 1.4 – Un graphe sommet-transitif à 7 sommets

### 1.3.2 Symétries des graphes

Un graphe peut avoir des symétries, pompeusement appelées *automorphismes*, ce sont les bijections de l'ensemble des sommets qui préservent l'ensemble des arêtes. Le graphe de la figure 1.2 a deux automorphismes, l'identité (pas bien surprenant) et la bijection qui échange 1 et 2 d'une part, 4 et 3 d'autre part et laisse 0 en place. Cette bijection échange les arêtes  $\{01\}$  et  $\{02\}$  d'une part,  $\{14\}$  et  $\{23\}$  d'autre part, et laisse en place  $\{12\}$  et  $\{34\}$ .

Ces automorphismes forment un *groupe* pour la composition. Par là il faut entendre que si  $a, b$  sont des automorphismes,  $ab$  en est un aussi ( $ab$  est défini par  $(ab)(u) = a(b(u))$  pour tout sommet  $u$ ), que l'identité  $I$  (définie par  $I(u) = u$  pour tout sommet  $u$ ) est dans le groupe et vérifie  $aI = Ia = a$  pour tout automorphisme, que  $(ab)c = a(bc)$  et enfin que si  $a$  est un automorphisme, il y a un automorphisme  $a^{-1}$  appelé l'inverse de  $a$  tel que  $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ .

Il va de soi que si un automorphisme d'un graphe  $G$  envoie le sommet  $u$  sur le sommet  $v$ , alors il y a exactement autant d'arêtes incidentes à  $u$  qu'à  $v$ . Autrement dit, une condition nécessaire pour qu'il existe un automorphisme  $a$  de  $G$  tel que  $a(u) = v$  est que  $u$  et  $v$  aient le même *degré*. Mais cette condition n'est pas suffisante. Voir les sommets 0 et 3 dans la figure 1.2.

On dit qu'un graphe est *sommet-transitif* si pour tout couple de sommets il y a au moins un automorphisme qui envoie le premier sur le second. Ce n'est bien sûr pas le cas pour le graphe de la figure 1.2. Mais ce l'est pour le graphe de la figure 1.4.

On dit que le graphe est *arête-transitif* si pour tout couple d'arêtes il y a au moins un automorphisme qui envoie la première sur la seconde. Ce n'est le cas ni pour le graphe de la figure 1.2 ni celui de la figure 1.4. Ce l'est pour le graphe de la figure 1.5 qui n'est pourtant pas sommet-transitif.

Il va de soi que si le graphe est sommet-transitif, son diamètre se calcule en regardant la plus grande distance à partir d'un sommet donné.

### 1.3.3 Variantes

On peut aussi admettre des arêtes allant d'un sommet à lui-même, plusieurs arêtes joignant les deux mêmes sommets, plusieurs arêtes allant d'un même sommet de départ à un même sommet d'arrivée, etc. On parlera alors plutôt de *multigraphes*, de *multidigraphes*.

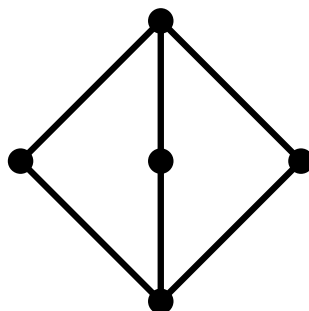


FIG. 1.5 – Un graphe arête-transitif à 5 sommets

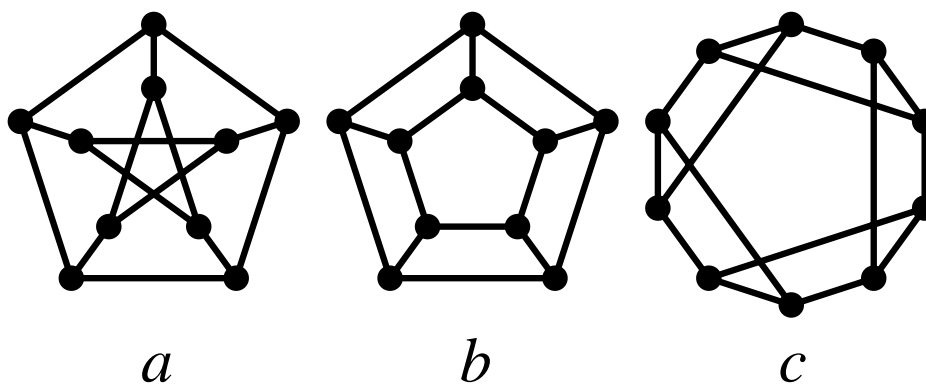


FIG. 1.6 – 3 graphes sommet-transitifs à 10 sommets

## 1.4 Graphes de Cayley

Un *graphe de Cayley* est un graphe obtenu à partir d'un groupe  $G$ , d'une partie  $S$  de  $G$  telle que  $e \notin S$  et  $a \in S \Leftrightarrow a^{-1} \in S$ . Ses sommets sont les éléments de  $G$ , ses arêtes sont les paires  $\{a, as\}$  avec  $a \in G$  et  $s \in S$ . Le graphe obtenu à partir de  $G$  et  $S$  sera noté  $\text{Cay}(G, S)$ .

Le graphe de la figure 1.4 est le graphe de Cayley attaché au groupe  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  et à la partie  $\{1, 2, 5, 6\}$  de ce groupe.

Un graphe de Cayley est toujours sommet-transitif, car on remarque que l'application  $x \mapsto hx$  (translation par  $h$ ) envoie l'arête  $\{x, xs\}$  sur l'arête  $\{hx, (hx)s\}$  car  $h(xs) = (hx)s$ .

Mais un graphe sommet-transitif n'est pas toujours un graphe de Cayley.

Le fameux graphe de *Petersen* (figure 1.6a) n'est en effet isomorphe à aucun des deux graphes de degré 3 que l'on obtient avec les groupes d'ordre 10 (figures 1.6b et 1.6c).

Cependant, si un graphe  $(V, E)$  est sommet-transitif, il existe un groupe  $G$ , un sous-groupe  $H$ , une partie  $S$  de  $G$  (qu'on peut exiger disjointe de  $H$ ) et une application surjective  $f : G \rightarrow V$  telle que

- $f(u) = f(v)$  si et seulement si  $u \in vH$
- $f(v)$  et  $f(u)$  sont adjacents si et seulement si  $u \in vHS$ , c'est-à-dire s'il existe  $h \in H$  et  $s \in S$  tel

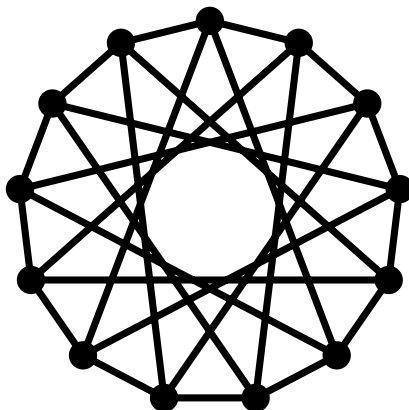


FIG. 1.7 – Un graphe de Cayley arête-transitif à 13 sommets

que  $u = vhs$

En effet, on peut prendre pour  $G$  le groupe des automorphismes de  $(V, E)$ , pour  $H$  le stabilisateur d'un sommet  $a$ , et pour  $S$  l'ensemble des  $s \in G$  tels que  $HaHs = Hb$  pour au moins un sommet  $b$  voisin de  $a$ . Alors l'application  $G/H \rightarrow V$  définie par  $gH \mapsto ga$  est un isomorphisme de graphes.

Cette caractérisation est dûe à G. Sabidussi [144].

### 1.4.1 Exemples

$G$  est le groupe additif de  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ,  $S = \{1, 5, -1, -5\}$ ,  $A$  est le sous-groupe du groupe multiplicatif de  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$  engendré par 5 ( $A$  est donc formé des multiplications par 1, 5, -1, -5 dans  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ).

On a ainsi un graphe de Cayley arête-transitif (figure 1.7).

Le graphe  $C_6$  est le 6-cycle, c'est-à-dire le graphe de Cayley du groupe  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  avec la partie  $\{1, 5\}$ . Son groupe d'automorphismes a 12 éléments, correspondant aux bijections  $a \mapsto ua + b$ , avec  $u \in \{1, 5\}$  et  $b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . Il y a une seule orbite, et deux partitions non triviales en blocs d'imprimitivité, à savoir  $\{\{0, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$  et  $\{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}\}$ .

Le groupe  $\mathfrak{S}_4$  des permutations de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  avec la partie  $\{(12), (234), (243)\}$  donne le graphe de la figure 1.8. Ce graphe fait partie de la famille des *cube-connected cycles*.

### 1.4.2 Propriétés

La *connexité* du graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  équivaut au fait que  $S$  engendre  $G$ , en d'autres termes, que tout élément de  $G$  est produit d'éléments de  $S$ .

Si un sous-groupe  $A$  d'automorphismes de  $G$  vérifie  $AS = S$ , alors  $A$  induit un automorphisme de graphes de  $\text{Cay}(G, S)$ . Si de plus l'opération de  $A$  sur  $S$  est transitive (c'est-à-dire, ne produit qu'une orbite), alors  $\text{Cay}(G, S)$  est arête-transitif.

Il peut arriver que le graphe de Cayley ait plus de symétries que ne le laissait prévoir les automorphismes du groupe. Par exemple, le graphe de la figure 1.9 est défini à partir de trois symétries-points

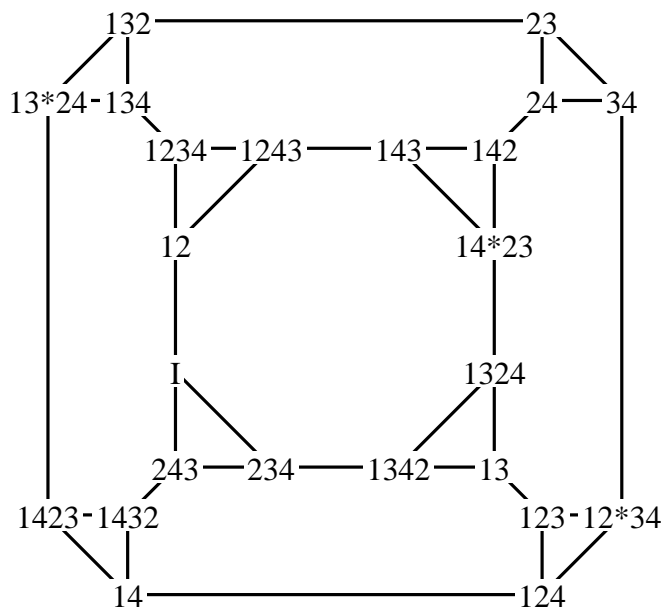


FIG. 1.8 – Un graphe de Cayley sur  $\mathfrak{S}_4$

autour de trois points non alignés de  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ . Il y a 216 automorphismes, et pas seulement les  $108 = 18 \cdot 6$  prévisibles au vu des 6 bijections affines conservant l'ensemble des 3 points.

### 1.4.3 Variantes

On peut autoriser  $e$  à faire partie de  $S$  (ce qui met une boucle en chaque sommet) ou renoncer à  $a \in S \Leftrightarrow a^{-1} \in S$ , ce qui permet d'avoir des graphes orientés, etc.

Si  $G$  admet un sous-groupe  $H$ , on peut construire deux choses :

- On forme le graphe dont les sommets sont les classes  $Hg$ , et les arêtes (ou les arcs) sont les paires (ou les couples)  $[Hg, Hgs]$ . On trouve ainsi un graphe régulier de degré  $|S|$ , mais pas forcément sommet-transitif, qui peut contenir des boucles (si  $H \cap S \neq \emptyset$ ) ou des arêtes multiples (si  $H \times S \rightarrow HS$  n'est pas injectif).

Plus généralement, on peut représenter l'opération d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $A$ , avec les arcs  $[a, s.a]$  ou les arêtes  $\{a, s.a\}$ , où  $a \in A$  et  $s \in S$ , avec  $S$  une partie de  $G$  ( $G$  opérant à droite sur  $A$ ).

- On forme le graphe dont les sommets sont les classes  $gH$ , et les arêtes (ou les arcs) sont les paires (ou les couples)  $[gH, gHsH]$ . On trouve ainsi un graphe régulier de degré  $|HSH|/|H|$ , sommet-transitif, qui peut contenir des boucles (si  $H \cap S \neq \emptyset$ ) ou des arêtes multiples (si  $H \times S \rightarrow HS$  n'est pas injectif). Ce graphe est connexe si  $H \cup S$  engendre  $G$ .

Enfin, on peut "décorer" le graphe de Cayley, par exemple en marquant les arêtes provenant du même élément du groupe.

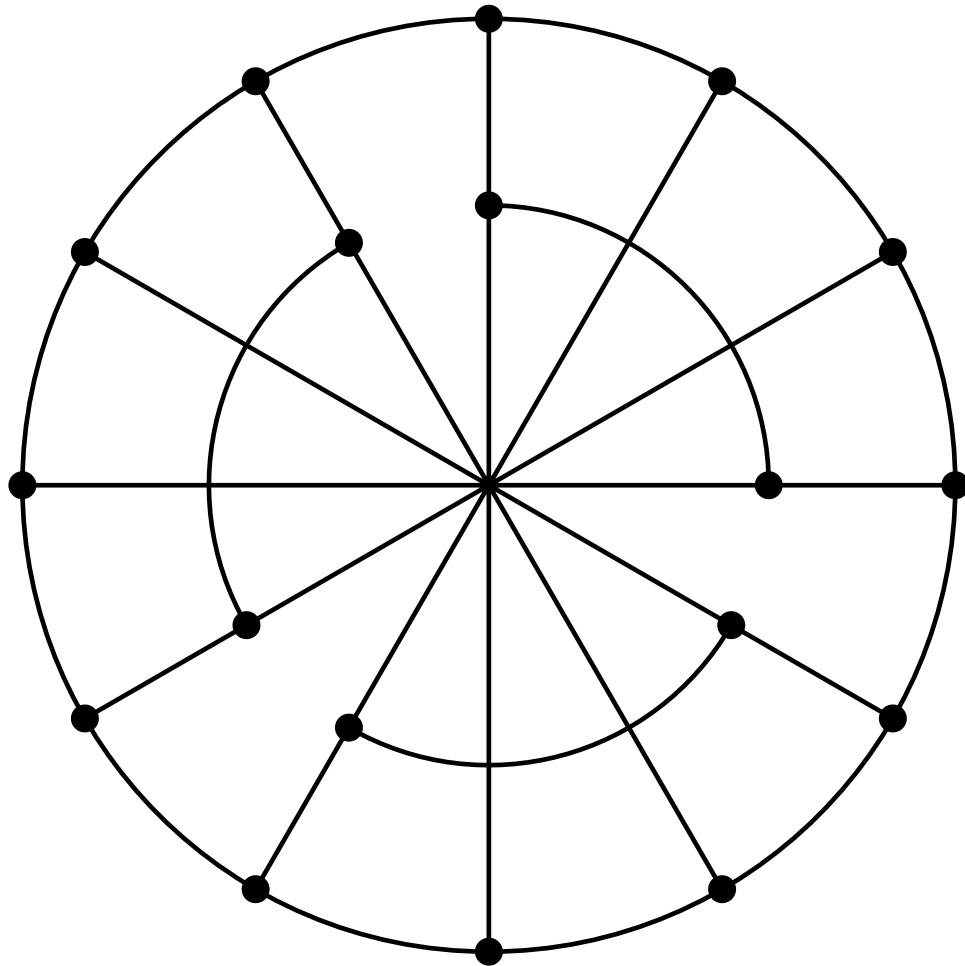


FIG. 1.9 – Un graphe de Cayley très symétrique

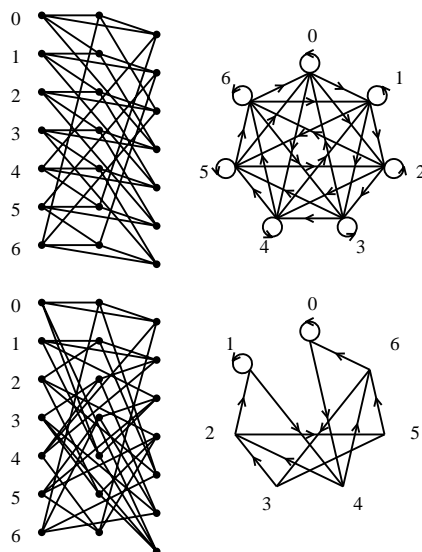


FIG. 1.10 – Un graphe de Cayley sur le groupe  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et ses projetés

### 1.4.4 Exemples

Prenons le produit semi-direct  $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , avec l'opération  $(a, b)(a', b') = a + 2^b a', b + b'$ , puis  $S = \{(0, 1), (1, 1)\}$  et  $H$  le sous-groupe engendré par  $(0, 1)$ .

Le graphe orienté et ses projections (classes  $gH$  en haut et  $Hg$  en bas) sont visibles dans la figure 1.10. Les classes sont les rangées à peu près horizontales dans la partie de gauche, l'orientation dans la partie de gauche va de la colonne de droite à la colonne centrale, de la colonne centrale à celle de droite, de la colonne de droite à celle de gauche. Les numéros indiquent la correspondance classe-sommet dans les deux cas.

Il y a des constructions voisines, certaines sont présentées par G. Gauyacq [76]. Essentiellemnt, on affaiblit la structure de groupe. On a encore une opération  $G \times G \rightarrow G$ . et une partie  $S$  de  $G$ . On forme le graphe avec pour sommets les éléments de  $G$  et pour arcs les  $(g, gs)$  avec  $g \in G$  et  $s \in S$ . La régularité des degrés sortants est acquise si  $|gS|$  ne dépend pas de  $g$ , celle des degrés entrants si  $x \mapsto xs$  est bijective de  $G$  sur  $G$ , pour chaque  $s \in S$  et la sommet-transitivité si  $x(yS) = (xy)S$  pour tous  $x, y$  de  $G$  et  $y \rightarrow xy$  bijective de  $G$  sur  $G$  pour tout  $x \in G$ .

## Chapitre 2

# Constructions

### 2.1 Graphes

On a des opérations pour fabriquer des graphes à partir de graphes existants.

Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes dont les ensembles des sommets et arêtes sont  $V_1$  et  $V_2$ ,  $E_1$  et  $E_2$ . On peut former sur l'ensemble produit  $V_1 \times V_2$  des ensembles d'arêtes, et donc des graphes, avec les règles :  $\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in V$  ssi

$$(u_1 = v_1 \wedge u_2 \sim v_2) \vee (u_1 \sim v_1 \wedge u_2 = v_2) \quad \text{somme cartésienne}$$

$$u_1 \sim v_1 \wedge u_2 \sim v_2 \quad \text{produit cartésien}$$

$$(u_1 = v_1 \wedge u_2 \sim v_2) \vee (u_1 \sim v_1 \wedge u_2 = v_2) \vee (u_1 \sim v_1 \wedge u_2 \sim v_2) \quad \text{produit fort}$$

$$(u_1 \sim v_1 \wedge u_2 = v_2) \vee (u_2 \sim v_2) \quad \text{composition}$$

Le *line-graphe* de  $G$  a pour sommets les arêtes de  $G$  et pour arêtes les paires d'arêtes qui ont un sommet en commun. Dans le cas orienté, on met un arc de  $(u_1, v_1)$  vers  $(u_2, v_2)$  si  $u_1 = v_2$ .

Bien sûr, on peut en inventer bien d'autres.

### 2.2 Groupes

On a des opérations qui à partir de groupes permettent d'en fabriquer d'autres, et des constructions *ex nihilo*. Certaines peuvent être mises à profit pour construire des graphes de Cayley.

On a par exemple le groupe  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs pour l'addition.

Comme il est *commutatif* (on dit aussi *abélien*), c'est-à-dire que  $a + b = b + a$  pour tous entiers  $a, b$ , ses sous-groupes sont *normaux*.

On dit qu'un sous groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est *normal* si pour tout  $g \in G$  on a  $gH = Hg$ . Il s'ensuit que l'ensemble quotient  $G/H$  des classes  $gH$ ,  $g \in G$  est naturellement muni d'une structure de groupe qui fait de la surjection naturelle  $g \mapsto gH$  un morphisme de groupes.

On a donc les quotients  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , qui sont des groupes abéliens, finis à  $n$  éléments pour  $n \neq 0$ ; on les appelle groupes *cycliques*. Le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et  $\{1, -1\}$  est le *cycle* à  $n$  sommets.

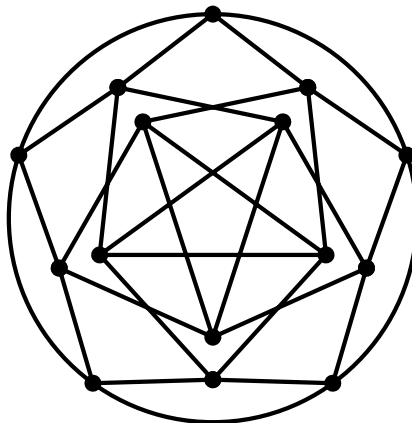


FIG. 2.1 – Le line-graphe du graphe de Petersen

On peut faire le *produit direct* de deux groupes  $G_1$  et  $G_2$ , c'est le groupe dont l'ensemble  $G_1 \times G_2$  est le produit des ensembles  $G_1$  et  $G_2$ , et l'opération est donnée par  $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 * b_2)$  pour tous  $a_1, b_1$  de  $G_1$  et  $a_2, b_2$  de  $G_2$ .

Si  $S_1$  et  $S_2$  sont des parties de  $G_1$  et  $G_2$  respectivement, on obtient avec les parties de  $G_1 \times G_2$

- $e_1 \times S_2 \cup S_1 \times e_2$  la somme cartésienne
- $S_1 \times S_2$  le produit cartésien
- $e_1 \times S_2 \cup S_1 \times e_2 \cup S_1 \times S_2$  le produit fort
- $S_1 \times S_2$  la composition

des graphes de Cayley attachés à  $G_1, S_1$  et  $G_2, S_2$ .

Une construction plus générale, le *produit semi-direct*. On a un groupe  $G$  et une opération  $\star$  de  $H$  sur  $G$  par automorphismes (ce qui veut dire que pour chaque  $h \in H$  l'application  $g \mapsto h \star g$  est un automorphisme de  $G$ ). Alors on définit le groupe  $G \rtimes H$  dont l'ensemble est  $G \times H$  et l'opération est définie par  $(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 * h_1 \star g_2, h_1 * h_2)$ . Alors la projection naturelle sur  $H$  est un morphisme de groupes, de noyau  $G \times 1$ , qui est un sous-groupe normal de  $G \rtimes H$  et qui est isomorphe à  $G$ .

Parmi les produits semi-directs, notons celui où  $H$  est le groupe des automorphismes de  $G$ , avec son opération naturelle. Notons aussi le produit en *couronne*  $G \wr H$ , produit semi-direct de  $G^H$  et  $H$ , avec l'opération de  $H$  sur  $G^H$  donnée par  $(h \star g)(i) = g(hi)$  pour toute application  $g : H \rightarrow G$  (autrement dit  $g \in G^H$ ).

### 2.2.1 Exemples

**Le théorème des restes chinois** Si  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, le morphisme naturel de groupes et même d'anneaux  $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un isomorphisme.

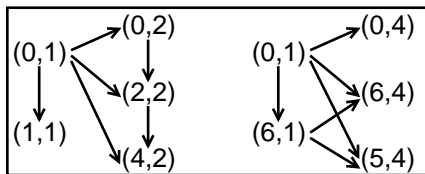


FIG. 2.2 – Voisinages de l'origine

Le produit semi-direct de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  attaché à  $0 \star x = x$  et  $1 \star x = -x$  est isomorphe à  $\mathfrak{S}_3$ , le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments assimilés aux 3 éléments du groupe  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  par  $(x, y) \mapsto (z \mapsto x + y \star z)$ .

**Les groupes à 10 éléments et leurs graphes de Cayley de degré 3** De tels groupes ont  $4 + 5t$  éléments d'ordre 5 et un nombre impair d'éléments  $1 + 2s$  d'ordre 2. Donc  $1 + 4 + 5t + 1 + 2s = 10$ . Donc  $t = 0$ . Si un élément  $a$  d'ordre 5 commute avec un élément  $b$  d'ordre 2, il y a un élément d'ordre 10,  $ab$ , et alors le groupe est cyclique. Sinon, on doit avoir  $bab = a^{-1}$ , et on a le groupe diédral, qui est produit semi-direct de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  et de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; il y a alors 5 éléments d'ordre 2.

Pour former un graphe de degré 3, avec le groupe cyclique, on doit prendre l'élément d'ordre 2, et soit un élément d'ordre 5 et son inverse, (ce qui donne le 1.6.b), soit un élément d'ordre 10 et son inverse, (ce qui donne le 1.6.c). Pour le groupe diédral, on doit prendre soit un élément d'ordre 2, et un élément d'ordre 5 et son inverse, (ce qui donne le le graphe 1.6.b), soit 3 éléments d'ordre 2 (ce qui donne le graphe 1.6.c).

Le graphe orienté de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  n'est en général pas isomorphe à  $\text{Cay}(G, S^{-1})$ , comme le montre l'exemple suivant  $G$  est le produit semi-direct du groupe additif  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  et du sous-groupe à 3 éléments  $\{1, 2, 4\}$  du groupe multiplicatif de l'anneau  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , avec l'opération naturelle  $(x, m) \star (y, n) = (x + my, mn)$ , et la partie  $S = \{(1, 1), (0, 2), (2, 2), (4, 2)\}$  Le graphe induit sur voisinage sortant du neutre, pour  $\text{Cay}(G, S)$  et pour  $\text{Cay}(G, S^{-1})$  est dessiné sur la figure 2.2.

## Chapitre 3

# Aspects catégoriques

### 3.1 Généralités

Une *catégorie* est une classe (on n'entre pas dans les subtilités classe vs. ensemble) d'objets et de morphismes. Chaque morphisme va d'un objet (sa *source*) à un objet (son *but*). Les morphismes de source  $X$  et de but  $Y$  donnés dans une catégorie forment un ensemble  $\text{Hom}_C(X, Y)$ . On peut omettre le  $C$  si cela ne crée pas d'ambiguïté. On peut composer deux morphismes dès lors que le but du premier est la source du second, et alors le composé est un morphisme qui va de la source du premier au but du deuxième. En outre chaque objet  $X$  a un morphisme identité  $1_X$  qui l'a pour source et but. Les égalités suivantes sont exigées  $(ab)c = a(bc)$  dès qu'on peut composer les morphismes  $a, b, c$  et  $a1_X = a, 1_Xb = b$  dès que l'on peut composer l'identité  $1_X$  d'un objet avec les morphismes  $a$  et  $b$ .

Un *isomorphisme* entre deux objets  $X$  et  $Y$  est un morphisme  $j : X \rightarrow Y$  tel qu'il existe un morphisme  $k : Y \rightarrow X$  avec  $kj = 1_X$  et  $jk = 1_Y$ , où  $1_X$  et  $1_Y$  sont les identités de  $X$  et  $Y$ .

Un *foncteur*  $F$  est une application d'une catégorie  $C$  vers une catégorie  $D$ , telle que pour tous objets  $c_1, c_2$  de  $C$ , et tout morphisme  $a$  de  $c_1$  vers  $c_2$  le résultat  $F(a)$  est un morphisme de  $F(c_1)$  vers  $F(c_2)$ ; on exige de plus que l'identité  $i_1$  de l'objet  $c$  a pour image  $F(i)$  l'identité de  $F(c)$ , et que  $F(ab) = F(a)F(b)$  pour tous morphismes composables  $a, b$  de  $C$ .

Un foncteur  $F : C \rightarrow D$  a un foncteur *adjoint à droite*  $G : D \rightarrow C$  si on a un morphisme naturel  $j_X : X \rightarrow GF(X)$  telle que l'application  $\text{Hom}_D(F(X), Y) \rightarrow \text{Hom}_C(X, G(Y))$  définie par  $f \mapsto G(f)j_X$  est une bijection pour tous  $X$  et  $Y$ . On a alors aussi un morphisme naturel  $i_Y : FG(Y) \rightarrow Y$  telle que  $\text{Hom}_C(X, G(Y)) \rightarrow \text{Hom}_D(F(X), Y)$  définie par  $g \mapsto i_YF(g)$  soit la bijection inverse de la précédente. De sorte que  $F$  est *adjoint à gauche* de  $G$ .

Pour plus de détails voir [25].

#### 3.1.1 Exemples

Une catégorie bien usuelle est **Ens**, celle dont les objets sont les ensembles, et les morphismes sont les applications.

Une autre est **Grp**, celle des groupes, avec comme morphismes les homomorphismes de groupe. On a alors un foncteur d'oubli  $U$ : au groupe  $G$  on associe  $U(G)$ , l'ensemble sous-jacent à  $G$  et au morphisme  $a : G \rightarrow H$  on associe l'application  $U(a) : U(G) \rightarrow U(H)$  qui n'est autre que  $a$ , en oubliant ses propriétés supplémentaires.

Une troisième est celle des monoïdes, **Mon**. Les monoïdes sont comme les groupes, sauf qu'on n'exige pas que chaque élément admette un inverse. Par exemple, les éléments d'un anneau, avec la multiplication de cet anneau, forment un monoïde. Voici la table de la multiplication pour l'anneau  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

On voit que 1 est neutre, que 3 est son propre inverse, mais que ni 2 ni 0 n'ont d'inverse.

On peut observer un premier foncteur d'oubli  $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Mon}$ , et un deuxième  $\mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Ens}$  dont la composition donne  $U$ .

On a un foncteur en sens inverse, des ensembles vers les monoïdes qui à un ensemble  $E$  associe le *monoïde libre* sur  $E$ , c'est l'ensemble des suites finies d'éléments de  $E$ , avec la concaténation  $([a_1 \dots a_k], [b_1 \dots b_\ell]) \mapsto [a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell]$ , dont la suite vide  $[]$  est le neutre. On notera que ce foncteur est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de **Mon** dans **Ens**.

On a aussi un foncteur de **Ens** vers **Grp**, qui à un ensemble  $E$  associe le *groupe libre* sur  $E$ , et qui est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli  $U$  de **Grp** dans **Ens**.

On s'accroche pour la description de cette chose! C'est un groupe. On considère l'ensemble des chaînes d'éléments de la forme  $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ , avec chaque  $a_i$  qui est soit un élément de  $E$  soit l'inverse (formel) d'un élément de  $E$ , avec l'opération de concaténation des chaînes, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par  $[aa^{-1}] = [] = [a^{-1}a]$ . Ce qui veut dire que dans une chaîne on peut sans changer la classe d'équivalence insérer ou supprimer deux éléments successifs inverses l'un de l'autre, et que deux chaînes seront considérées comme équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une succession de telles modifications.

Si on a une application  $f : E \rightarrow F$ , le foncteur **Ens**  $\rightarrow$  **Mon** introduit plus haut donne un morphisme de monoïdes  $[a_1, \dots, a_k] \mapsto [f(a_1), \dots, f(a_k)]$ . De même pour la formation de groupes libres.

En particulier, si  $E = \emptyset$ , (l'ensemble vide), le monoïde libre sur  $E$  et le groupe libre sur  $E$  sont réduits à un élément, ce qui ne laisse guère de choix pour l'opération, Pour  $|E| = 1$ , le monoïde libre est isomorphe à  $\mathbb{N}$  avec son addition et le groupe libre à  $\mathbb{Z}$  avec son addition.

### 3.2 Catégories de graphes

On doit décider des objets: les graphes, bien sûr, et des morphismes. Le plus naturel est de décider qu'un morphisme de graphes  $G \rightarrow H$  est une application de l'ensemble des sommets de  $G$  sur ceux de  $H$  qui envoie toute arête de  $G$  sur une arête de  $H$ . Cette option 1 est la plus appropriée dans les problèmes de colorations de graphes: voir par exemple [111].

Une autre décision (option 2) raisonnable est que chaque arête est envoyée sur un arête ou un sommet. Ce qui revient à admettre tacitement que chaque sommet a une boucle. Dans cette seconde option, il y a beaucoup plus de morphismes entre deux graphes donnés. Par exemple, les projections de la somme cartésienne vers ses composantes sont alors des morphismes de graphes, ce qui n'est pas le cas — sauf exceptions triviales — pour la première option.

Le line graphe est un foncteur de la catégorie des graphes (options 1 ou 2) vers la catégorie des graphes (option 2).

Pour les graphes orientés, on prendra pour objets les graphes orientés, pour morphismes de  $G$  vers  $H$  les applications qui envoient arc sur arc (option 1). Là aussi, il y a l'option de replier les arcs.

### 3.3 Produits, noyaux, objet final

Dans une catégorie, on appelle *produit* de deux objets  $X, Y$ , un objet  $P$  muni de deux morphismes  $p_X : P \rightarrow X$  et  $p_Y : P \rightarrow Y$  tel que chaque fois qu'on a un objet  $T$  avec deux morphismes  $q_X : T \rightarrow X$  et  $T \rightarrow Y$  on a un unique morphisme  $q_Z : T \rightarrow Z$  avec  $q_X = p_X q_Z$  et  $q_Y = p_Y q_Z$ . Cela n'existe pas toujours ! Mais si cela existe, c'est unique à isomorphisme près.

Pour les ensembles, le produit convient. Pour les groupes, le produit direct convient. Pour les graphes (option 1), le produit cartésien convient; pour les graphes (option 2) le produit fort convient.

On peut aussi former (éventuellement) le produit d'une famille d'objets:  $X_i, i \in I$ ; c'est l'objet  $P$  s'il existe muni d'une famille  $p_i : P \rightarrow X_i$  de morphismes tel que pour tout objet  $Q$  muni d'une famille  $q_i : Q \rightarrow X_i$  il existe un unique morphisme  $q : Q \rightarrow P$  tel que  $q_i = p_i q$  pour tout  $i \in I$ . Cela n'existe pas toujours ! Mais si cela existe, c'est unique à isomorphisme près.

Le *noyau* d'une paire de morphismes  $k_1, k_2 : X \rightarrow Y$  est l'objet  $K$  muni d'un morphisme  $i : K \rightarrow X$  tel que  $k_1 i = k_2 i$  tel que pour tout objet  $L$  muni d'un morphisme  $j : L \rightarrow X$  il existe un unique morphisme  $n : L \rightarrow K$  tel que  $j = in$ . On peut bien sûr définir de même le noyau d'une famille de morphismes  $k_i : X \rightarrow Y$ . Cela n'existe pas toujours ! Mais si cela existe, c'est unique à isomorphisme près.

L'objet *final*  $T$  d'une catégorie  $C$  est tel que  $\text{Hom}(X, T)$  a exactement un élément pour tout objet  $X$  de  $C$ .

Refrain: Cela n'existe pas toujours...

#### 3.3.1 Exemples

La catégorie des ensembles a un élément final: n'importe quel ensemble à un élément convient. Celle des groupes aussi: le groupe à un élément. Celle des graphes (option 2) aussi: le graphe à un sommet. En revanche celle des graphes (option 1) n'en a pas.

### 3.4 Sommes, conoyaux, objet initial

On définit de même la somme de  $X$  et  $Y$ : c'est —s'il en existe— un objet  $S$  muni de deux morphismes  $i_X : X \rightarrow S$ ,  $i_Y : Y \rightarrow S$  tel que tout objet  $Z$  muni de deux morphismes  $f_X : X \rightarrow Z$ ,  $f_Y : Y \rightarrow Z$  donne lieu à un unique morphisme  $m : S \rightarrow Z$  tel que  $f_X = m i_X$  et  $f_Y = m i_Y$ .

L'objet *initial*  $I$ , s'il en existe, est caractérisé par  $|\text{Hom}(I, X)| = 1$  pour tout objet  $X$ .

Le conoyau de deux morphismes  $k_1, k_2 : X \rightarrow Y$  est l'objet  $K$  s'il existe muni d'un morphisme  $p : Y \rightarrow K$  tel que  $p k_1 = p k_2$  et que tout morphisme  $j : Y \rightarrow L$  tel que  $j k_1 = j k_2$  se factorise de façon unique en  $j = l p$

#### 3.4.1 Exemples

La catégorie des ensembles a pour élément initial l'ensemble vide, celle des groupes le groupe à 1 élément, celle des graphes le graphe sans sommet (et sans arête).

### 3.5 Objet nul

Si la catégorie  $C$  a un objet  $N$  initial et final, cet objet est dit *nul*. Dans ce cas chaque paire d'objets  $X, Y$  admet un morphisme  $0 : X \rightarrow Y$  appelé le morphisme nul qui est le composé de l'unique morphisme  $X \rightarrow N$  (vu que  $N$  est final) et de l'unique morphisme  $N \rightarrow Y$  (vu que  $N$  est initial).

Dans ce cas il y a un morphisme naturel de la somme de deux éléments  $X, Y$  vers leur produit: on choisit les morphismes  $I_X : X \rightarrow X$  et  $0 : X \rightarrow Y$ , ce qui donne un morphisme  $a_X : X \rightarrow X \times_C Y$  et de même les deux morphismes  $I_Y : Y \rightarrow Y$  et  $0 : Y \rightarrow X$  donnent un morphisme  $a_Y : Y \rightarrow X \times_C Y$ , et cette paire  $a_X, a_Y$  donne un morphisme:  $X +_C Y \rightarrow X \times_C Y$ .

#### 3.5.1 Exemple

La catégorie **Ens** n'a pas d'objet nul: il n'y a pas de morphisme du tout de son objet final (à 1 élément) vers son objet initial (vide) et *a fortiori* pas d'isomorphisme.

Le groupe à 1 élément est nul dans la catégorie **Grp** et aussi dans la catégorie **GrAb**. Dans cette dernière, le morphisme somme à produit est un isomorphisme.

**Présentation de groupe** Il s'agit de construire un groupe. On se donne un ensemble générateur  $G$ , et un ensemble de relations  $R$ , c'est-à-dire d'éléments du groupe libre  $\langle G \rangle$  sur  $G$ . On forme le sous-groupe normal  $H$  de  $\langle G \rangle$  minimal parmi ceux qui contiennent  $R$ , et le groupe-quotient  $K = \langle G \rangle / H$ .

Alors  $K$  peut être vu comme l'objet initial dans la catégorie dont les objets sont les groupes  $L$  munis d'un morphisme d'ensembles  $G \rightarrow U(L)$  dans lesquels les images des éléments de  $R$  sont le neutre.

### 3.6 Groupes et groupes abéliens

On a une catégorie **GrAb** des groupes *abéliens* (on dit aussi commutatifs). Ses objets sont les groupes abéliens (ce qui veut dire  $ab = ba$  pour tous éléments  $a, b$  du groupe) et les morphismes tout simplement les morphismes de groupes. Il y a donc un foncteur d'oubli très simple de **GrAb** dans **Grp**.

Mais les deux catégories sont bien différentes. La somme dans **GrAb** de deux groupes  $X, Y$  dans **GrAb** est isomorphe au produit direct, avec  $X \rightarrow P$  défini par  $x \mapsto (x, e_Y)$  et  $Y \rightarrow P$  par  $y \mapsto (e_X, y)$ . La somme dans **Grp** de  $X$  et  $Y$  est l'ensemble dont les éléments sont les chaînes  $[x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k]$ , avec l'opération de concaténation, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par  $[x_i e_Y x_j] = [x_i x_j]$  et  $[y_i e_X y_j] = [y_i y_j]$ .

Ainsi la somme de deux exemplaires de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans **GrAb** est un groupe à 4 éléments, alors que la somme de deux exemplaires de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dans **Grp** est isomorphe au produit semi-direct  $\mathbb{Z} \rtimes \{-1, 1\}$  défini par  $(a, s)(b, t) = (a + st, st)$ . L'isomorphisme est donné (par exemple) par  $x \mapsto (0, (-1)^x)$  si  $x$  est dans le premier exemplaire, et  $0 \mapsto (0, 1)$  et  $1 \mapsto (1, -1)$  pour les éléments du second exemplaire.

**Adjoint à gauche** Ce foncteur d'oubli  $c$  de **GrAb** dans **Grp** a un adjoint à gauche qui est défini à l'aide du morphisme (dans **Grp**)  $G \rightarrow c(G/G')$  où  $G'$  est le sous groupe (normal) de  $G$  engendré par les  $ghg^{-1}h^{-1}$ , où  $g$  et  $h$  parcourent  $G$ , ou si on préfère, à l'aide du morphisme  $c(G)/(c(G))' \rightarrow G$  qui est en fait un isomorphisme pour tout groupe  $G$  de **GrAb**, car le groupe  $c(G)$  est isomorphe à  $G$  et tous les  $ghg^{-1}h^{-1}$ , avec  $g$  et  $h$  parcourent  $c(G)$ , sont égaux au neutre.

**Pas d'adjoint à droite** En revanche,  $c$  n'a pas d'adjoint à droite  $w$ . En effet, on devrait avoir des ensembles de morphismes égaux (à isomorphisme naturel près)

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(cX +_{\mathbf{Grp}} cY, Z) = \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(cX, Z) \times \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(cY, Z) = \text{Hom}_{\mathbf{GrAb}}(X, wZ) \times \text{Hom}_{\mathbf{GrAb}}(Y, wZ) = \text{Hom}_{\mathbf{GrAb}}(X +_{\mathbf{GrAb}} Y, wZ) = \text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(c(X +_{\mathbf{GrAb}} Y), Z)$$

On devrait donc avoir  $cX +_{\mathbf{Grp}} cY$  et  $c(X +_{\mathbf{GrAb}} Y)$  isomorphes; ce n'est pas vrai en général (on l'a vu pour  $X = Y = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ).

Et voilà. C'était une preuve typique de la théorie des catégories !

## 3.7 Ensembles avec structure

On a déjà vu des exemples (groupes, graphes, etc.) en voici d'autres qui vont revenir par la suite.

### 3.7.1 Ensembles pointés

Les objets sont les ensembles non vides avec un élément spécial. Soit  $(E, e)$  et  $(D, d)$  de tels objets. Un morphisme  $f$  dans cette catégorie de  $(D, d)$  vers  $(E, e)$  est une application de  $D$  dans  $E$  qui de plus envoie  $d$  sur  $e$ .

Cette catégorie a un objet nul: un ensemble a un seul élément, qui est son élément spécial convient. Elle a des produits:  $E \times D$  avec le point  $(e, d)$  est le produit de  $(E, e)$  et  $(D, d)$ , des noyaux: si  $f, g: (D, d) \rightarrow (E, e)$  sont des morphismes, le sous-ensemble de  $D$  formé des  $x$  tels que  $f(x) = g(x)$ , avec l'élément  $d$  est noyau de la paire  $f, g$ , des sommes: l'union disjointe de  $E$  et  $F$  quotientée par  $e = d$  avec l'élément spécial formé de  $e$  et  $d$ , des conoyaux: si  $f, g: (D, d) \rightarrow (E, e)$  sont des morphismes, on quotiente  $E$  par la relation d'équivalence engendrée par les  $f(x) = g(x), x \in D$ .

### 3.7.2 Ensembles munis d'une partition

Les objets sont les ensembles munis d'une partition. Les morphismes de  $(E, P)$  vers  $(F, Q)$  sont les applications  $E \rightarrow F$  telles que des éléments de la même classe dans  $E$  aient pour images des éléments de la même classe dans  $F$ .

Il y a un objet initial  $(\emptyset, \emptyset)$  et un objet final, l'ensemble à 1 élément avec sa seule partition. Le produit de  $(E, P)$  et  $(F, Q)$  est  $E \times F$  muni des parties  $A \times B$ , avec  $A, B$  parcourant  $P, Q$ . Le noyau de  $f, g: (E, P) \rightarrow (F, Q)$  est le sous-ensemble  $H$  de  $E$  formé des  $x \in E$  tels que  $f(x) = g(x)$ , avec les parties de la forme  $H \cap A, A \in P$  qui ne sont pas vides.

Il y a des sommes: (prendre l'union disjointe de  $E$  et  $F$ , avec les parties copiées de celles qu'on a dans  $P$  et  $Q$ ), et des conoyaux: pour former un conoyau de  $f, g: (E, P) \rightarrow (F, Q)$  prendre le conoyau  $j: F \rightarrow K$  d'ensembles et la partition  $R$  de  $K$  la plus fine telle que les  $j(A), A \in Q$  sont contenus dans des parties appartenant à  $R$ .

Par exemple, si  $E = \{a\}$  avec la partition  $\{\{a\}\}$ , si  $F = \{c, d, e\}$  avec la partition  $\{\{c, d\}, \{e\}\}$ , si  $f(a) = c$  et  $g(a) = e$  alors dans le conoyau  $(K, R)$  l'ensemble  $K$  a deux éléments,  $j(c) = j(e)$  et  $j(d)$ , comme  $c$  et  $d$  sont dans la même classe, il faut mettre  $j(c)$  et  $j(d)$  dans la même classe, donc  $R = \{K\}$ .

On notera que le foncteur d'oubli de la catégorie des ensembles avec partition dans **Ens** (on oublie la partition) a un adjoint à droite et un adjoint à gauche. Pour l'adjoint à droite, on munit chaque ensemble  $Y$  de sa partition (grossière) en au plus une partie. Pour l'adjoint à gauche on munit chaque ensemble de sa partition en parties à un élément.

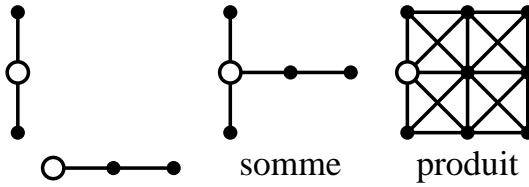


FIG. 3.1 – Somme et produit de deux chemins pointés

### 3.8 Produit tensoriel

Il peut arriver que l'ensemble  $\text{Hom}_C(X, Y)$  soit naturellement lui aussi un objet de la catégorie  $C$ , ce qui veut dire que si  $f : Y \rightarrow Z$  est un morphisme, alors  $\text{Hom}_C(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_C(X, Z)$  défini par  $g \mapsto fg$  est un morphisme de  $C$ , que  $\text{Hom}_C(Z, T) \rightarrow \text{Hom}_C(Y, T)$  défini par  $g \mapsto gf$  est un morphisme de  $C$ , etc. Dans ce cas on peut envisager l'existence d'un objet de  $C$ , noté  $X \otimes Y$  tel que  $\text{Hom}_C(X \otimes Y, Z) \simeq \text{Hom}_C(X, \text{Hom}_C(Y, Z))$ .

Plus généralement, si les morphismes de  $C$  ont une structure dans  $D$ , on peut tenter de représenter  $\text{Hom}_D(X, \text{Hom}_C(Y, \bullet))$  par un objet dans  $C$ , c'est-à-dire de former un objet  $X \otimes Y$  de  $C$  tel que  $\text{Hom}_D(X, \text{Hom}_C(Y, Z)) \simeq \text{Hom}_C(X \otimes Y, Z)$ .

Dans la catégorie **Ens**, c'est le produit cartésien. Pour la catégorie des groupes abéliens, en donnant à  $\text{Hom}_{\text{GrAb}}$  la structure de groupe abélien par  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , c'est le produit tensoriel habituel.

Un autre exemple fort utilisé en algèbre : soit  $R$  un anneau,  $\text{Mod}_g$  la catégorie des modules à gauche sur  $R$  et  $\text{Mod}_d$  celle des modules à droite sur  $R$ . On a une structure naturelle de  $R$ -module à droite sur  $\text{Hom}(M, G)$  (les applications préservant l'addition — économisons l'écriture d'un foncteur d'oubli) si  $M$  est un module à gauche et  $G$  un groupe commutatif, en définissant  $f\lambda$  par  $(f\lambda)(m) = f(\lambda m)$  pour tout  $m \in M$ . On a alors un groupe abélien  $N \otimes M$  tel que  $\text{Hom}_{\text{GrAb}}((N \otimes M), G) \simeq \text{Hom}_{\text{Mod}_d}(N, \text{Hom}_{\text{Mod}_g}(M, G))$  de façon naturelle.

Si  $C$  a un objet initial  $I$ , on a  $|\text{Hom}_C(I, Y)| = 1$  pour tout  $Y$ , donc si on a un foncteur d'oubli de  $C$  dans **Ens** qui est fidèle, c'est-à-dire transforme des morphismes distincts de  $C$  en morphismes distincts d'ensembles, on a aussi  $|\text{Hom}_C(X, \text{Hom}_C(I, Y)) = 1|$ , ce qui se traduit par :  $X \otimes I$  existe, et est isomorphe à  $I$ .

Pour la catégorie des graphes, on met une arête entre deux morphismes de graphes  $f, g : G \rightarrow H$  si pour tout sommet  $x$  de  $G$  les sommets  $f(x)$  et  $g(x)$  sont adjacents dans  $H$  (ce qui autorise  $f(x) = g(x)$  pour l'option 2).

Examinons par exemple, le  $n$ -cycle  $C_n$  pour  $n \geq 3$  et l'arête  $K_2$ .

Dans l'option 1, on a deux morphismes  $C_n \rightarrow K_2$  liés par une arête si  $n$  est pair et aucun si  $n$  est impair. Pour l'option 2, on a un graphe complet à  $2^n$  sommets dans les deux cas.

Dans l'option 1, il n'y a aucun morphisme  $C_3 \rightarrow C_4$ , dans l'option 2 il y en a 28, qui sont les 4 constants et les 24 qui envoient un sommet du triangle (3 choix) sur un sommet du carré (4 choix) et les deux autres sur un sommet voisin (2 choix). Le graphe de ces morphismes n'est pas complet.

Dans les graphes pointés, avec l'option 2, le morphisme somme à produit est facile à voir (figure 3.1):

Dans la catégorie des graphes orientés, on a aussi la possibilité de structurer en graphe orienté  $\text{Hom}(G, H)$ , en mettant un arc de  $f$  vers  $g$  si on a pour tout  $x \in G$  un arc de  $f(x)$  vers  $g(x)$  dans  $H$ .

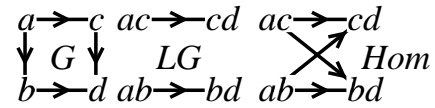


FIG. 3.2 – Un graphe orienté  $G$  avec  $\text{Hom}(U_1, G)$  non isomorphe au line-graphe

On note que le line-graphe dans les graphes orientés est un foncteur, presque isomorphe naturellement à  $\text{Hom}(U_1, \bullet)$  (abréviation de  $H \mapsto \text{Hom}(U_1, H)$ ) pour l'option 1, où  $U_1$  est le graphe orienté à 2 sommets et un arc qui les joint. En effet, le graphe orienté  $G$  de la figure 3.2 montre que ces foncteurs ne sont pas isomorphes. Cependant on peut considérer la catégorie des graphes orientés qui n'ont pas ce graphe  $G$  comme sous-graphe induit, avec l'option 1 pour le choix des morphismes.

Dans cette catégorie, comme dans les graphes orientés en général (option 1), on a donc pour  $U_n$  est le chemin orienté à  $n + 1$  sommets.

$$\text{Hom}(U_n, U_m) \simeq \begin{cases} U_{m-n} & \text{si } m \geq n \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

On constate alors que le line-graphe itéré  $n$  fois n'est autre (à isomorphisme naturel près) que  $\text{Hom}(U_n, \bullet)$ , où  $U_n$  est le chemin orienté à  $n + 1$  sommets et on a donc  $U_n \otimes U_m \simeq U_{n+m}$  dans la catégorie des graphes orientés dépourvus du graphe induit particulier  $G$  (option 1).

## Chapitre 4

# Catégories et graphes de Cayley

### 4.1 Groupes avec générateur, graphes orientés connexes pointés

On peut construire une catégorie **GrGe** dont les objets sont les groupes munis d'un générateur, les morphismes entre  $(G, S)$  et  $(H, T)$  étant les morphismes de groupes  $f : G \rightarrow H$  tels que de plus  $f(S) \subset T$ . Cette catégorie a un élément initial (le groupe à 1 élément avec le générateur vide), un élément final (le groupe à 1 élément avec le générateur formé de cet élément), des sommes (la somme de  $(G, S)$  et  $(H, T)$  est la somme dans **Grp** de  $G$  et  $S$  avec le générateur union des images de  $S$  et  $T$  dans ce groupe-somme).

On peut construire une catégorie **GrOP** dont les objets sont les  $(G, g)$  avec  $G$  graphe orienté et  $g$  sommet spécial de  $G$ . Les morphismes sont les morphismes de graphes orientés (option 2): application  $f$  des sommets vers les sommets de sorte que  $f(u) = f(v)$  ou bien  $f(u)f(v)$  arc si  $uv$  arc, l'image du sommet spécial est le sommet spécial.

On a un foncteur Cay, qui attribue à un groupe muni d'un générateur  $(G, S)$  le graphe  $\text{Cay}(G, S)$  avec le sommet spécial qui correspond au neutre de  $G$ .

Il y a un adjoint à droite (disons Yac) de Cay, qui s'obtient en associant au graphe orienté connexe avec un sommet spécial  $(\Gamma, \gamma)$ , le groupe libre sur l'ensemble des arcs de  $\Gamma$ , quotienté par les cycles de  $\Gamma$ .

Si on a un graphe pointé connexe  $(\Gamma, \gamma)$  et un groupe  $G$  avec une partie génératrice  $S$ , pour chaque morphisme de graphes pointés  $\Gamma, \gamma$  vers  $\text{Cay}(G, S)$ , il y a un morphisme de groupes Yac $(\Gamma, \gamma)$  vers  $(G, S)$  qui envoie l'élément  $u$  correspondant à un arc  $u$  de  $\Gamma$  vers l'élément de  $G$  qui fournit l'arc image de  $u$  dans  $\text{Cay}(G, S)$ . Et ceci réalise une bijection.

#### 4.1.1 Variantes

Une construction similaire peut se faire avec les groupes abéliens au lieu des groupes en général.

On peut aussi utiliser les graphes non-orientés et les groupes munis d'un générateur formé d'éléments involutifs du groupe.

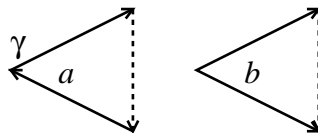


FIG. 4.1 – Deux triangles coloriés

### 4.1.2 Exemple

$\Gamma$  est formé des deux arcs  $a$  de but  $\gamma$  et  $b$  de source  $\gamma$ . Alors  $Y = \text{Yac}(\Gamma)$  est le groupe libre sur 2 éléments, muni de son générateur  $\{a, b\}$ . Le graphe de Cayley de  $(Y, \{a, b\})$  est un arbre où chaque sommet a deux arcs sortants provenant de  $a$  et  $b$  et deux arcs entrants provenant de  $a$  et  $b$ . Tout morphisme  $f$  (dans **GrOP**) de  $(\Gamma, \gamma)$  vers un graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  donne un arc  $f(a)$  arrivant en  $f(\gamma)$ , c'est-à-dire un arc  $(x, e)$  avec  $x^{-1} \in S \subset G$  et un arc  $f(b)$  partant de  $f(\gamma)$ , c'est-à-dire un arc  $(e, y)$  avec  $y \in S \subset G$ . Il y a alors un unique morphisme de groupes qui envoie  $Y$  sur  $G$ , avec  $a \mapsto x^{-1}$  et  $b \mapsto y$ .

## 4.2 Graphes coloriés

On peut essayer de perdre moins d'information sur la structure en gardant la partition des arcs selon l'élément (du groupe) qui a servi à les construire. On aura donc ainsi à considérer un foncteur  $\text{CayC}$  (Cayley colorié) qui à un groupe muni d'une partie génératrice associe le graphe pointé orienté connexe muni de cette partition.

Les morphismes entre les graphes coloriés sont bien entendu les morphismes de graphes qui de plus envoient des arcs de la même classe du graphe source sur des arcs de la même classe dans le graphe but.

Il y a alors un adjoint à droite. On forme le groupe libre sur les arcs, comme pour **Yac** et on quotient ensuite par les relateurs  $a = b$  provenant des paires d'arcs  $a, b$  prises dans la même partie de la partition.

### 4.2.1 Exemple

Le graphe est le triangle colorié  $T$  de la figure 4.1.a, le groupe est alors  $\mathbb{Z}$  avec  $a$  qui correspond à 1 et  $b$  à  $-2$ . Un morphisme de graphes coloriés etc. de  $T$  vers un graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, S)$  envoie l'arc colorié  $a$  issu de  $\gamma$  vers un arc  $(e, x)$  partant du sommet spécial  $e$  de  $\text{Cay}(G, S)$ , l'arc colorié  $a$  de but  $\gamma$  vers un arc  $(y, e)$  de même classe que  $(e, x)$ , ce qui veut dire  $y = x^{-1}$  et enfin l'arc colorié  $b$  va vers l'arc  $(x, y)$ , qui provient donc de  $x^{-2}$ .

Ceci correspond bien à un morphisme de groupes qui envoie  $a$  sur  $x$  et  $b$  sur  $x^{-2}$ .

Il va de soi que si les parties de la partition sont toutes réduites à un élément, le groupe formé est le même qu'à la section précédente.

Il arrivera, surtout si les parties sont trop grosses, que les morphismes vers les graphes de Cayley ne puissent pas être injectifs.

Par exemple dans le triangle de la figure 4.1.b, les deux sommets de droite ont forcément la même image. Ceci se voit déjà dans le groupe, les relations  $abc^{-1} = e$  (cycle) et  $a = c$  (coloration) impliquent  $b = e$ .

## Chapitre 5

# Hamiltonisme

Une question fameuse est de reconnaître les graphes finis (resp. graphes orientés finis) qui ont un cycle (resp. circuit orienté) *hamiltonien*, c'est-à-dire qui passe une fois et une seule par chaque sommet.

A l'origine, Hamilton avait essayé de vendre un jeu des 20 villes, où l'on cherchait un chemin hamiltonien sur une sphère avec la disposition suivante des villes et routes (étalée plus être plus visible dans la figure 5.1

Une condition nécessaire évidente est que le graphe soit 2-connexe, (resp. que le graphe orienté soit fortement connexe).

À part le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec le générateur 1, les graphes de Cayley connexes passent le test.

En effet, si le graphe orienté fini est connexe, et s'il y a un arc de  $a$  à  $b$ , il y a un chemin orienté de  $b$  vers  $a$ : suivre les arcs provenant du même élément du groupe que l'arc  $(a, b)$ . Par récurrence, on en déduit que s'il y a un chemin qui suit les arcs ou leurs opposés pour aller de  $a$  à  $b$ , on pourra construire un chemin orienté en remplaçant les arcs pris à l'envers par des chemins, et en court-circuitant au besoins les circuits qui ont pu apparaître.

Pour un graphe de Cayley non-orienté connexe fini à au moins 3 sommets, faisons un raisonnement par l'absurde. Le degré commun à tous les sommets est au moins 2, car le graphe est connexe et a au moins 3 sommets. S'il y a un point d'articulation, tous les sommets le sont, par sommet-transitivité. Soit alors deux arêtes  $\{e, x\}$  et  $\{e, y\}$  dans deux blocs distincts passant par le sommet associé à  $e$ . Alors  $xy^{-1}$  est d'ordre fini  $m$ , ce qui permet de construire un cycle de longueur  $2m$  contenant les deux arêtes. Ce qui contredit l'appartenance à deux blocs distincts.

Dans le cas orienté, le graphe de Cayley de  $\mathfrak{S}_4$  avec un générateur formé d'une permutation circulaire et d'une transposition qui l'engendrent n'est pas hamiltonien. Voir figure 5.2, et belle preuve dans [78].

Les graphes de Cayley de  $\mathfrak{A}_4$  (le groupe alterné des permutations de 4 éléments a 12 sommets. Il y a 3 graphes de Cayley orientés de degré 2. Certain(s) sont hamiltoniens, d'autre(s) non. Voir figure 5.3.

Cependant, le cycle hamiltonien n'a en général que peu de rapport avec la structure de groupe. Ce qui rend ennuyeuse

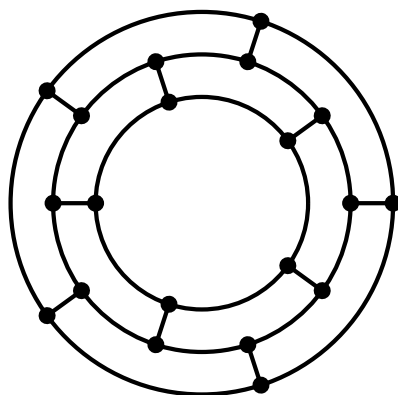


FIG. 5.1 – Le graphe de Hamilton

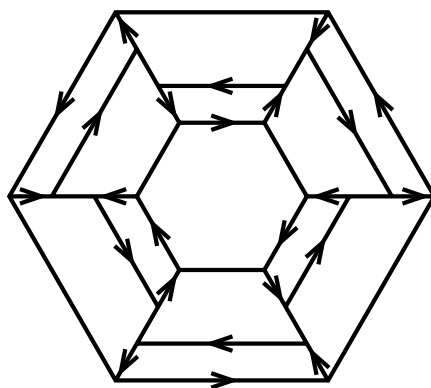


FIG. 5.2 – Le graphe de Cayley orienté du groupe  $\mathfrak{S}_4$  avec  $(1234)$  et  $(12)$

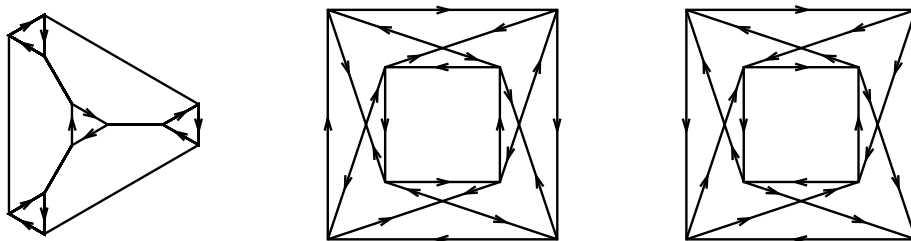


FIG. 5.3 – Graphes de Cayley orienté du groupe  $\mathfrak{A}_4$  avec 2 générateurs

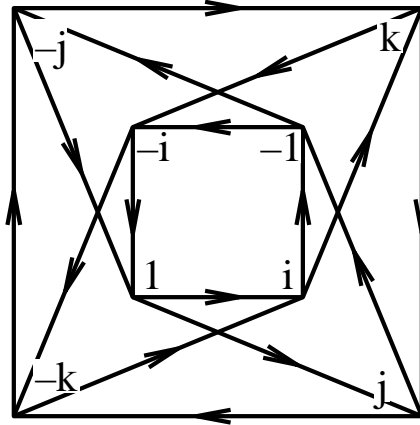


FIG. 5.4 – Le graphe de Cayley orienté du groupe de Hamilton à 8 éléments

intéressante<sup>1</sup>

la recherche de tels circuits ou cycles, voire la décomposition de l'ensemble des arêtes en de tels circuits ou cycles.

Pour en savoir plus, voir [65] ou [122] ou [7] par exemple.

Le graphe orienté de la figure 5.4 est biparti, hamiltonien. Le groupe est formé des 8 quaternions  $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ .

---

1. biffer la mention inutile

## Chapitre 6

# Isomorphismes d'Adám

On a vu que des morphismes de groupes avec générateur induisent des morphismes de graphes de Cayley (de diverses sortes).

La réciproque est fausse, naturellement: les deux groupes non isomorphes à 4 éléments, muni des trois éléments non nuls donnent le même graphe, complet à 4 sommets.

Voici un exemple un peu plus subtil:

Le graphe de la figure 6.1 peut être obtenu comme graphe de Cayley de deux groupes à 16 éléments, avec 3 éléments  $a, b, c$  tous trois d'ordre 2 pour générateur. Le premier est le groupe diédral ( $c^2 = 1, (ac)^8 = 1, a^2 = 1, b = (ac)^2 a$ ), ce qui permet de voir que le graphe est hamiltonien. Le second n'a pas d'élément d'ordre 8, (donc ce n'est pas un groupe isomorphe au précédent), mais admet des automorphismes extérieurs qui permutent  $a, b, c$ , ce qui montre que le graphe est arête-transitif.

Le graphe est un sous-graphe du cube de dimension 4, mais le plongement ne peut se faire en rajoutant un élément d'ordre 2 au générateur.

Le problème d'Adám est le suivant: Les isomorphismes de groupes induisent des isomorphismes de graphes de Cayley. Inversement, si  $(G, S)$  et  $(G, T)$  (le même groupe  $G$ ) donnent des graphes de Cayley isomorphes, existe-t-il un isomorphisme  $(G, S) \rightarrow (G, T)$  ?

Ce n'est pas toujours vrai

Un exemple est le groupe  $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$  avec les générateurs  $(1, 7, 2, 14, 9, 15)$  et  $(1, 7, 6, 10, 9, 15)$  [56] voir

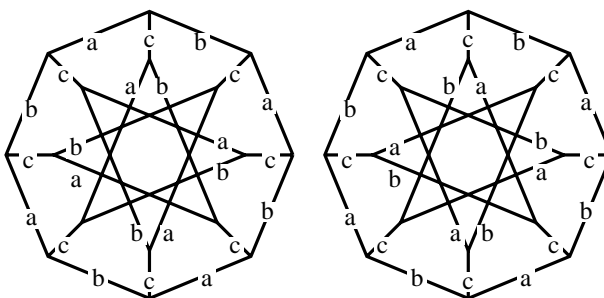


FIG. 6.1 – Deux graphes de Cayley isomorphes en tant que graphes

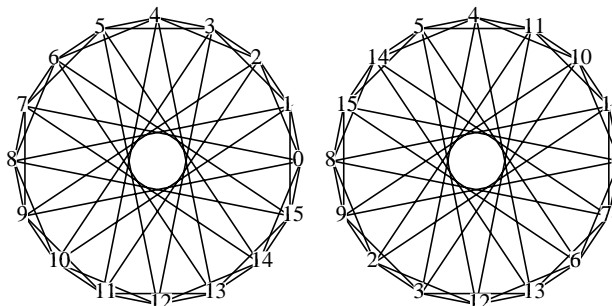


FIG. 6.2 – Contre-exemple de Elspas et Turner

figure 6.2.

Inversement, pour le degré 4 (non orienté) ou 2 (orienté), le graphe de Cayley permet de reconstituer le groupe, **supposé abélien**, à une famille d'exceptions près: le groupe  $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$  avec son générateur  $\{1, p+1\}$  (symétrisé avec  $\{-1, p-1\}$  pour le cas non-orienté) et le groupe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  avec son générateur  $\{(1, 0), (1, 1)\}$  (symétrisé avec  $\{(-1, 0), (-1, 1)\}$  pour le cas non-orienté) donnent le même graphe, bien que non-isomorphes quand  $p$  est pair.

Mais un isomorphisme entre les graphes de Cayley avec sommet spécial n'est pas obtenu forcément comme image d'un isomorphisme des groupes. Voir par exemple  $K_5$ : il a 120 isomorphismes, sur lui-même dont 20 sont composés d'une translation et d'un isomorphisme issu du groupe  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ .

Voici un autre exemple, un peu plus subtil:

Le groupe est celui des 18 homothéties-translations du plan sur le corps  $\mathbb{F}_3$ . Le générateur  $S$  est formé des 3 symétries autour de trois points non alignés. Il y a donc 6 automorphismes du groupe préservant  $S$ , les conjugaisons par des éléments du groupe affine du plan qui permutent les trois 3 points. Cela suggère  $6 \cdot 18 = 108$  automorphismes du graphe, mais il y en a 216.

Voici un dessin (figure 6.3) du graphe, qui est distance-régulier (ce qui ne se voit pas trop) et hamiltonien (ce qui est apparent sur le dessin).

Pour en savoir plus: travaux de Cai-Heng Li et de Cheryl E. Praeger, (par exemple [116, 117, 118, 120, 61, 119])

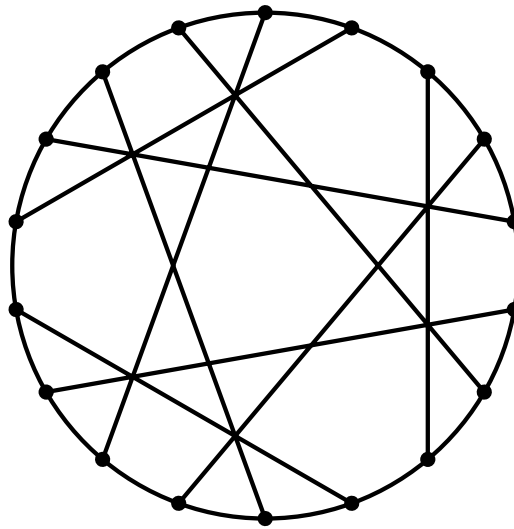


FIG. 6.3 – Graphe de Cayley des homothéties-translations de  $\mathbb{F}_3^2$

## Chapitre 7

# Spectres

Certains paramètres importants des graphes finis sont approchés plus ou moins efficacement par des méthodes spectrales. Par exemple, le nombre de stabilité, le max-cut, le diamètre.

On peut donc se demander si pour les graphes de Cayley le spectre se calcule commodément.

### 7.1 Spectres

On peut représenter le graphe par sa matrice d'adjacence  $A$  : il y a autant de lignes et colonnes que de sommets, chaque arête  $\{ij\}$  donne les coefficients  $A_{ij} = A_{ji} = 1$ , les autres coefficients sont nuls. Le spectre de cette matrice ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a mis les sommets. C'est le *spectre* du graphe.

On peut également prendre la matrice Laplacienne  $L = D - A$  où  $D$  est la matrice diagonale avec  $D_{ii}$  égal au degré du sommet  $i$ . La aussi, le spectre de la matrice Laplacienne est attaché au graphe, et non à l'ordre choisi pour les sommets. C'est le *spectre Laplacien* du graphe.

Pour un graphe régulier, chacun de ces spectres se calcule aisément à partir de l'autre.

### 7.2 Paramètres liés au spectre

Le nombre d'arêtes entre deux parties de taille  $t$  et  $n - t$  de l'ensemble des sommets s'encadre avec  $\mu t(n - t)/n$  et  $\lambda t(n - t)/n$ , où  $\mu$  et  $\lambda$  sont la plus petite et la plus grande valeur propre, après suppression d'une occurrence de 0 dans le spectre Laplacien. Voir [128].

Le nombre de stabilité est majoré pour un graphe  $k$ -régulier selon  $\alpha \leq (\lambda - k)/\lambda$ , où  $\lambda$  est la plus grande valeur propre du Laplacien. Voir [123].

Le diamètre (non orienté) se majore avec les valeurs extrêmes du spectre Laplacien : si  $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 < \dots \leq \lambda_n$  sont ces valeurs propres, le diamètre est au plus  $\left\lceil \frac{\arg \cosh \frac{(n-1)}{\lambda_n + \lambda_1}}{\arg \cosh \frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1}} \right\rceil + 1$  (pour un graphe connexe non complet). Voir [35].

Pour des raffinements, voir [64, 63].

Le diamètre est majoré par le nombre de valeurs propres distinctes du graphe, diminué de 1. Voir [24].

### 7.3 Groupes abéliens

La réponse est franchement oui si le groupe est abélien. Car alors les valeurs propres de Cay( $G, S$ ) sont tous simplement les  $\sum_{s \in S} \chi(s)$ , où  $\chi$  parcourt les caractères du groupe. On sait que tout groupe abélien fini se met sous la forme

$$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$$

et alors ses caractères sont les fonctions

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto \exp(2\pi i \sum x_i y_i / a_i)$$

Ainsi chaque caractère est déterminé par les  $k$  éléments  $y_i \in \mathbb{Z}/a_i$ . On sait que tout groupe abélien fini se met sous cette forme.

#### 7.3.1 Exemple

Les valeurs propres de la matrice d'adjacence du graphe de la figure 1.7 sont 4 (multiplicité 1) et chacune des trois valeurs de  $2 \cos(2\pi p/13) + 2 \cos(10\pi p/13)$  obtenues pour  $0 < p < 13$ , soit 0.2738, 1.3772,  $-2.6510$  environ, avec multiplicité 4.

On en déduit, par exemple, que le nombre de stabilité est au plus  $13 \frac{2.6510}{6.6510} \simeq 5.18$ , donc au plus 5. (la vraie valeur est 4), et le max-cut au plus  $(6 * 7/13) * 6.6510 \simeq 21.48$ , donc au plus 21. (la vraie valeur est 20).

### 7.4 Autres groupes finis

On n'a plus autant de caractères de degré 1, il faut donc se rabattre sur les représentations de degré plus grand.

Par exemple pour le groupe  $\mathfrak{S}_3$ , on a en choisissant le générateur  $\{(12), (13)\}$  et le générateur  $\{(12), (13), (23)\}$  le 6-cycle et le biparti complet  $K_{3,3}$  respectivement, ce qui donne, en considérant les 4 représentations irréductibles les cas suivants (les deux cas de dimension 2 donnent la même chose),

$I$	123	132	13	12	23	12, 13	12, 13, 23
1	1	1	1	1	1	2	3
1	1	1	-1	-1	-1	-2	-3
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ce qui donne le spectre  $[-2, -1, -1, 1, 1, 2]$  pour le 6-cycle et  $[-3, 0, 0, 0, 0, 3]$  pour le biparti complet. On peut aussi avoir ces graphes avec le groupe  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et les générateurs  $\{-1, 1\}$  et  $\{-1, 1, 3\}$

#### 7.4.1 Cas du générateur stable par conjugaison

On note que si  $S$  est une réunion de classes de conjugaisons de  $G$ , (c'est-à-dire que si  $s \in S$  alors  $gsg^{-1} \in S$  pour tout  $g \in G$ ), alors le spectre est assez facile à calculer, vu la théorie des *schémas d'association*. Voir par exemple [29].

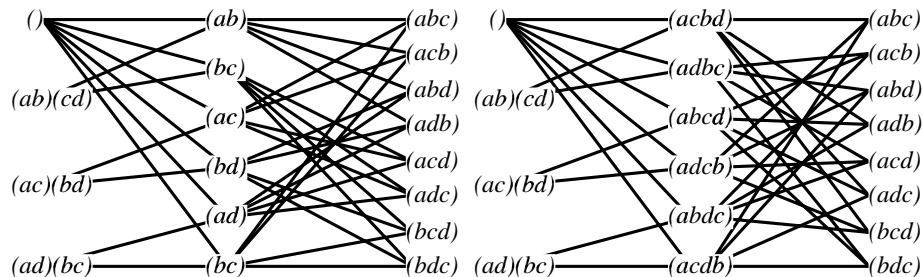


FIG. 7.1 – Voisinages de l'identité dans deux graphes de Cayley sur  $\mathfrak{S}_4$

### 7.4.2 Exemple

Les 6 transpositions dans le groupe  $\mathfrak{S}_4$  donnent en rangeant les classes de conjugaison des permutations dans l'ordre  $\{I\}, \{3\text{-cycles}\}, \{\text{bitranspositions}\}, \{\text{transpositions}\}, \{4\text{-cycles}\}$ . la matrice d'intersection suivante:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{matrix}$$

ce qui signifie que pour toute bitransposition  $b$  il y a 2 transpositions telles que  $bt$  soit une transposition et 4 transpositions  $t$  telles que  $bt$  soit un 4-cycle etc. D'où le spectre  $\pm 6_1, \pm 2_9, 0_4$ .

La table est la même en échangeant les transpositions et les permutations circulaires. Le graphe de Cayley défini avec le générateur formé des 6 permutations circulaires a donc le même spectre, mais il n'est pas isomorphe au précédent, car il ne contient pas de sous-graphe induit isomorphe à  $K_{3,3}$ . La figure 7.1 montre les points à distance au plus 2 de l'identité dans les deux cas.

## 7.5 Groupes engendrés par des transpositions

On considère un graphe connexe  $G$ . À chaque arête est associée la transposition qui échange ses extrémités. Le groupe engendré par ces transpositions est le groupe  $\mathfrak{S}_V$  des permutations de l'ensemble des sommets.

On peut considérer le graphe de Cayley défini par le groupe  $\mathfrak{S}_V$  et l'ensemble des transpositions attachées aux arêtes de  $G$ .

Un problème est de montrer que le spectre Laplacien de  $G$  est inclus dans celui du graphe de Cayley. Voir [14] ou [72].

### 7.5.1 Exemples

Le chemin de longueur  $n$  a pour spectre  $\{2 \cos(\pi/(n+1)), 1 \leq k \leq n\}$  et pour spectre Laplacien  $\{4 \sin^2(k\pi/(2n)), 0 \leq k \leq n-1\}$

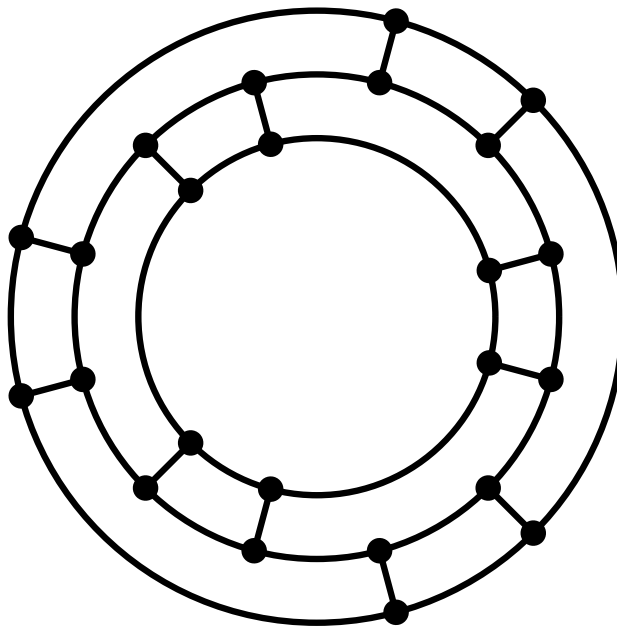


FIG. 7.2 – Le permutoèdre sur 4 éléments

Le graphe de Cayley correspondant à ces transpositions, pour  $n = 3$  est le 6-cycle, dont le spectre Laplacien est  $\{0, 1, 1, 3, 3, 4\}$ , qui contient bien  $\{0, 1, 3\}$ .

Pour  $n = 4$ , on obtient le permutoèdre sur 4 éléments (fig 7.2).

Le spectre laplacien est alors  $\{0, 2 \pm \sqrt{2}, 2\}$ , il est bien contenu dans celui du permutoèdre, qui est  $\{0, (3 \pm \sqrt{3})_2, (4 \pm \sqrt{2})_3, (2 \pm \sqrt{2})_3, 2_3, 4_3, 6\}$ , où les indices représentent les multiplicités. Remarquons que le sous groupe  $B$  à deux éléments de  $\mathfrak{S}_4$  correspondant à l'automorphisme du chemin fournit un automorphisme du graphe. Le quotient par ce sous-groupe (les sommets sont les  $gB$ ,  $g \in \mathfrak{S}_4$ ) est dessiné sur la figure 7.3).

Pour plus de renseignements sur les permutoèdres, voir par exemple [114, 115].

Pour  $K_{1,3}$  le spectre est  $\{0, \pm\sqrt{3}\}$ , le spectre Laplacien est  $\{0, 1, 2, 4\}$ , et le graphe de Cayley correspondant est le star-graphe de la figure 7.4. Le spectre Laplacien de ce star-graphe est  $\{0, 1_6, 2_3, 3_4, 4_3, 5_6, 6\}$ , les indices représentent les multiplicités.

Pour le  $n$ -cycle,  $n \geq 3$ , le spectre est le multi-ensemble  $\{2 \cos 2k\pi/n, k = 0..n-1\}$ , et le spectre Laplacien le multi-ensemble  $\{4 \sin^2 k\pi/n, k = 0..n-1\}$ .

Le graphe attaché au 3-cycle (spectre Laplacien  $\{0, 3, 2\}$ ) est  $K_{3,3}$  (spectre Laplacien  $\{0, 3, 4, 6\}$ ). Pour le 4-cycle (spectre Laplacien  $\{0, 2, 2, 4\}$ ), on obtient le graphe de la figure 7.5. Ces deux graphes ont (de façon exceptionnelle) plus d'automorphismes que ne le laisse prévoir le groupe d'automorphismes du graphe de départ (voir [67]).

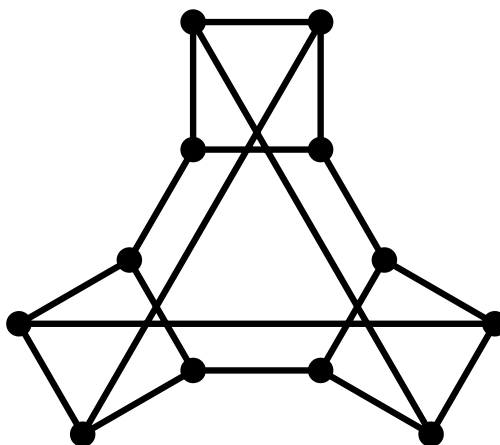


FIG. 7.3 – Le quotient du permutoèdre sur 4 éléments

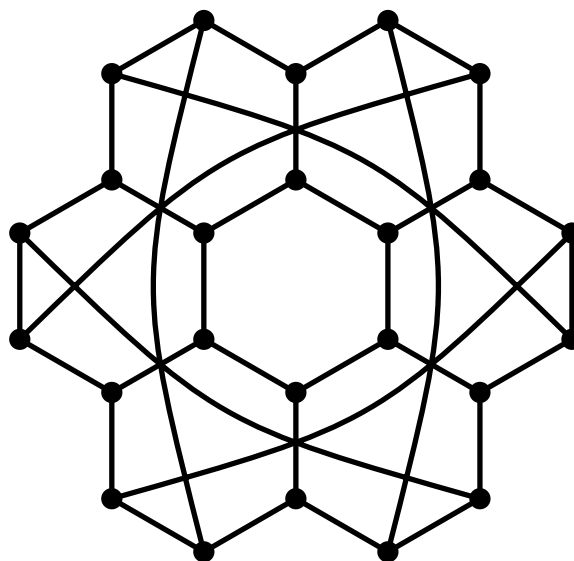


FIG. 7.4 – Le graphe de Cayley associé à  $K_{1,3}$

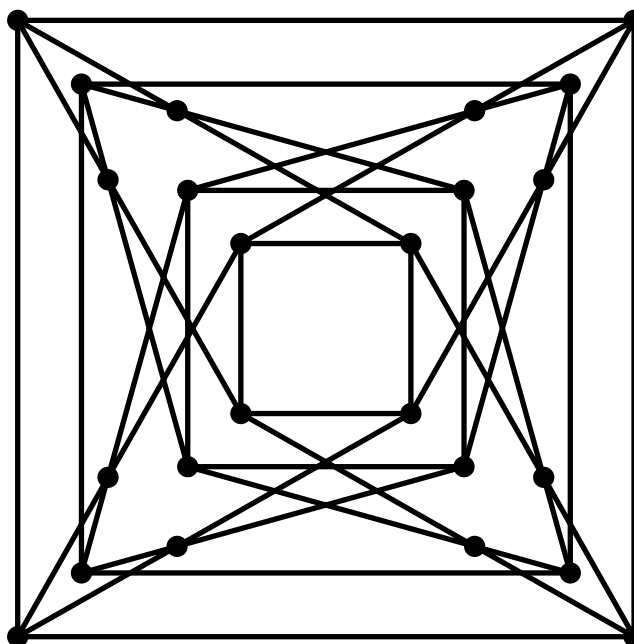


FIG. 7.5 – Le graphe de Cayley associé à  $C_4$

## Chapitre 8

# Graphes de Ramanujan

Ces graphes sont en fait des familles de graphes, ayant la propriété que lorsque le degré  $d$  est fixe et l'ordre tend vers l'infini le spectre (hormis les valeurs propres  $d$  et éventuellement  $-d$ ) tend à se concentrer dans l'intervalle  $-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}$ . C'est évidemment le cas pour la famille des cycles— trop évidemment pour être intéressant.

### 8.1 Description

#### 8.1.1 Quaternions

Si on a un anneau commutatif  $R$ , on peut donner à  $R^4$  une structure d'algèbre associative sur  $R$ , avec la base  $1, i, j, k$  et la multiplication définie par bilinéarité à partir de  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  et  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ki = j = -ik$ . C'est l'algèbre des *quaternions* sur  $R$ . La *norme* de  $a + bi + cj + dk$  est  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

Il y a isomorphisme entre les quaternions sur  $\mathbb{F}_q$  et les matrices  $2 \times 2$  sur  $\mathbb{F}_q$  avec leur multiplication ordinaire peut être obtenu de la façon suivante : on choisit une solution à  $a^2 + b^2 = -1$  dans  $\mathbb{F}_q$ . On peut alors associer aux quaternions  $i, j, k$  les matrices suivantes :

$$\begin{array}{c} i \\ \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \end{array} \left| \left| \begin{array}{c} j \\ \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ b & -a \end{array} \right] \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} k \\ \left[ \begin{array}{cc} b & -a \\ -a & -b \end{array} \right] \end{array} \right.$$

La norme correspond alors au déterminant de la matrice. Si  $q \equiv 1 \pmod{4}$ , il y a un élément  $a$  de  $\mathbb{F}_q$  avec  $a^2 = -1$ , on peut donc prendre  $b = 0$ .

On forme le monoïde des quaternions à coefficients entiers dont la norme est une puissance de  $p$ , avec  $p$  premier congru à 1 modulo 4. Il a un sous-monoïde formé des quaternions avec la partie réelle impaire et les trois autres paires. On quotiente ce monoïde par le sous-monoïde des  $\pm p^k$ . On obtient ainsi un groupe, qui a pour générateur un ensemble symétrique à  $p + 1$  éléments. Le graphe de Cayley de ce groupe, avec ce générateur, est un arbre. Pour revenir au cas fini, on calcule les coefficients modulo  $q$  où  $q$  est un nombre premier différent de  $p$ .

On obtient ainsi un groupe à  $q^3 - q$  ou  $\frac{q^3 - q}{2}$  éléments, isomorphe au groupe  $PGL(2, \mathbb{F}_q)$  ou  $PSL(2, \mathbb{F}_q)$  de matrices  $2 \times 2$  sur le corps  $\mathbb{F}_q$  à  $q$  éléments, modulo l'homothétie, selon que  $p$  est un

non-résidu ou un résidu quadratique modulo  $q$ , avec une famille génératrice à  $p + 1$  éléments, qui sont tous distincts dès que  $q$  est assez grand ( $q > 2\sqrt{p}$  suffit). Si  $p$  est un non-résidu, le graphe est biparti.

Observons en outre que l'ensemble des quaternions à coefficients entiers de norme  $p$  est stable par conjugaison par les 48 éléments du groupe de quaternions rationnels :  $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ , (cela fait 8) ou  $\pm 1 \pm i, \pm i \pm j$  (et 24 de plus) ou  $\pm 1 \pm i \pm j \pm k$  (et encore 16). Ce qui donne des orbites d'ordre divisant 24.

### 8.1.2 Variante

On prend  $p$  congru à 3 modulo 4, et les quaternions avec la partie réelle de parité opposée à celle des trois autres. On obtient également ainsi un graphe de degré  $p + 1$  qui se replie modulo  $q$  etc.

### 8.1.3 Exemples

Pour  $p = 5$  et  $q = 3$ , on trouve un graphe biparti de degré 6, diamètre 3, arête-transitif à 24 sommets. Il est isomorphe au graphe de Cayley du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_4$  avec le générateur formé des 6 permutations cycliques.

Pour  $p = 7$  et  $q = 3$ , on trouve un graphe de diamètre 2, de degré 8, arête-transitif à 12 sommets. Il est isomorphe au graphe de Cayley du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_4$ , avec le générateur formé des 8 permutations d'ordre 3. C'est le triparti complet  $K_{4,4,4}$ .

Pour  $p = 11$  et  $q = 3$ , on a le biparti  $K_{12,12}$ .

Pour  $p = 3$  et  $q = 5$ , on obtient un graphe à 120 sommets, de degré 4, diamètre 6, biparti, arête-transitif.

Pour  $p = 3$  et  $q = 7$ , un graphe à 336 sommets, degré 4, biparti, arête-transitif, diamètre 6, maille 6.

Pour  $p = 11$  et  $q = 5$ , on obtient un graphe à 60 sommets, de degré 12, arête-transitif, et diamètre 3.

Pour  $p = 13$  et  $q = 5$ , on a un graphe biparti de degré 14, diamètre 3, à 120 sommets, mais pas arête-transitif, car l'arête provenant de  $3 + 2i$  se trouve dans 33 cycles de longueur 4, alors que celle provenant de  $1 + 2(i + j + k)$  se trouve dans 27 cycles de longueur 4,

## Chapitre 9

# Diametre

### 9.1 Constructions

Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes est la somme de leurs diamètres.

Celui du produit fort le maximum de ces deux diamètres.

En revanche, le produit cartésien de deux graphes connexes peut ne pas être connexe: il suffit que les graphes soient bipartis. Dans le cas orienté, la connexité du produit demande que les index d'imprimitivité (c'est-à-dire le p.g.c.d. des longueurs des circuits) des deux graphes soient premiers entre eux.

Le calcul du diamètre est un peu plus aisé pour les graphes sommet-transitifs, car il suffit de calculer les distances à partir d'un seul sommet.

### 9.2 Groupes engendrés par des transpositions

Le diamètre du permuttoèdre sur  $n$  éléments est  $n(n-1)/2$ .

Celui du star-graphe associé à  $K_{1,n}$  est  $3n/2$  si  $n$  est pair,  $3(n-1)/2 + 1$  si  $n$  est impair.

Pour un graphe quelconque, de diamètre  $d$  et de rayon  $r$ , le graphe de Cayley correspondant à un diamètre évidemment au moins égal à  $d$  et au plus  $2nr$ .

### 9.3 Groupes engendrés par des involutions

Dans le même ordre d'idées, le graphe des  $n$  crêpes est le graphe de Cayley sur  $\mathfrak{S}_n$  avec le générateur formé des  $n-1$  involutions  $(1,2), (1,3), (1,4)(2,3), \dots, (1,2k)(2,k-1) \cdots (k,k+1), (1,2k+1)(2,2k) \cdots (k,k+2), \dots$ ,

Celui des crêpes brûlées est le graphe de Cayley du groupe à  $n!2^n$  éléments avec un générateur formé des  $n$  involutions dans  $S_{2n}$   $(1,2), (1,4)(2,3), \dots, (1,2k) \cdots (k,k+1), \dots, (1,2n)(2,2n-1) \cdots (n,n+1)$ .

Leur diamètre (en fonction de  $n$ ) est déjà d'une évaluation délicate, bien qu'il se majore aisément par  $2n-3$  pour  $n \geq 2$  pour le premier et  $3n-2$  pour le second. On utilise le procédé suivant pour cela:

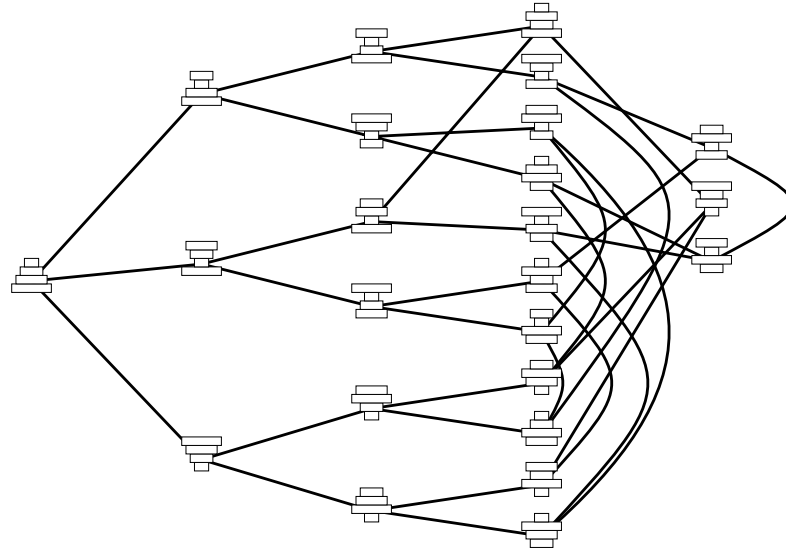


FIG. 9.1 – *Le graphe des crêpes (4 crêpes)*

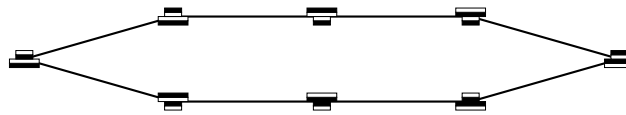


FIG. 9.2 – *Le graphe des crêpes brûlées(2 crêpes)*

**Cas des crêpes** si la crêpe en position  $n$  n'est pas la crêpe  $n$ , prendre l'involution qui amène la crêpe  $n$  en position 1, puis celle qui la met en position  $n$  et recommencer avec les  $n - 1$  autres crêpes, pour  $n \geq 3$ . Le cas  $n \leq 2$  est trivial.

**Cas des crêpes brûlées** si la crêpe en position  $2n$  n'est pas la crêpe  $(2n - 1, 2n)$ , ramener la crêpe  $(2n - 1, 2n)$  en position  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$  au besoin la retourner pour la mettre en position  $(2, 1)$ , puis l'envoyer en position  $(2n - 1, 2n)$  puis recommencer avec les  $n - 1$  autres crêpes.

La figure 9.1 montre que la borne ci-dessus est déjà trop grande pour  $n = 4$ . Cette borne a été étudiée dans [75]. La figure 9.2 montre le cas  $n = 2$  (où la borne est juste) et la figure 9.3 montre une stratégie pour  $n = 3$ , ce qui donne le diamètre 6 au lieu de 7; quelques arêtes inutiles sont omises. La configuration "bien rangée" est à gauche dans les trois cas.

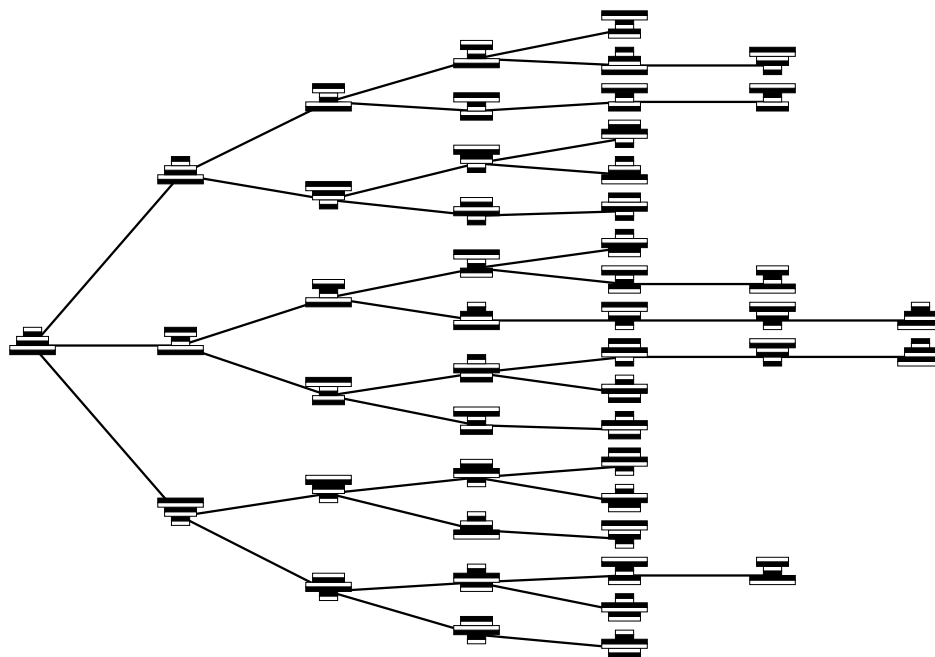


FIG. 9.3 – *Grphe (partiel) des crêpes brûlées(3 crêpes)*

## Chapitre 10

# Un petit catalogue

Ce chapitre contient quelques graphes de Cayley non-orientés, connexes de petits ordres et degrés. On n'ira sûrement pas jusqu'à 1003.

Certains des graphes se trouvent déjà dans [134], un ouvrage recommandé à qui aime voir les graphes.

Pour le degré 2 on trouve les cycles, et c'est tout.

Pour le degré 3, on a les graphes à partir d'un groupe engendré par 3 éléments d'ordre 2 ou engendré par un élément d'ordre 2 et un autre élément. Dans le cas commutatif, on a les prismes (par  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2, \{\pm(1,0), (0,1)\}$ ), et les échelles de Moebius (par  $\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, n/2\}$ ) de la figure 10.1. Ce ne sont pas les seules façons d'obtenir ces graphes comme graphes de Cayley. Tous les prismes apparaissent aussi à partir de groupes diédraux.

Outre les graphes des familles précédentes, les autres graphes de Cayley à 12 sommets de degré 3 sont

À l'ordre 14 en degré 3, il y a aussi le graphe de Heawood (prendre le groupe diédral, avec pour générateur 3 éléments (distincts) d'ordre 2  $a, b, c$  avec  $ababa = c$ ). Ce graphe est distance-transitif.

### 10.1 Les graphes planaires

Outre ceux déjà vus (figures 10.1 et 10.2), et la famille des antiprismes (par  $\mathbb{Z}_{2n}, \{\pm 1, \pm 2\}$ , figure 10.4), les graphes de Cayley planaires sont les 5 associés aux polyèdres réguliers, ceux obtenus en les tronquant, et les versions *snub* (camus), à part deux exceptions: ce serait trop simple!

Voici la série à partir du tétraèdre: tétraèdre, tétraèdre tronqué, octaèdre, icosaèdre.

Voici la série obtenue à partir du cube: cube, cube tronqué, cuboctaèdre, snub-cube (figure 10.6).

Ajoutons les deux graphes de Cayley suivants, qui proviennent du cube et du dodécaèdre. Le tétraèdre trituré de la même façon donnerait le cuboctaèdre (figure 10.10).

Un petit détour par les graphes planaires infinis, qui correspondent à un pavage périodique du plan, car en passant au quotient par un réseau de translations, on obtient un graphe de Cayley dessinable sur le tore (figure 10.11).

Un dernier point: l'avantage des graphes planaires est que les cycles de longueur  $> 2$  se voient avec les faces. Cela permet de trouver assez vite un système de relations.

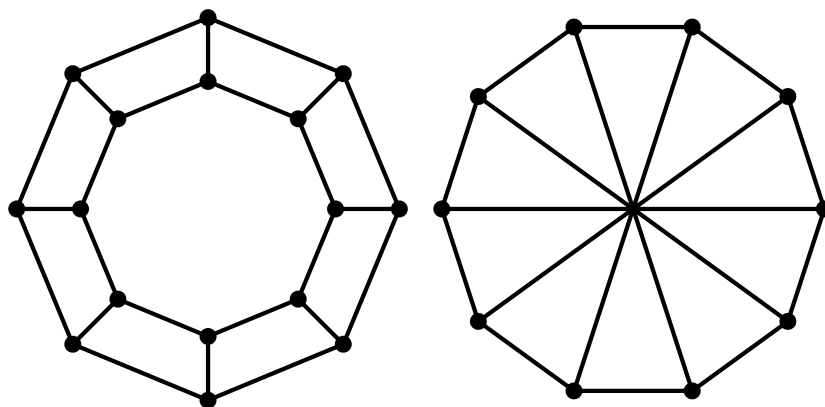


FIG. 10.1 – Prismes et échelles de Moebius

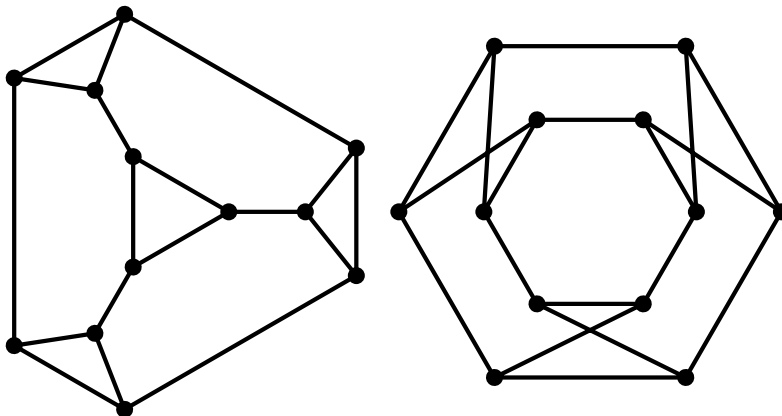


FIG. 10.2 – Autres graphes à 12 sommets

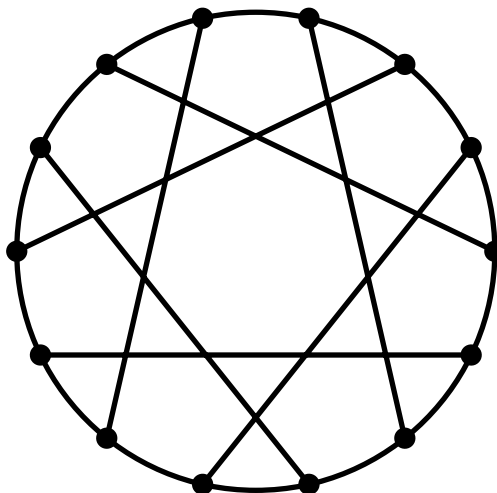


FIG. 10.3 – *Le graphe de Heawood*

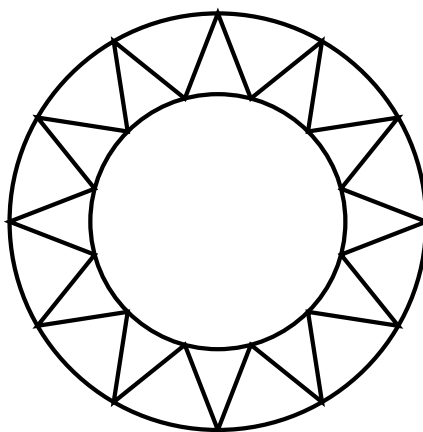


FIG. 10.4 – *Un antiprisme*

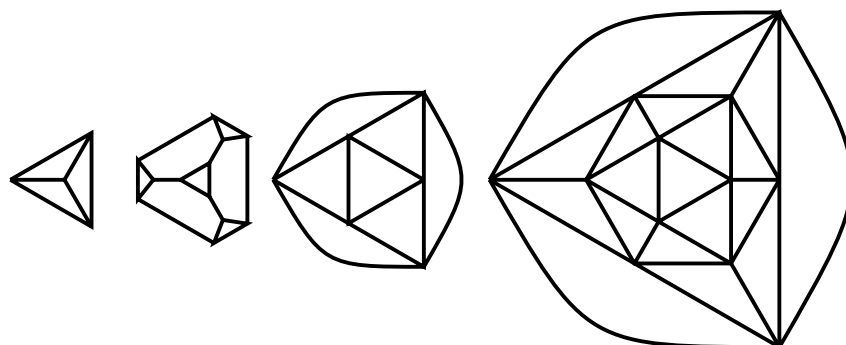


FIG. 10.5 – À partir du tétraèdre

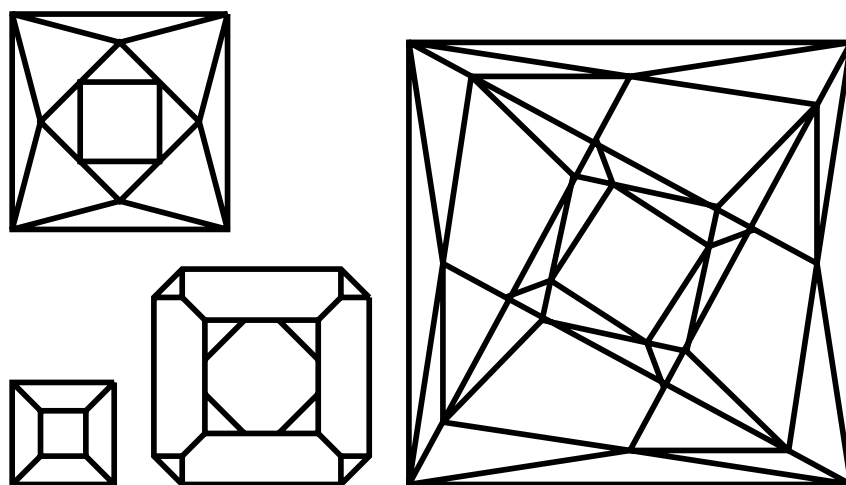


FIG. 10.6 – À partir du cube

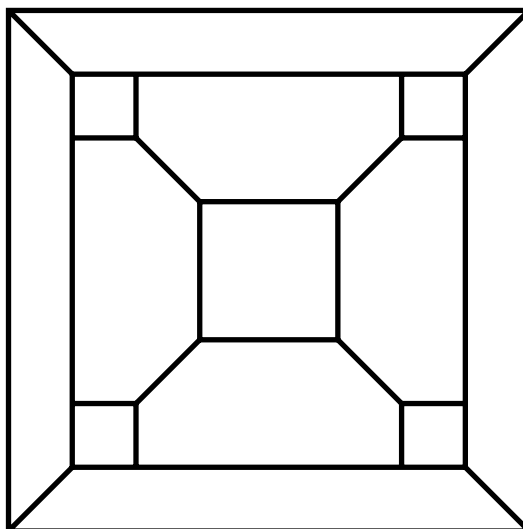


FIG. 10.7 – *Octaèdre tronqué*

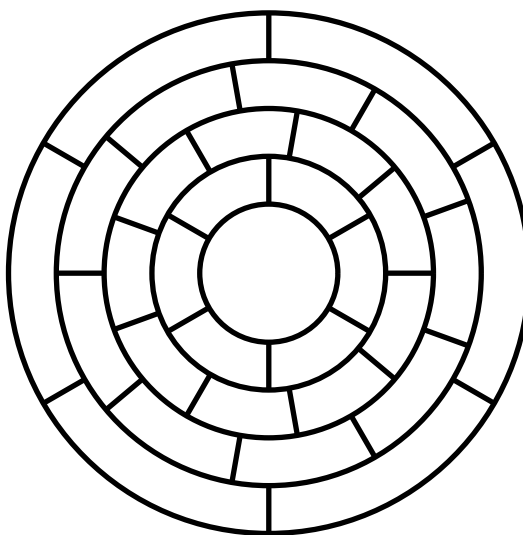


FIG. 10.8 – *Icosaèdre tronqué: ballon de foute*

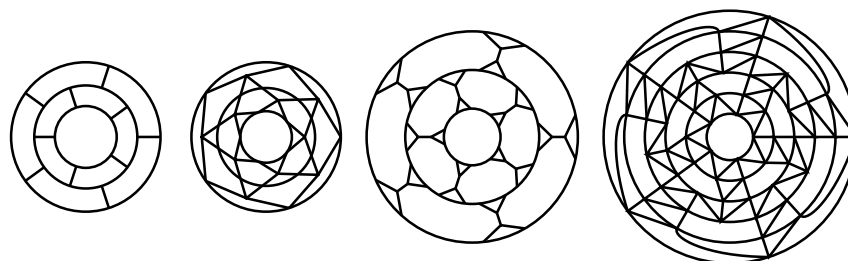


FIG. 10.9 – À partir du dodécaèdre

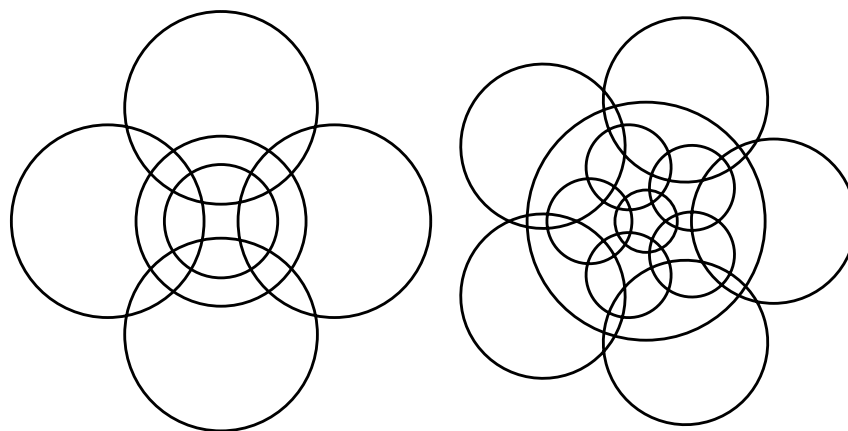


FIG. 10.10 – Graphes avec 3 sortes de faces

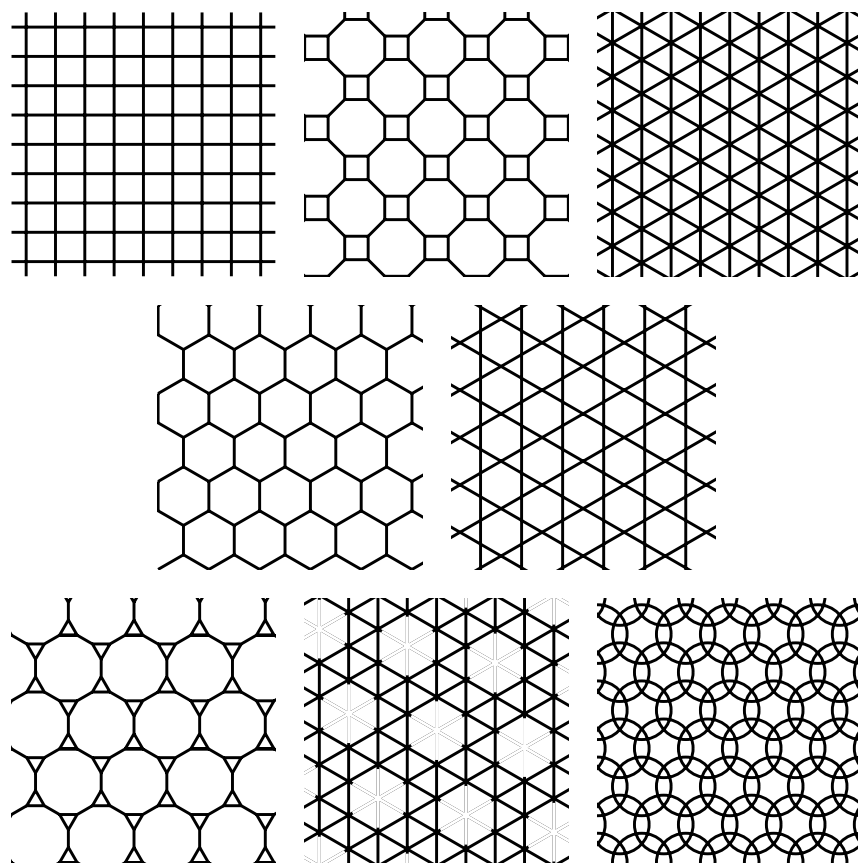


FIG. 10.11 – Pavages de Cayley du plan

Exercice bien long: trouver les intrus (qui ne sont pas des graphes de Cayley) et une façon (au moins) de représenter les autres à partir d'un groupe et d'un générateur.

# Index

- abélien, 12, 18
- arête, 5
- arc, 5
  
- but, 15
  
- catégorie, 15
- commutatif, 12
- connexe, 5
- couronne, 13
- cycle, 12
- cycliques, 12
  
- degré, 7
- diamètre, 5
- distance, 5
  
- excentricité, 6
  
- final, 17
- foncteur, 15
  - adjoint, 15
  
- graphe, 5
  - automorphisme, 6
  - Cayley, 8
  - orienté, 5
- groupe, 3, 6
  - homomorphisme, 3
  - isomorphisme, 3
  - libre, 16
  
- hamiltonien, 24
  
- imprimitif, 4
- initial, 17
- isomorphisme, 15
  
- line-graphe, 12
  
- monoïde
  - libre, 16
- multigraphe, 8
  
- normal, 12
- norme, 33
- noyau, 17
  
- objet
  - nul, 18
- opération, 4
- orbite, 4
- ordre, 3
  
- Petersen, 8
- produit
  - cartésien, 12
  - catégorique, 17
  - fort, 12
- direct, 13
- semi-direct, 13
  
- quaternions, 33
  
- rayon, 6
  
- schema, 29
- somme
  - cartésienne, 12
- sommet, 5
- source, 15
- sous-groupe, 3
- spectre, 28
  - Laplacien, 28
- stabilisateur, 4
  
- transitif, 7

# Bibliographie

- [1] B.W. Adren and K.W. Tang. Representation and routing of Cayley graphs. *IEEE Trans. Communications*, 39:1533–1537, 1991.
- [2] Sheldon Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. Group graphs as interconnection networks. In *Proc. 14th Int. Conf. Fault Tolerant Comput.*, pages 422–427, 1984.
- [3] Sheldon Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. On group graphs and their fault tolerance. *IEEE Trans. Comput.*, C-36:885–888, 1987.
- [4] Sheldon Akers and Balakrishnan Krishnamurthy. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 38:555–566, 1989.
- [5] Selim G. Akl, Paraskevi Fragopoulou, and Henk Meijer. Optimal communication primitives on the generalized hypercube network. *J. Parallel Distrib. Comp.*, 32:173–187, 1996.
- [6] Selim G. Akl and Ke Qiu. A novel routing scheme on the star and pancake networks and its applications. *Parallel Comput.*, pages 95–101, 1993.
- [7] B. Alspach and Y Qin. Hamilton-connected cayley graphs on hamiltonian groups. *European Journal of Combinatorics*, 22:777–787, 2001.
- [8] Brian Alspach. Cayley graphs with optimal fault tolerance. *IEEE Trans. Comput.*, 41(10):1337–1339, 1992.
- [9] Fred Annexstein and Marc Baumslag. On the diameter and bisection size of Cayley graphs. *Math. System Theory*, 26:271–291, 1993.
- [10] Fred Annexstein, Marc Baumslag, and Arnold L. Rosenberg. Group action graphs and parallel architectures. *SIAM J. Comput.*, 19:544–569, 1990.
- [11] L. Babai, W. M. Kantor, and A. Lubotzky. Small diameter Cayley graphs for finite simple groups. *European J. Combin.*, 10:507–522, 1989.
- [12] L. Babai, E.M. Luks, and A. Seress. Fast management of the permutation groups. *SIAM J. Comput.*, 26:1310–1342, 1997.
- [13] L. Babai and A. Seress. On the diameter of Cayley graphs of the symmetric group. *J. Combin. Theory Ser. A*, 49:175–179, 1988.

- [14] R. Bacher. Valeur propre minimale du laplacien de Coxeter pour le groupe symétrique. *J. of Algebra*, 167:460–472, 1994.
- [15] D. Barth, A. Germa, M.-C. Heydemann, and D. Sotteau. Emulating networks by bus networks: Application to trees and hypermeshes. In *Structure, Information and Communication Complexity*, Int. Inf. Series 6, pages 241–254. Carlton University Press, 1997. Rapport LRI 1996, No 1073.
- [16] Marc Baumslag. *Cayley networks : a group-theoretic approach to the design and analysis of parallel networks*. PhD thesis, The City University of New-York, 1991.
- [17] Marc Baumslag. On the fault tolerance of quasi-minimal Cayley networks. In *Advances in Comput. and Inf., ICCI'91*, number 497 in Lecture Notes in Comput. Sci., pages 431–442. Springer Verlag, 1991.
- [18] J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu. Distributed loop computer networks: a survey. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 24:2–10, 1995.
- [19] J.-C. Bermond, C. Delorme, and J.J. Quisquater. Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 3:433–449, 1986.
- [20] Jean-Claude Bermond, Charles Delorme, and Jean-Jacques Quisquater. Table of large  $(\Delta, d)$  graphs. *Discrete Appl. Math.*, 37/38:575–577, 1992.
- [21] Jean-Claude Bermond, Takako Kodate, and Stephane Perennes. Gossiping in Cayley graphs by packets. In *Conf. CCS95 (8 th Franco-Japanese and 4 th Franco-Chinese Conf. Combin. Comput. Sci. (Brest July 1995))*, volume 1120 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 301–305. Springer Verlag, 1996.
- [22] P. Berthomé, A. Ferreira, and S. Perennes. Optimal information dissemination in star and pancake networks. In *Proc. of the 5th IEEE Symp. Parallel Distribut. Process.*, pages 720–724. IEEE Press, 1993.
- [23] L.N. Bhuyan and D.P. Agraval. Generalized hypercubes and hyperbus structures for a computer network. *IEEE Trans. Comput.*, C-33:323–333, 1984.
- [24] Norman Biggs. *Algebraic graph theory*. Number 67 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1974.
- [25] G. Birkhoff and S. MacLane. *Algèbre*. Number xxxv-xxxvi in Cahiers Scientifiques. Gauthier-Villars, 1971.
- [26] F. Boesch and R. Tindell. Circulant and their connectivities. *J. of Graph Theory*, 8:487–499, 1984.
- [27] I. Bond and C. Delorme. A note on partial Cayley graphs. *Discrete Math.*, 114:63–74, 1993.
- [28] A Bouabdallah, Marie-Claude Heydemann, Jaroslav Opatrny, and Dominique Sotteau. Embeddings of complete binary trees into star graphs. In *19th Conf. on Math. Foundations of Comput. Sci.*, number 841 in Lecture Notes in Comput. Sci., pages 266–275. Kosice, Springer Verlag, 1994.

- [29] Andries E. Brouwer and Willem H. Haemers. *Association schemes*, chapter 15, pages 747–771. Volume I of Graham et al. [82], 1995.
- [30] J.M. Brunat, M. Espona, M.A. Fiol, and O. Serra. On Cayley line digraphs. *Discrete Math.*, 138:147–159, 1995.
- [31] Lowell Campbell, Gunnar Carlsson, Michael Dinneen, Vance Faber, Michael Fellows, Michael Langston, James Moore, Andrew Mullhaupt, and Harlan Sexton. Small diameter symmetric networks from linear groups. *IEEE Trans. Comput.*, 41:218–220, 1992.
- [32] J. J. Cannon. Construction of defining relators for finite groups. *Discrete Math.*, 5:105–129, 1973.
- [33] A. Cayley. On the theory of groups. *Amer. J. Math.*, 11:139–157, 1889.
- [34] Arthur Cayley. The theory of groups : graphical representations. *Amer. J. of Math.*, 1:174–176, 1878.
- [35] F.R.K. Chung, V. Faber, and Thomas A. Manteuffel. An upper bound on the diameter of a graph from eigenvalues associated with its laplacian. *SIAM J. Discrete Math.*, 7:443–457, 1994.
- [36] F. Comellas and M.A. Fiol. Vertex-symmetric digraphs with small diameter. *Discrete Appl. Math.*, 58:1–11, 1995.
- [37] F. Comellas and M. Mitjana. Broadcasting in cycle prefix digraphs. *Discrete Appl. Math.*, 83:31–39, 1998.
- [38] G. Cooperman and L. Finkelstein. New methods for using Cayley graphs in interconnection networks. *Discrete Appl. Math.*, 37-38:95–118, 1992. Special issue on interconnection networks.
- [39] G. Cooperman and L. Finkelstein. Cayley graph techniques for permutation routing on bus interconnexion networks, 1994.
- [40] G. Cooperman, L. Finkelstein, and N. Sarawagi. Applications of Cayley graphs. In *Appl. Algebra, Alg. Algo. and Error-Correcting Codes (AAECC-8, 1990)*, volume 508 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Springer Verlag, pages 367–378, 1991.
- [41] Stephen Curran and Joseph Gallian. Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs - a survey. *Discrete Mathematics*, 156, 1996.
- [42] Khaled Day and Anand Tripathi. Arrangements graphs : a class of generalized star graphs. *Inform. Process. Lett.*, 42:235–241, 1992.
- [43] Khaled Day and Anand Tripathi. A comparative study of topological properties of hypercubes and star graphs. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, 5(1):31–38, 1994.
- [44] O. Delmas. *Communications par commutation de circuits dans les réseaux d'interconnexion*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Laboratoire I3S-CNRS URA 1376, 1997.

- [45] C. Delorme. Graphes et hypergraphes sommet-transitifs. Internal report 383, L. R. I., Orsay, France, 1987.
- [46] C. Delorme. Examples of products giving large graphs with given degree and diameter. *Discrete Appl. Math.*, 37-38:157–167, 1992. Special issue on interconnection networks.
- [47] C. Delorme. Isomorphisms of transposition graphs. Technical Report 1101, L. R. I., Orsay, France, 1997.
- [48] Dominique Désérable. A family of Cayley graphs on the hexavalent grid. *Discrete Appl. Math.*, 93:169–189, 1999.
- [49] Vassilis Dimakopoulos and Nikitas Dimopoulos. Total exchange in Cayley networks. *Lecture Notes in Comput. Sci., Euro-Par96*, 1123:341–346, 1996.
- [50] Michael J. Dinneen. Algebraic methods for efficient network construction. Master’s thesis, University of Victoria, 1991.
- [51] Michael J. Dinneen and Paul R. Hafner. New results on the degree/diameter problem. *Networks*, 24:359–367, 1994.
- [52] W. Dörfler. Every regular graph is a quasigroup graph. *Discrete Math.*, 10:181–183, 1974.
- [53] L.L. Doty, R.J. Goldstone, and C.L. Suffel. Cayley graphs with neighbor connectivity one. *SIAM J. Discrete Math.*, 9(4):625–642, 1997.
- [54] R. N. Draper. An overview of supertoroidal networks. In *3rd ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures*, pages 95–102, 1991.
- [55] Dyi-Rong Duh, Gen-Huey Chen, and D. Frank Hsu. Combinatorial properties of generalized hypercube graphs. *Inform. Process. Lett.*, 57:41–45, 1996.
- [56] Bernard Elspas and James Turner. Graphs with circulant adjacency matrices. *J. of Combin. Th.*, 9:297–307, 1970.
- [57] M. Escudero, J. Fabrega, and P. Morillo. Fault tolerance routings in double-loop networks. *Ars Combin.*, 25A:187–198, 1988.
- [58] S. Even and O. Goldreich. The minimal-length generating sequence problem is NP-hard. *J. Algorithms*, 2:311–313, 1981.
- [59] Ruskey F. and Savage C. Hamilton cycles that extend transposition matchings in Cayley graphs of  $S_n^*$ . *SIAM J. Discrete Math.*, 6:152–166, 1993.
- [60] Vance Faber, James Moore, and William Y. C. Chen. Cycle prefix digraphs for symmetric interconnection networks. *Networks*, 23:641–649, 1993.
- [61] Xin Gui Fang, Cai Heng Li, and Cheryl Praeger. On orbital regular graphs and Frobenius graphs. *Discrete Math.*, 182:85–99, 1998.
- [62] R. J. Faudree. Some strong variations of connectivity. In *Combinatorics, Keszthely*, volume 64(1), pages 125–144. Coll. Math. Soc. Janos Bolyai, 1993.

- [63] M. A. Fiol and E. Garriga. The alternating and adjacency polynomials, and their relation with the spectra and diameters of graphs. *Discrete Appl. Math.*, 87:77–97, 1998.
- [64] M.A. Fiol, E. Garriga, and J.L.A. Yebra. On a class of polynomials and its relation with the spectra and diameters of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 67:48–61, 1996.
- [65] M.A. Fiol and J.L.A. Yebra. Ciclos de hamilton en redes de pasos conmutativos y de paso fijo. *Stochastica*, 12:113–129, 1988.
- [66] D. Fortin, C. Kirchner, and P. Strogova. Routing in regular networks using rewriting. In J. Slaney, editor, *Proceedings of the CADE international workshop on automated reasoning in algebra (ARIA)*, pages 5–8, 1994.
- [67] J. Fournier. Le groupe d'automorphismes des graphes de Cayley engendrés par des transpositions. Master's thesis, Univ. de Montréal, Canada, 1997.
- [68] Paraskevi Fragopoulou. *Communication and fault tolerance algorithms on a class of interconnection networks*. PhD thesis, Queen'University, Kingston, Canada, 1995.
- [69] Paraskevi Fragopoulou and Selim G. Akl. Optimal communication algorithms on star graphs using spanning tree constructions. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 24:55–71, 1995.
- [70] Paraskevi Fragopoulou and Selim G. Akl. Optimal communication primitives on the generalized hypercube network. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 32(2):173–187, 1996.
- [71] Paraskevi Fragopoulou and Selim G. Akl. Spanning subgraphs with applications to communication on a subclass of the Cayley graph based networks. *Discrete Appl. Math.*, 83:79–96, 1998.
- [72] Joel Friedman. On Cayley graphs on the symmetric group generated by transpositions. *Combinatorica*, 20:505–519, 2000.
- [73] E. Fuller and Balakrishnan Krishnamurthy. Symmetries in graphs: an annotated bibliography. Technical report CR 86-03, Computer Research Lab., Tektronics Laboratories, Beaverton, 1986.
- [74] Max Garzon. Cayley automata. *Theoretic. Comput. Sci.*, 108:83–102, 1993.
- [75] W. H. Gates and C. H. Papadimitriou. Bounds for sorting by prefix reversal. *Discrete Math.*, 27:47–57, 1979.
- [76] G. Gauyacq. *Routages uniformes dans les graphes sommets-transitifs*. Thèse, Université Bordeaux I, 1995.
- [77] A. Germa, M.-C. Heydemann, and D. Sotteau. Cycles in cube-connected cycles. *Discrete Appl. Math.*, 83:135–155, 1998.
- [78] C. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*. Number 207 in Graduate texts in mathematics. Springer, 2001.
- [79] C. D. Godsil. Connectivity of minimal Cayley graphs. *Arch. Math.*, 37:473–476, 1981.

- [80] D. M. Gordon. Parallel sorting in Cayley graphs. *Algorithmica*, 6:554–564, 1991.
- [81] C. GowriSankaran. Broadcasting on recursively decomposable Cayley graphs. *Discrete Appl. Math.*, 53:171–182, 1994.
- [82] R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors. *Handbook of Combinatorics*. Elsevier Science B.V., 1995.
- [83] Qian-Ping Gu and Shietung Peng. Fault tolerant routing in hypercubes and star graphs. *Parallel Process. Lett.*, 6:127–136, 1996.
- [84] Y. O. Hamidoune, A. S. Lladó, O. Serra, and R. Tindell. On isoperimetric connectivity in vertex-transitive graphs. *SIAM J. on discrete Math.*, 13:139–144, 2000.
- [85] Y.O. Hamidoune. Sur quelques problèmes de connexité dans les graphes orientés. *J. Combin. Theory Ser. B*, 30:1–10, 1981.
- [86] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó, and O. Serra. Vosperian and superconnected Abelian Cayley digraphs. *Graphs Combin.*, 7:143–152, 1991.
- [87] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó, and O. Serra. The connectivity of hierarchical digraphs. *Discrete Appl. Math.*, 37-38:275–280, 1992.
- [88] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó, and O. Serra. Small cutsets in quasiminimal Cayley graphs. *Discrete Math.*, 159:131–142, 1996.
- [89] Y.O. Hamidoune, A.S. Lladó, and O. Serra. An isoperimetric problem in Cayley graphs. *Theory Comput. Syst.*, 32:507–51, 1999.
- [90] Mohammad Heydari and Hal Sudborough. On sorting by prefix reversals and the diameter of pancake networks. *Lecture Notes in Comput. Sci.*, 678:218–227, 1993.
- [91] Marie-Claude Heydemann and Bertrand Ducourthial. *Cayley graphs and interconnection networks*, pages 167–224. Number 497 in NATO ASI, series C: Math. Phys. Sci. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [92] Marie-Claude Heydemann, Nausica Marlin, and Stephane Perennes. Cayley graphs with complete rotations, 2001.
- [93] Ching-Tien Ho and Ming-Yang Kao. Optimal broadcast in all-port wormhole-routed hypercubes. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, 6:200–204, 1995.
- [94] A.J. Hoffman and R.R. Singleton. On moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Develop.*, 4:497–504, 1960.
- [95] D. Franck Hsu. Introduction to a special issue on interconnection networks. *Networks*, 23:211–213, 1993.
- [96] D. Franck Hsu. On container width and length in graphs, groups and networks. *IEICE Trans. Fundamentals*, E77(A):668–680, 1994.

- [97] Jen-peng Huang, S. Lakshmirarahan, and S. K. Dhall. Analysis of interconnection networks based on Cayley graphs of strong generating sets. In *Proc. Int. Conf. Parallel Process.*, pages 42–45, 1994.
- [98] Leendert Huisman and Sandip Kundu. Highly reliable symmetric networks. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, 5:94–97, 1994.
- [99] W. Imrich. Graphs with transitive abelian automorphisms groups. In *Combinatorial Theory and its Applications*, pages 651–656, 1970.
- [100] Yoshiyasu Ishigami. Graphs with transitive abelian automorphisms groups. *Networks*, 27:257–266, 1996.
- [101] M. Jerrum. The complexity of finding minimum-length generator sequence. *Theor. Comput. Sci*, 36:265–289, 1985.
- [102] Xing-De Jia. Cayley digraphs of finite cyclic groups with minimal average distance. In *Proceedings of a DIMACS workshop held Feb. 7-9, 1994 at Rutgers University*, number 21 in DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci, pages 229–250. American Mathematical Society, 1995.
- [103] Xing-De Jia. Extremal Cayley digraphs of finite cyclic groups. *Siam J. Discrete Math.*, 8:62–75, 1995.
- [104] Z. Jovanovic and J. Misic. Fault tolerance of the star graph interconnection network. *Inform. Process. Lett.*, 49:145–150, 1994.
- [105] J. Jwo, S. Lakshmirarahan, and S. K. Dhall. A new class of interconnection networks based on the alternating group. *Networks*, 23:315–326, 1993.
- [106] Evangelos Kranakis and Danny Krizanc. Distributed computing on Cayley networks. In *Proc. 4th IEEE Symp. Parallel Distribut. Process.*, pages 222–229, 1992.
- [107] Evangelos Kranakis and Danny Krizanc. Labeled versus unlabeled distributed Cayley networks. *Discrete Appl. Math.*, 63:223–236, 1995.
- [108] Priyalal Kulasinghe and Said Bettayeb. Edge disjoint paths in Cayley color graphs. Research report, Louisiana State University, 1993.
- [109] Priyalal Kulasinghe and Said Bettayeb. On the multiply-twisted hypercube. In *Parallel and Distributed Computing*, volume 805 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 267–278. First Canada-France Conf., Montreal, 1994.
- [110] S. Lakshmirarahan, J. Jwo, and S. K. Dhall. Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey. *Parallel Comput.*, 19:361–407, 1993.
- [111] Benoît Larose, Francois Laviolette, and Claude Tardif. On normal Cayley graphs and hom-idempotent graphs. *Eur. J. Comb.*, 7:867–881, 1998.
- [112] Shahram Latifi. On the fault diameter of the star graph. *Inform. Process. Lett.*, 46:143–150, 1993.

- [113] Christian Lavault. Interconnection networks: graph and group-theoretic modelling. Preprint lipn, LIPN Villetaneuse, France, 1994.
- [114] C. Le Conte de Poly-Barbut. Sur les treillis de Coxeter finis. *Math. Inf. Sci. Hum.*, 125:41–57, 1994.
- [115] Claude Le Conte de Poly-Barbut. Treillis de Cayley des groupes de Coxeter finis. Constructions par récurrence et décompositions sur des quotients. *Math. Inf. Sci. Hum.*, 140:11–33, 1997.
- [116] Cai Heng Li. Isomorphisms of connected Cayley digraphs. *Graphs Comb.*, 14:37–44, 1998.
- [117] Cai Heng Li. On isomorphisms of connected Cayley graphs II. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 74:28–34, 1998.
- [118] Cai Heng Li. On isomorphisms of connected Cayley graphs. III. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 58:137–145, 1998.
- [119] Cai Heng Li. Isomorphisms of finite Cayley digraphs of bounded valency. II. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 87:333–346, 1999.
- [120] Cai Heng Li and Cheryl E. Praeger. On the isomorphism problem for finite Cayley graphs of bounded valency. *Eur. J. Comb.*, 20:279–292, 1999.
- [121] Juqiang Liu. Hamiltonian decomposition of Cayley graphs on abelian groups of odd order. *J. Combin. Theory Ser. B*, 66:75–76, 1996.
- [122] A.S. Lladó and O. Serra. Hamiltonian cycles in cayley digraphs with two generators. *J. Combinatorics, Information and System Sciences*, 15:271–280, 1990.
- [123] Laszlo Lovász. On the Shannon capacity of a graph. *Trans. Inf. Theory*, IT-25:1–7, 1979.
- [124] A. Machi and F. Mignosi. Garden of Eden configurations for cellular automata on Cayley graphs of groups. *SIAM J. Discrete Math.*, 6:44–56, 1993.
- [125] W. Mader. Über den Zusammenhang symmetrischer Graphen. *Arch. Math.*, 21:331–336, 1970.
- [126] W. Mader. Minimale  $n$ -fach kantenzusammenhängende Graphen. *Math. Ann.*, 191:21–28, 1971.
- [127] Nausica Marlin. Rotations complètes dans les graphes de Cayley. Dea, Université de Nice Sophia-Antipolis, France, 1996.
- [128] Bojan Mohar. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs. In Hahn Gena et al., editors, *Graph symmetry: algebraic methods and applications. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and séminaire de mathématiques supérieures, Montreal, Canada, July 1-12, 1996.*, number 497 in NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci., pages 225–275. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers., 1997.
- [129] Joy Morris. Connectivity of Cayley graphs: A special family. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 20:111–120, 1996.

- [130] C. Padro and Paz Morillo. The diameter vulnerability of iterated line digraphs. *Discrete Math.*, 149:189–204, 1996.
- [131] Subburajan Ponnuswamy and Vipin Chaudhary. A comparative study of star graphs and rotator graphs. In *Int. Conf. on Parallel Processing*, pages 46–50, 1994.
- [132] Y.R. Potlapalli. Trend in interconnection networks topologies. In *Int. Conf. on Parallel Processing Workshop*, pages 24–29, 1995.
- [133] Franco P. Preparata and Jean Vuillemin. The cube-connected cycles : a versatile network for parallel computation. *Communications of the ACM*, 24:300–309, 1981.
- [134] Ronald C. Read and Robin J. Wilson. *An atlas of graphs*. Oxford Science Publications. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [135] Zsuzanna Róka. *Automates cellulaires sur graphes de Cayley*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, 1994.
- [136] Zsuzanna Róka. One-way cellular automata on Cayley graphs. *Theoret. Comput. Science*, 132:259–290, 1994.
- [137] Joseph J. Rotman. *An introduction to the theory of groups. 4th ed.* Number 148 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [138] Yordan Rouskov, Shahram Latifi, and Pradip K. Srimani. Conditional fault diameter of star graph networks. *J. Parall. Dist. Comput.*, 33:91–97, 1996.
- [139] Yordan Rouskov and Pradip K. Srimani. Fault diameter of star graphs. *Inform. Process. Lett.*, 48:243–251, 1993.
- [140] Y. Saad and M. H. Schultz. Topological properties of hypercubes. *IEEE Trans. Comput.*, 37(7):867–872, 1988.
- [141] Gert Sabidussi. On a class of fixed-point-free graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9:800–804, 1958.
- [142] Gert Sabidussi. Graph multiplication. *Math. Zeitschr.*, 72:446–457, 1960.
- [143] Gert Sabidussi. The lexicographic product of graphs. *Duke Math. J.*, 28:573–578, 1961.
- [144] Gert Sabidussi. Vertex transitive graphs. *Monatshefte für Mathematik*, 68:426–438, 1964.
- [145] Michael Sampels. Algebraic constructions of efficient systolic architectures. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Massively Parallel Computing Systems (MPCS '96)*. IEEE, 1996.
- [146] Michael Sampels. *Algebraische Konstruktion effizienter Verbindungsnetzwerke*. PhD thesis, Fachbereich Informatik der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg, Allemagne, 1996.

- [147] Michael Sampels. Cayley graphs as interconnection networks: A case study. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Parallel Processing by Cellular Automata and Arrays (PARCELLA '96)*, pages 67–76, Berlin, 1996. Akademie-Verlag.
- [148] Michael Sampels. Massively parallel architectures and systolic communication. In *Proceedings of the 5th Euromicro Workshop on Parallel and Distributed Processing (PDP '97)*. IEEE/Euromicro, 1997.
- [149] Michael Sampels and Stefan Schöf. Massively parallel architectures for parallel discrete event simulation. In *Proc. 8th European Simulation Symp. (ESS '96)*, volume 2, pages 374–378. SCS, 1996.
- [150] Stephen Schibell and Richard Stafford. Processor interconnection networks from Cayley graphs. *Discrete Appl. Math.*, 40:333–357, 1992.
- [151] P. Strogova. Finding a finite group presentation using rewriting. In M. Bronstein, editor, *Proceedings of the Workshop on symbolic rewriting techniques*, pages 35–40, 1995.
- [152] P. Vadapelli and P.K. Srimani. Trivalent graphs for interconnection networks. *Inform. Process. Lett.*, 54:329–335, 1995.
- [153] P. Vadapelli and P.K. Srimani. A new family of Cayley graph interconnection networks of constant degree four. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems*, 7:26–32, 1996.
- [154] P. Vadapelli and P.K. Srimani. Shortest routings in trivalent Cayley graphs networks. *Inform. Process. Lett.*, 57:183–188, 1996.
- [155] E. VanDoorn. Connectivities of circulant digraphs. *J. Graph Theory*, 10:9–14, 1986.
- [156] A. Vince. Graphs and finitely presented groups. *Contemporary Mathematics*, 89:167–185, 1989. Graphs and algorithms, Proc. Conf., Boulder/CO 1987.
- [157] Mark E. Watkins. Connectivity of transitive graphs. *J. Combin. Theory*, 8:23–29, 1970.
- [158] Mark E. Watkins. On the action of non-abelian groups on graphs. *J. Combin. Theory*, 11:95–104, 1971.