Cours 2-5
Démonstration automatique

Évelyne Contejean

5 octobre 2012

Rappels

Étape de récriture

$$s \xrightarrow[l \to r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p = l\sigma \quad \text{et} \quad t = s[r\sigma]_p$$

Étape équationelle

$$s \xleftrightarrow[u=v, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p = u\sigma \quad \text{et} \quad t = s[v\sigma]_p$$

Pics et paires critiques

$l \longrightarrow r$ et $g \longrightarrow d$ deux règles

Hypothèses :

- il existe p position non variable de l
- $l|_p$ et g sont unifiables avec pour unificateur principal σ

Pic critique de $g \longrightarrow d$ sur $l \longrightarrow r$ à la position p

$$
\begin{tikzcd}
 & l\sigma = l\sigma[g\sigma]_p \arrow[dl, "r \leftarrow l"', "{\sigma, \Lambda}"] \arrow[dr, "g \rightarrow d", "{\sigma, p}"'] & \\
r\sigma & & l\sigma[d\sigma]_p
\end{tikzcd}
$$

Paire critique

$$(r\sigma, l\sigma[d\sigma]_p) \quad \text{ou} \quad r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p$$

Joignabilité et confluence locale

Définition : un pic $x \leftarrow y \rightarrow z$ (ou une paire (x, y)) est joignable si il existe u tel que $x \rightarrow^* u$ et $z \rightarrow^* u$.

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
x \arrow[dr, dashed, "R^*"'] & & z \arrow[dl, dashed, "R^*"] \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

Définition : R est localement confluent si toutes ses paires critiques sont joignables.

Théorème : Si R est localement confluent et termine, alors

$$\forall s\ t,\quad s \xleftrightarrow[\{l=r \mid l\rightarrow r\in R\}]{*} t \quad\Longleftrightarrow\quad \exists u, s \xrightarrow[R]{*} u \xleftarrow[R]{*} t$$

Et si *R* n'est pas localement confluent ?

En fait, la vraie question est

- on a un ensemble d'équations (pas d'orientation)
- comment trouver un ensemble de règles
    1. équivalent
    2. localement confluent
    3. qui termine

Solution : la complétion

Les entrées de la complétion

- Un ensemble d'équations
- Un ordre de récriture, bien fondé, stable par instanciation et mise sous contexte

Idées de base :

- Utiliser l'ordre pour orienter les équations
- Ajouter les paires critiques non joignables entre règles sous forme de nouvelles équations

But :

- Ordre bien fondé $\longrightarrow$ récriture qui termine
- Ajout de paires critiques $\longrightarrow$ confluence locale

Les règles de complétion (0)

Structures de données et initialisation

L'ordre est fixé, et ne change pas au cours de la complétion

Les équations et les règles évoluent : $E; R$

$$\text{Initial} \quad \frac{}{E_0 \;;\; \emptyset}$$

Les règles de complétion (1)
Orientation

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E\ ;\ R \cup \{s \to t\}} \quad \text{si } s \succ t$$

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E\ ;\ R \cup \{t \to s\}} \quad \text{si } t \succ s$$

Les règles de complétion (2)

Déduction (paires critiques)

$$\text{Paire Critique} \quad \frac{E\ ;\ R}{E \cup \{e\}\ ;\ R} \quad \text{si } e \text{ est une paire critique de } R$$

Les règles de complétion (3)

Trivial

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\} \; ; \; R}{E \; ; \; R}$$

Les règles de complétion (4)

Simplification (des équations)

$$\text{Simplifie} \quad \frac{E \cup \{s = t\} \; ; \; R}{E \cup \{s' = t\} \; ; \; R} \quad \text{si } s \underset{R}{\rightarrow} s'$$

$$\text{Simplifie} \quad \frac{E \cup \{s = t\} \; ; \; R}{E \cup \{s = t'\} \; ; \; R} \quad \text{si } t \underset{R}{\rightarrow} t'$$

Les règles de complétion (5)

Composition (des règles)

$$\text{Compose} \quad \frac{E\ ;\ R \cup \{l \to r\}}{E\ ;\ R \cup \{l \to r'\}} \quad \text{si } r \underset{R}{\to} r'$$

Les règles de complétion (6)

Effondrement (d'une règle)

si $l \xrightarrow[g \to d]{} l', g \to d \in R$, et

Collapse $\dfrac{E \; ; \; R \cup \{l \to r\}}{E \cup \{l' = r\} \; ; \; R}$

- $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$ ou σ n'est pas un renommage
- ou $l = g\sigma$ et $r \succ d\sigma$ avec σ qui est un renommage.

Entrées

$$\left\{\begin{array}{lrcl} E_1 & e \cdot x & = & x \\ E_2 & I(x) \cdot x & = & e \\ E_3 & (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \end{array}\right\}$$

RPO avec la précédence $I \succ \cdot \succ e$,

Orientation de E_1

$$\begin{array}{llcl}
E_1 & e \cdot x & = & x \\
E_2 & I(x) \cdot x & = & e \\
E_3 & (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \\
R_4 & e \cdot x & \to & x
\end{array}$$

Orientation de E_2

$$
\begin{array}{lrcl}
E_2 & I(x) \cdot x & = & e \\
E_3 & (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \\
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e
\end{array}
$$

Orientation de E_3

$$
\begin{array}{lrcl}
E_3 & (x \cdot y) \cdot z & = & x \cdot (y \cdot z) \\
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z)
\end{array}
$$

Calcul de paire critique entre R_4 et R_6

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
E_7 & e \cdot (y \cdot z) & = & y \cdot z
\end{array}
$$

Pic critique

$$
e \cdot (y \cdot z) \xleftarrow[R_6]{\Lambda} (e \cdot y) \cdot z \xrightarrow[R_4]{1} y \cdot z
$$

Simplification de E_7 par R_4

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
E_7 & e \cdot (y \cdot z) & = & y \cdot z \\
E_8 & y \cdot z & = & y \cdot z
\end{array}
$$

Réduction

$$
e \cdot (y \cdot z) \xrightarrow[R_4]{\Lambda} y \cdot z
$$

Destruction de E_8 par Trivial

$$\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
E_8 & y \cdot z & = & y \cdot z
\end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (8)

Calcul de paires critiques entre R_5 et R_6

$$\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
E_9 & I(x) \cdot (x \cdot z) & = & e \cdot z
\end{array}$$

Pic critique

$$I(x) \cdot (x \cdot z) \xleftarrow[R_6]{\Lambda} (I(x) \cdot x) \cdot z \xrightarrow[R_5]{1} e \cdot z$$

Simplification de E_9 par R_4

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
E_9 & I(x) \cdot (x \cdot z) & = & e \cdot z \\
E_{10} & I(x) \cdot (x \cdot z) & = & z
\end{array}
$$

Réduction

$$e \cdot z \xrightarrow[R_4]{\Lambda} z$$

Orientation de E_{10}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
E_{10} & I(x) \cdot (x \cdot z) & = & z \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z
\end{array}
$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (11)

Calcul de paire critique entre R_6 et elle-même

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
E_{12} & (x1 \cdot x2) \cdot (y \cdot z) & = & (x1 \cdot (x2 \cdot y)) \cdot z
\end{array}
$$

Pic critique

$$
(x1 \cdot x2) \cdot (y \cdot z) \xleftarrow[R_6]{\Lambda} ((x1 \cdot x2) \cdot y) \cdot z \xrightarrow[R_6]{1} (x1 \cdot (x2 \cdot y)) \cdot z
$$

Simplification de E_{12} par R_6, et destruction de l'équation obtenue

$$\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
E_{12} & (x1 \cdot x2) \cdot (y \cdot z) & = & (x1 \cdot (x2 \cdot y)) \cdot z
\end{array}$$

Réductions

$$(x1 \cdot x2) \cdot (y \cdot z) \xrightarrow[R_6]{\Lambda} x1 \cdot (x2 \cdot (y \cdot z))$$

$$(x1 \cdot (x2 \cdot y)) \cdot z \xrightarrow[R_6]{\Lambda} x1 \cdot ((x2 \cdot y) \cdot z) \xrightarrow[R_6]{2} x1 \cdot (x2 \cdot (y \cdot z))$$

Calcul de paire critique entre R_4 et R_{11}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
E_{13} & z & = & I(e) \cdot z
\end{array}
$$

Pic critique

$$
z \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} I(e) \cdot (e \cdot z) \xrightarrow[R_4]{2} I(e) \cdot z
$$

Orientation de E_{13}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
E_{13} & z & = & I(e) \cdot z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z
\end{array}
$$

Calcul de paire critique entre R_5 et R_{11}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
E_{15} & x & = & I(I(x)) \cdot e
\end{array}
$$

Pic critique

$$
x \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} I(I(x)) \cdot (I(x) \cdot x) \xrightarrow[R_5]{2} I(I(x)) \cdot e
$$

Orientation de E_{15}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R14 & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
E_{15} & x & = & I(I(x)) \cdot e \\
R_{16} & I(I(x)) \cdot e & \rightarrow & x
\end{array}
$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (17)

Calcul de paire critique entre R_{11} et elle-même

$$\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{16} & I(I(x)) \cdot e & \rightarrow & x \\
E_{17} & x \cdot y & = & I(I(x)) \cdot y
\end{array}$$

Pic critique

$$x \cdot y \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} I(I(x)) \cdot (I(x) \cdot (x \cdot y)) \xrightarrow[R_{11}]{2} I(I(x)) \cdot y$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (18)

Orientation de E_{17}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{16} & I(I(x)) \cdot e & \rightarrow & x \\
E_{17} & x \cdot y & = & I(I(x)) \cdot y \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow & x \cdot y
\end{array}
$$

Effondrement de R_{16} par R_{18}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{16} & I(I(x)) \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow & x \cdot y \\
E_{19} & x \cdot e & = & x
\end{array}
$$

Réduction

$$I(I(x)) \cdot e \xrightarrow[R_{18}]{\Lambda} x \cdot e$$

Orientation de E_{19}

$$\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow & x \cdot y \\
E_{19} & x \cdot e & = & x \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x
\end{array}$$

Calcul de paire critique entre R_{18} et R_{20}, suivi de simplification

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \to & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \to & z \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \to & x \cdot y \\
R_{20} & x \cdot e & \to & x \\
E_{21} & x & = & I(I(x))
\end{array}
$$

Pic critique

$$
x \xleftarrow[R_{20}]{\Lambda} x \cdot e \xleftarrow[R_{18}]{\Lambda} I(I(x)) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\Lambda} I(I(x))
$$

Orientation de E_{21}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow & x \cdot y \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
E_{21} & x & = & I(I(x)) \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x
\end{array}
$$

Effondrement de R_{18} par R_{22}, et destruction immédiate

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow & x \cdot y \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x
\end{array}
$$

Réduction

$$I(I(x)) \cdot y \xrightarrow[R_{22}]{1} x \cdot y$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (24)

Calcul de paire critique entre R_{14} et R_{20}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
E_{23} & e & = & I(e)
\end{array}
$$

Pic critique

$$
e \xleftarrow[R_{14}]{\Lambda} I(e) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\Lambda} I(e)
$$

Orientation de E_{23}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
E_{23} & e & = & I(e) \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e
\end{array}
$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (26)

Effondrement de R_{14} par R_{24}, suivi d'une simplification par R_4, et destruction immédiate

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \to & z \\
R_{14} & I(e) \cdot z & \to & z \\
R_{20} & x \cdot e & \to & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \to & x \\
R_{24} & I(e) & \to & e
\end{array}
$$

Réduction

$$I(e) \cdot z \xrightarrow[R_{24}]{1} e \cdot z \xrightarrow[R_4]{\Lambda} z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (27)

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{22}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
E_{25} & z & = & x \cdot (I(x) \cdot z)
\end{array}
$$

Pic critique

$$z \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} I(I(x)) \cdot (I(x) \cdot z) \xrightarrow[R_{22}]{1} x \cdot (I(x) \cdot z)$$

Orientation de E_{25}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
E_{25} & z & = & x \cdot (I(x) \cdot z) \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z
\end{array}
$$

Calcul de paire critique entre R_{20} et R_{26}

$$\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
E_{27} & e & = & x \cdot I(x)
\end{array}$$

Pic critique

$$e \xleftarrow[R_{26}]{\Lambda} x \cdot (I(x) \cdot e) \xrightarrow[R_{20}]{2} x \cdot I(x)$$

Orientation de E_{27}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \to & z \\
R_{20} & x \cdot e & \to & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \to & x \\
R_{24} & I(e) & \to & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \to & z \\
E_{27} & e & = & x \cdot I(x) \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \to & e
\end{array}
$$

Calcul de paire critique entre R_6 et R_{28}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
E_{29} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & = & e
\end{array}
$$

Pic critique

$$
x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) \xleftarrow[R_6]{\Lambda} (x \cdot y) \cdot I(x \cdot y) \xrightarrow[R_{28}]{\Lambda} e
$$

Orientation de E_{29}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
E_{29} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & = & e \\
R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow & e
\end{array}
$$

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{30}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow & e \\
E_{31} & y \cdot I(x \cdot y) & = & I(x) \cdot e
\end{array}
$$

Pic critique

$$y \cdot I(x \cdot y) \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} I(x) \cdot (x \cdot (y \cdot I(x \cdot y))) \xrightarrow[R_{30}]{2} I(x) \cdot e$$

Simplification de E_{31} par R_{20}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow & e \\
E_{31} & y \cdot I(x \cdot y) & = & I(x) \cdot e \\
E_{32} & y \cdot I(x \cdot y) & = & I(x)
\end{array}
$$

Réduction

$$I(x) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\Lambda} I(x)$$

Orientation de E_{32}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow & e \\
E_{32} & y \cdot I(x \cdot y) & = & I(x) \\
R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow & I(x)
\end{array}
$$

Effondrement et destruction de R_{30} par R_{33}.

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \to & z \\
R_{20} & x \cdot e & \to & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \to & x \\
R_{24} & I(e) & \to & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \to & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \to & e \\
R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \to & e \\
R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \to & I(x)
\end{array}
$$

Réduction

$$x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) \xrightarrow[R_{33}]{2} x \cdot I(x) \xrightarrow[R_{28}]{\Lambda} e$$

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{33}

$$
\begin{array}{llcl}
R_4 & e \cdot x & \to & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \to & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \to & x \cdot (y \cdot z) \\
\color{blue}{R_{11}} & \color{blue}{I(x) \cdot (x \cdot z)} & \color{blue}{\to} & \color{blue}{z} \\
R_{20} & x \cdot e & \to & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \to & x \\
R_{24} & I(e) & \to & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \to & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \to & e \\
\color{blue}{R_{33}} & \color{blue}{y \cdot I(x \cdot y)} & \color{blue}{\to} & \color{blue}{I(x)} \\
\color{red}{E_{34}} & \color{red}{I(x \cdot y)} & \color{red}{=} & \color{red}{I(y) \cdot I(x)}
\end{array}
$$

Pic critique

$$
I(x \cdot y) \xleftarrow[R]{\Lambda} \color{purple}{I(y) \cdot (y \cdot I(x \cdot y))} \xrightarrow[R]{2} I(y) \cdot I(x)
$$

Orientation de E_{34}

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow & I(x) \\
E_{34} & I(x \cdot y) & = & I(y) \cdot I(x) \\
R_{35} & I(x \cdot y) & \rightarrow & I(y) \cdot I(x)
\end{array}
$$

Effondrement de R_{33} par R_{35},

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow & I(x) \\
R_{35} & I(x \cdot y) & \rightarrow & I(y) \cdot I(x)
\end{array}
$$

Réduction

$$
y \cdot I(x \cdot y) \xrightarrow[R_{35}]{2} y \cdot (I(y) \cdot I(x)) \xrightarrow[R_{26}]{\Lambda} I(x)
$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (40)

$$
\begin{array}{lrcl}
R_4 & e \cdot x & \rightarrow & x \\
R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow & e \\
R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow & x \cdot (y \cdot z) \\
R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{20} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow & x \\
R_{24} & I(e) & \rightarrow & e \\
R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow & z \\
R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow & e \\
R_{35} & I(x \cdot y) & \rightarrow & I(y) \cdot I(x)
\end{array}
$$

Toutes les paires critiques restantes sont joignables, et aucune autre règle n'est applicable.

Le système obtenu est le résultat de la complétion. Il est confluent.

Correction de la complétion

Théorème :
Si $(E; R) \vdash (E'; R')$ par une des règles de la complétion,
alors les deux relations

$$\xleftrightarrow[E \cup R]{*} \quad \text{et} \quad \xleftrightarrow[E' \cup R']{*}$$

coïncident.

Étape élementaire entre s et t

$$s[l\theta]_q \xleftrightarrow[l \rightleftharpoons r]{q,\theta} s[r\theta]_q$$

« Croissance » sous un contexte $C[\cdot]_p$ par une substitution σ.

$$C[s[l\theta]_q\sigma]_p = C[s\sigma]_p[l\theta\sigma]_{pq} \xleftrightarrow[l \rightleftharpoons r]{pq,\theta\sigma} C[s\sigma]_p[r\theta\sigma]_{pq} = C[s[r\theta]_q\sigma]_p$$

Notation

$$s \;-\; P \;-\; t \qquad\qquad C[s\sigma]_p \;-\; C[P\sigma]_p \;-\; C[t\sigma]_p$$

Preuve entre s et t

$$s \; - P_1 - \; s_1 \ldots s_n \; - P_n - t$$

Preuve entre $C[s\sigma]_p$ et $C[t\sigma]_p$

$$C[s\sigma]_p \; - C[P_1\sigma]_p - \; C[s_1\sigma]_p \ldots C[s_n\sigma]_p \; - C[P_n\sigma]_p - \; C[t\sigma]_p$$

$$C[s\sigma]_p \; - C[(P_1 - \; \ldots \; - P_n)\sigma]_p - \; C[t\sigma]_p$$

Preuve P entre s et t

$$s \;-\; P_1 \;-\; s_1 \ldots s_i \;-\; P_{i+1} - \ldots \;-\; P_k \;-\; s_k \ldots s_n \;-\; P_n - t$$

Sous-preuve de P entre s_i et s_k

$$s_i \;-\; P_{i+1} - \ldots \;-\; P_k \;-\; s_k$$

Preuve P entre s et t

$$s \;-\; P \;-\; t$$

Preuve Q entre t et u

$$t \;-\; Q \;-\; u$$

Preuve PQ entre s et u

$$s \;-\; P \;-\; t \;-\; Q \;-\; u$$

Preuve $P[Q]$ entre s et t

$$s \;-\; P_2 \;-\; u \;-\; Q \;-\; v \;-\; P_2 \;-\; t$$

Autre preuve Q' entre u et v

$$u \;-\; Q' \;-\; v$$

Nouvelle preuve $P[Q']$ entre s et t

$$s \;-\; P_2 \;-\; u \;-\; Q' \;-\; v \;-\; P_2 \;-\; t$$

Preuve $P[Q]$ entre s et t

$$s \;-\; P_2 \;-\; u \;=\; u[l\theta]_q \;-\; \underset{l \rightleftharpoons r}{\overset{q,\theta}{\longleftrightarrow}} \;-\; u[r\theta]_q = v \;-\; P_2 \;-\; t$$

Autre preuve Q'' entre l et r

$$l \;-\; Q'' \;-\; r$$

Nouvelle preuve $P[u[Q''\theta]_q]$ entre s et t

$$s \;-\; P_2 \;-\; u \;-\; u[Q''\theta]_q \;-\; v \;-\; P_2 \;-\; t$$

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E\ ;\ R \cup \{s \to t\}} \quad \text{si } s \succ t$$

$$\forall x, \qquad x[s\sigma]_q \xleftrightarrow[s=t]{q} x[t\sigma]_q \qquad \text{ssi} \qquad x[s\sigma]_q \xrightarrow[s\to t]{q} x[t\sigma]_q$$

Les deux preuves

$$x[(s = t)\sigma]_q \qquad \text{et} \qquad x[(s \to t)\sigma]_q$$

sont interchangeables

Paire Critique $\dfrac{E \; ; \; R}{E \cup \{e\} \; ; \; R}$ si e est une paire critique de R

On suppose que $e \equiv r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p$, où

- $l \to r$ et $g \to d$ sont deux règles de R,
- p est une position non variable de l,
- σ un unificateur principal de $l|_p$ et g : $l_p\sigma = l\sigma|_p = g\sigma$

$$\forall x\, y, \quad x \xleftrightarrow[E \cup R]{*} y \quad \Longrightarrow \quad x \xleftrightarrow[E \cup \{e\} \cup R]{*} y$$

$$r\sigma \xleftrightarrow[e]{} l\sigma[d\sigma]_p \quad \Longrightarrow \quad r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p$$

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\} \; ; \; R}{E \; ; \; R}$$

$$\forall x\ y, \quad x \xleftrightarrow[s=s]{} y \quad \text{ssi} \quad x \xleftrightarrow[\emptyset]{*} y \quad \text{ssi} \quad x = y$$

$$\text{Simplifie} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E \cup \{s = t'\}\ ;\ R} \quad \text{si } t \rightarrow_R t'$$

Soit $l \rightarrow r$ la règle de R qui réduit t en t' à la position p :
$t = t[l\sigma]_p$ et $t' = t[r\sigma]_p$.

$$s \underset{s=t}{\longleftrightarrow} t \quad \Longrightarrow \quad s \underset{s=t'}{\longleftrightarrow} t' = t[r\sigma]_p \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t[l\sigma]_p = t$$

$$s \underset{s=t'}{\longleftrightarrow} t' \quad \Longrightarrow \quad s \underset{s=t}{\longleftrightarrow} t = t[l\sigma] \xrightarrow[l \rightarrow r]{p} t[r\sigma]_p = t'$$

$$\text{Compose} \quad \frac{E\ ;\ R \cup \{l \to r\}}{E\ ;\ R \cup \{l \to r'\}} \quad \text{si } r \to_R r'$$

Soit $g \to d$ la règle de R qui réduit r en r' à la position p : $r = r[g\sigma]_p$ et $r' = r[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \to r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \to r']{} r' = r[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r[g\sigma]_p = r$$

$$l \xrightarrow[l \to r']{} r' \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \to r]{} r = r[g\sigma]_p \xrightarrow[g \to d]{p} r[d\sigma]_p = r'$$

Correction de la complétion

Effondrement

$$\text{Collapse} \quad \frac{E\ ;\ R \cup \{l \to r\}}{E \cup \{l' = r\}\ ;\ R} \quad \text{si } l \to_R l'$$

Soit $g \to d$ la règle de R qui réduit l en l' à la position p : $l = l[g\sigma]_p$ et $l' = l[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \to r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l = l[g\sigma]_p \xrightarrow[g \to d]{p} l[d\sigma]_p = l' \xleftrightarrow[l'=r]{} r$$

$$l' \xleftrightarrow[l'=r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l' = l[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} l[g\sigma]_p = l \xrightarrow[l \to r]{} r$$

On veut montrer que dans les groupes $I(a \cdot b) = (I(b) \cdot e) \cdot I(a)$

Avec R_ω

$$I(a \cdot b) \xrightarrow[R_{35}]{\Lambda} I(b) \cdot I(a) \xleftarrow[R_{20}]{1} (I(b) \cdot e) \cdot I(a)$$

Avec E_0 ?

Les métamorphoses d'une preuve (1)

$$\xleftarrow[R_4]{2}\ \xleftarrow[R_5]{21}\ \xrightarrow[R_6]{2}\ \xrightarrow[R_5]{22}\ \xleftarrow[R_6]{22}\ \xrightarrow[R_5]{221}\ \xrightarrow[R_4]{22}\ \xleftarrow[R_6]{2}\ \xrightarrow[R_5]{21}\ \xrightarrow[R_4]{2}$$

$$\xleftarrow[R_4]{22}\ \xleftarrow[R_5]{221}\ \xrightarrow[R_6]{22}\ \xleftarrow[R_4]{221}\ \xleftarrow[R_5]{2211}\ \xrightarrow[R_6]{221}\ \xrightarrow[R_5]{2212}\ \xleftarrow[R_6]{2212}\ \xrightarrow[R_5]{22121}\ \xrightarrow[R_4]{2212}$$

$$\xleftarrow[R_6]{221}\ \xrightarrow[R_5]{2211}\ \xrightarrow[R_4]{221}\ \xleftarrow[R_6]{2212}\ \xrightarrow[R_5]{22121}\ \xrightarrow[R_4]{2212}\ \xleftarrow[R_6]{221}\ \xrightarrow[R_5]{2211}\ \xrightarrow[R_4]{221}\ \xleftarrow[R_6]{221}$$

$$\xrightarrow[R_5]{2211}\ \xrightarrow[R_4]{221}\ \xleftarrow[R_6]{2212}\ \xrightarrow[R_5]{22121}\ \xrightarrow[R_4]{2212}\ \xleftarrow[R_5]{2212}\ \xleftarrow[R_6]{221}\ \xrightarrow[R_5]{2211}\ \xrightarrow[R_4]{221}\ \xleftarrow[R_6]{222}$$

$$\xrightarrow[R_5]{2221}\ \xrightarrow[R_4]{222}\ \xleftarrow[R_6]{2222}\ \xrightarrow[R_5]{22221}\ \xrightarrow[R_4]{2222}\ \xleftarrow[R_5]{2222}\ \xleftarrow[R_6]{222}\ \xrightarrow[R_5]{2221}\ \xrightarrow[R_4]{222}\ \xrightarrow[R_6]{22}$$

$$\xleftarrow[R_6]{2}\ \xrightarrow[R_5]{21}\ \xrightarrow[R_4]{2}\ \xleftarrow[R_6]{\Lambda}\ \xrightarrow[R_5]{1}\ \xrightarrow[R_4]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_4]{1}\ \xleftarrow[R_5]{11}\ \xrightarrow[R_6]{1}\ \xrightarrow[R_5]{12}$$

$$\xleftarrow[R_6]{12}\ \xrightarrow[R_5]{121}\ \xrightarrow[R_4]{12}\ \xleftarrow[R_6]{1}\ \xrightarrow[R_5]{11}\ \xrightarrow[R_4]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (2)

$$\xleftarrow[R_4]{2} \; \xleftarrow[E_9]{2} \; \xrightarrow[R_5]{22} \; \xrightarrow[E_9]{22} \; \xrightarrow[R_4]{22} \; \xrightarrow[E_9]{2} \; \xrightarrow[R_4]{2} \; \xleftarrow[R_4]{22} \; \xleftarrow[E_9]{22} \; \xleftarrow[R_4]{221} \; \xleftarrow[E_9]{221}$$

$$\xrightarrow[R_5]{2212} \; \xrightarrow[E_9]{2212} \; \xrightarrow[R_4]{2212} \; \xrightarrow[E_9]{221} \; \xrightarrow[R_4]{221} \; \xrightarrow[E_9]{2212} \; \xrightarrow[R_4]{2212} \; \xrightarrow[E_9]{221} \; \xrightarrow[R_4]{221} \; \xrightarrow[E_9]{221}$$

$$\xrightarrow[R_4]{221} \; \xrightarrow[E_9]{2212} \; \xrightarrow[R_4]{2212} \; \xleftarrow[R_5]{2212} \; \xrightarrow[E_9]{221} \; \xrightarrow[R_4]{221} \; \xrightarrow[E_9]{222} \; \xrightarrow[R_4]{222} \; \xrightarrow[E_9]{2222} \; \xrightarrow[R_4]{2222}$$

$$\xleftarrow[R_5]{2222} \; \xrightarrow[E_9]{222} \; \xrightarrow[R_4]{222} \; \xrightarrow[R_6]{22} \; \xrightarrow[E_9]{2} \; \xrightarrow[R_4]{2} \; \xrightarrow[E_9]{\Lambda} \; \xrightarrow[R_4]{\Lambda} \; \xleftarrow[R_4]{1} \; \xleftarrow[E_9]{1}$$

$$\xrightarrow[R_5]{12} \; \xrightarrow[E_9]{12} \; \xrightarrow[R_4]{12} \; \xrightarrow[E_9]{1} \; \xrightarrow[R_4]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (3)

$$\xleftarrow[E_{10}]{2}\ \xrightarrow[R_5]{22}\ \xrightarrow[E_{10}]{22}\ \xrightarrow[E_{10}]{2}\ \xleftarrow[E_{10}]{22}\ \xleftarrow[E_{10}]{221}\ \xrightarrow[R_5]{2212}\ \xrightarrow[E_{10}]{2212}\ \xrightarrow[E_{10}]{221}\ \xrightarrow[E_{10}]{2212}\ \xrightarrow[E_{10}]{221}$$

$$\xrightarrow[E_{10}]{221}\ \xrightarrow[E_{10}]{2212}\ \xleftarrow[R_5]{2212}\ \xrightarrow[E_{10}]{221}\ \xrightarrow[E_{10}]{222}\ \xrightarrow[E_{10}]{2222}\ \xleftarrow[R_5]{2222}\ \xrightarrow[E_{10}]{222}\ \xrightarrow[R_6]{22}\ \xrightarrow[E_{10}]{2}$$

$$\xrightarrow[E_{10}]{\Lambda}\ \xleftarrow[E_{10}]{1}\ \xrightarrow[R_5]{12}\ \xrightarrow[E_{10}]{12}\ \xrightarrow[E_{10}]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (4)

$$\xleftarrow[R_{11}]{2} \xrightarrow[R_5]{22} \xrightarrow[R_{11}]{22} \xrightarrow[R_{11}]{2} \xleftarrow[R_{11}]{22} \xleftarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_5]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{221}$$

$$\xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{2212} \xleftarrow[R_5]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{222} \xrightarrow[R_{11}]{2222} \xleftarrow[R_5]{2222} \xrightarrow[R_{11}]{222} \xrightarrow[R_6]{22} \xrightarrow[R_{11}]{2}$$

$$\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda} \xleftarrow[R_{11}]{1} \xrightarrow[R_5]{12} \xrightarrow[R_{11}]{12} \xrightarrow[R_{11}]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (5)

$$\xrightarrow[E_{15}]{2} \; \xrightarrow[R_{11}]{22} \; \xrightarrow[R_{11}]{2} \; \xleftarrow[R_{11}]{22} \; \xrightarrow[E_{15}]{221} \; \xrightarrow[R_{11}]{2212} \; \xrightarrow[R_{11}]{221} \; \xrightarrow[R_{11}]{2212} \; \xrightarrow[R_{11}]{221} \; \xrightarrow[R_{11}]{221} \; \xrightarrow[R_{11}]{2212}$$

$$\xleftarrow[E_{15}]{221} \; \xrightarrow[R_{11}]{222} \; \xrightarrow[R_{11}]{2222} \; \xleftarrow[E_{15}]{222} \; \xrightarrow[R_{6}]{22} \; \xrightarrow[R_{11}]{2} \; \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda} \; \xrightarrow[E_{15}]{1} \; \xrightarrow[R_{11}]{12} \; \xrightarrow[R_{11}]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (6)

$$\xleftarrow[R_{16}]{2} \xrightarrow[R_{11}]{22} \xrightarrow[R_{11}]{2} \xleftarrow[R_{11}]{22} \xleftarrow[R_{16}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{2212} \xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{2212}$$

$$\xrightarrow[R_{16}]{221} \xrightarrow[R_{11}]{222} \xrightarrow[R_{11}]{2222} \xrightarrow[R_{16}]{222} \xrightarrow[R_{6}]{22} \xrightarrow[R_{11}]{2} \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda} \xleftarrow[R_{16}]{1} \xrightarrow[R_{11}]{12} \xrightarrow[R_{11}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{16}]{2} \; \xleftarrow[E_{17}]{2} \; \xleftarrow[R_{11}]{22} \; \xleftarrow[R_{16}]{221} \; \xleftarrow[E_{17}]{221} \; \xleftarrow[R_{17}]{221} \; \xrightarrow[E_{17}]{221} \; \xrightarrow[R_{16}]{221} \; \xrightarrow[E_{17}]{222} \; \xrightarrow[R_{16}]{222} \; \xrightarrow[R_{6}]{22}$$
$$\xrightarrow[R_{11}]{2} \; \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda} \; \xleftarrow[R_{16}]{1} \; \xleftarrow[E_{17}]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (8)

$$\xleftarrow[R_{16}]{2} \xrightarrow[R_{18}]{2} \xleftarrow[R_{11}]{22} \xleftarrow[R_{16}]{221} \xrightarrow[R_{18}]{221} \xrightarrow[R_{18}]{221} \xleftarrow[R_{18}]{221} \xrightarrow[R_{16}]{221} \xleftarrow[R_{18}]{222} \xrightarrow[R_{16}]{222} \xrightarrow[R_{6}]{22}$$
$$\xrightarrow[R_{11}]{2} \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda} \xleftarrow[R_{16}]{1} \xrightarrow[R_{18}]{1}$$

Les métamorphoses d'une preuve (9)

$$\xleftarrow[E_{19}]{2}\ \xleftarrow[R_{11}]{22}\ \xleftarrow[E_{19}]{221}\ \xrightarrow[R_{18}]{221}\ \xrightarrow[E_{19}]{221}\ \xrightarrow[E_{19}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[E_{19}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\ \xleftarrow[R_{11}]{22}\ \xleftarrow[R_{20}]{221}\ \xrightarrow[R_{18}]{221}\ \xrightarrow[R_{20}]{221}\ \xrightarrow[R_{20}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\ \xleftarrow[R_{11}]{22}\ \xleftarrow[E_{21}]{221}\ \xrightarrow[R_{20}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\ \xleftarrow[R_{11}]{22}\ \xrightarrow[R_{22}]{221}\ \xrightarrow[R_{20}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\ \xrightarrow[E_{25}]{22}\ \xrightarrow[R_{20}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\ \xleftarrow[R_{26}]{22}\ \xrightarrow[R_{20}]{222}\ \xrightarrow[R_{6}]{22}\ \xrightarrow[R_{11}]{2}\ \xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\ \xleftarrow[R_{20}]{1}$$

Les métamorphoses d’une preuve (10)

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\quad\xrightarrow[E_{27}]{22}\quad\xrightarrow[R_{6}]{22}\quad\xrightarrow[R_{11}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\quad\xleftarrow[R_{28}]{22}\quad\xrightarrow[R_{6}]{22}\quad\xrightarrow[R_{11}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\quad\xleftarrow[E_{29}]{22}\quad\xrightarrow[R_{11}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\quad\xleftarrow[R_{30}]{22}\quad\xrightarrow[R_{11}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{20}]{2}\quad\xleftarrow[E_{31}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[E_{32}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[R_{33}]{2}\quad\xrightarrow[R_{11}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xleftarrow[E_{34}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

$$\xrightarrow[R_{35}]{\Lambda}\quad\xleftarrow[R_{20}]{1}$$

Persistance

Soit une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \dots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \dots (E_n; R_n) \vdash \dots$$

$$E_\infty = \bigcup_i E_i \qquad R_\infty = \bigcup_i R_i$$

Définition : Une équation (resp. une règle) est persistante à partir du rang *i* si elle appartient à

$$\bigcap_{i \leqslant j} E_j \qquad \left(\text{resp.} \bigcap_{i \leqslant j} R_j\right)$$

Une équation (resp. une règle) est persistante si elle appartient à

$$E_\omega = \bigcup_i \bigcap_{i \leqslant j} E_j \qquad \left(\text{resp.} R_\omega = \bigcup_i \bigcap_{i \leqslant j} R_j\right)$$

Succès et échec

Définition : Une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \ldots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \ldots (E_n; R_n) \vdash \ldots$$

est un succès si $E_\omega = \emptyset$, un échec sinon

Équité

Définition : Une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \ldots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \ldots (E_n; R_n) \vdash \ldots$$

est équitable si toutes les paires critiques entre les règles persistantes sont calculées

$$CP(R_\omega) \subseteq E_\infty$$

Coût d'une étape élémentaire

Coût élémentaire : $(\{m\}, l, t)$ avec $\{m\}$ un multiensemble de termes, l et t deux termes.

Ordre sur les coûts élémentaires : ordre lexicographique

- première composante : extension multiensemble de l'ordre de la complétion $\prec$
- 2ième composante : partie stricte du plongement
- 3ième composante : $\prec$

Suivant le cas sur le type d'étape :

- $s \underset{E_\infty}{\longleftrightarrow} t \quad \rightsquigarrow \quad (\{s, t\}, \bot, \bot)$
- $s \underset{l \to r}{\longrightarrow} t \quad \rightsquigarrow \quad (\{s\}, l, t)$
- $s \underset{r \leftarrow l}{\longleftarrow} t \quad \rightsquigarrow \quad (\{t\}, l, s)$

Coût d'une preuve générale

$$s \;-P_1-\; s_1 \ldots s_i \;-P_{i+1}- \ldots \;-P_k-\; s_k \ldots s_n \;-P_n-t$$

multiensemble des coûts $c(P_i)$

ordre $\lll$ = extension multiensemble de l'ordre sur les coûts élémentaires.

Remarque Comme $\prec$ est bien fondé, $\lll$ est bien fondé

Complétude

Lemme : Soit une exécution de la complétion équitable et qui réussit

$$(E_0, \emptyset) \vdash (E_1, R_1) \vdash \ldots (E_n, R_n) \vdash (E_{n+1}, R_{n+1}) \ldots$$

Si P preuve de $s \xleftrightarrow[E_\infty \cup R_\infty]{*} t$, différente de $\xrightarrow[R_\omega]{*} \xleftarrow[R_\omega]{*}$
alors il existe P' preuve de $s \xleftrightarrow[E_\infty \cup R_\infty]{*} t$ et $P' \lll P$

Remarque Si P et Q sont deux preuves (élémentaires ou non) avec

$$P \lll Q$$

alors

$$C[P\sigma]_p \lll C[P\sigma]_p$$

Les ordres de base qui définissent $\lll$ sont stables par mise sous contexte et instantiation

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

Comme $E_\omega = \emptyset$, toutes les équations de E_∞ disparaissent

- Orientation
- Trivial
- Simplification

Par définition de R_∞ et R_ω, toutes les règles de $R_\infty \setminus R_\omega$ disparaissent

- Compose
- Collapse

Comme $CP(R_\omega) \subseteq E_\infty$, tous les pics de R_ω disparaissent

- Pic non critique, par commutation (cf lemme des paires critiques)
- Pic critique, par déduction

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E\ ;\ R \cup \{s \to t\}} \quad \text{si } s \succ t$$

$$\forall x, \qquad x[s\sigma]_q \xleftrightarrow[s=t]{q} x[t\sigma]_q \qquad \Longrightarrow \qquad x[s\sigma]_q \xrightarrow[s\to t]{q} x[t\sigma]_q$$

$$c(s = t) = (\{s,t\}, \perp, \perp) \ggcurly (\{s\}, s, t) = c(s \to t)$$

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\} \ ; \ R}{E \ ; \ R}$$

$$\forall x\ y, \qquad x \xleftrightarrow[s=s]{} y \qquad \Longrightarrow \qquad x \xleftrightarrow[\emptyset]{*} y$$

$$c(\{s = s\}) = \{(\{s, s\}, \bot, \bot)\} \ggcurly c(\{\})$$

$$\text{Simplifie} \quad \frac{E \cup \{s = t\}\ ;\ R}{E \cup \{s = t'\}\ ;\ R} \quad \text{si } t \to_R t'$$

Soit $l \to r$ la règle de R qui réduit t en t' à la position p :
$t = t[l\sigma]_p$ et $t' = t[r\sigma]_p$.

$$s \xleftrightarrow[s=t]{} t \quad \Longrightarrow \quad s \xleftrightarrow[s=t']{} t' = t[r\sigma]_p \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t[l\sigma]_p = t$$

$$c(\{s \xleftrightarrow[s=t]{} t\}) = \{(\{s,t\},\bot,\bot)\} \gg \\ \{(\{s,t'\},\bot,\bot);\ (\{t\},l,t')\} = c(s \xleftrightarrow[s=t']{} t' \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t)$$

$$\text{Compose} \quad \frac{E\ ;\ R \cup \{l \to r\}}{E\ ;\ R \cup \{l \to r'\}} \quad \text{si } r \to_R r'$$

Soit $g \to d$ la règle de R qui réduit r en r' à la position p : $r = r[g\sigma]_p$ et $r' = r[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \to r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \to r']{} r' = r[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r[g\sigma]_p = r$$

$$c(l \xrightarrow[l \to r]{} r) = \{(\{l\}, l, r)\} \gg$$
$$\{(\{l\}, l, r'), (\{r\}, g, r')\} = c(l \xrightarrow[l \to r']{} r' \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r)$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, effondrement

$$\text{Collapse} \quad \frac{E\ ;\ R \cup \{l \to r\}}{E \cup \{l' = r\}\ ;\ R} \quad \text{si } l \to_R l'$$

Soit $g \to d$ la règle de R qui réduit l en l' à la position p : $l = l[g\sigma]_p$ et $l' = l[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l\to r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l = l[g\sigma]_p \xrightarrow[g\to d]{p} l[d\sigma]_p = l' \xleftrightarrow[l'=r]{} r$$

$$c(l \xrightarrow[l\to r]{} r) = \{(\{l\}, l, r)\} \gg$$
$$\{(\{l\}, g, l'), (\{l', r\}, \bot, \bot)\} = c(l \xrightarrow[g\to d]{p} l' \xleftrightarrow[l'=r]{} r)$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, effondrement (suite)

Les conditions de Collapse et l'ordre $\lll$ sont liés :

- $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$ ou σ n'est pas un renommage
- $l = g\sigma$ et $r \succ d\sigma$ avec σ qui est un renommage

Ordre de plongement $C[s\sigma] \trianglerighteq s$, $\triangleright = \trianglerighteq \setminus \trianglelefteq$ partie stricte

- Si $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$, alors $(\{l\}, l, r) \ggg (\{l\}, g, l')$
- Si $l|_\Lambda = g\sigma$ et σ n'est pas un renommage alors $(\{l\}, l, r) \ggg (\{l\}, g, l')$
- Si $l = g\sigma$, $r \succ d\sigma$ avec σ qui est un renommage alors $(\{l\}, l, r) \ggg (\{l\}, g, l')$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, déduction

Soit un pic critique (de R_ω)

$$r\sigma \xleftarrow[r \longleftarrow l]{} l\sigma = l\sigma[g\sigma]_p \xrightarrow[g \longrightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p$$

Par hypothèse d'équité, on va calculer la paire critique associée, et avoir la nouvelle preuve

$$r\sigma \xleftrightarrow[r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p]{} l\sigma[d\sigma]_p$$

$$c(r\sigma \xleftarrow[r \longleftarrow l]{} l\sigma \xrightarrow[g \longrightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p) = \{(\{l\sigma\}, l, r\sigma), (\{l\sigma\}, g, l\sigma[d\sigma]_p)\} \gg$$
$$\{(\{r\sigma, l\sigma[d\sigma]_p\}, \perp, \perp)\} = c(r\sigma \xleftrightarrow[r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p]{} l\sigma[d\sigma]_p)$$

car

$$l\sigma \succ r\sigma \qquad\qquad l\sigma \succ l\sigma[d\sigma]_p$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, commutation d'un pic non critique

Soit un pic non critique

$$s \xleftarrow[R]{} t \xrightarrow[R]{} u$$

Il se referme par

$$s \xrightarrow[R]{*} \; \xleftarrow[R]{*} u$$

$$c(s \xleftarrow[R]{} t \xrightarrow[R]{} u) \succ \{(\{t\}, \bot, \bot)\} \succ c(s \xrightarrow[R]{*} \; \xleftarrow[R]{*} u)$$

car tous les termes de $s \xrightarrow[R]{*} \; \xleftarrow[R]{*} u$ sont $\prec t$

En résumé, on sait fabriquer une preuve Q, avec $Q \lll P$ dès que

- P utilise une équation
- P utilise une règle de $R_\infty \backslash R_\omega$
- P contient un pic de R_ω

ce qui est la même chose que P n'est pas de la forme

$$\xrightarrow[R_\omega]{*} \quad \xleftarrow[R_\omega]{*}$$

Complétude de la complétion

Théorème : Soit une exécution de la complétion équitable et qui réussit

$$(E_0, \emptyset) \vdash (E_1, R_1) \vdash \ldots (E_n, R_n) \vdash (E_{n+1}, R_{n+1}) \ldots$$

- $\xleftrightarrow[E_\infty \cup R_\infty]{*}$ est équivalente à $\xrightarrow[R_\omega]{*} \xleftarrow[R_\omega]{*}$
- R_ω est équivalent à E_0
- R_ω est convergent
- (semi-)décision pour le problème du mot de E_0

Idée : se baser sur la preuve de complétude pour éliminer les paires critiques « inutiles »

Qu'est-ce qu'inutile veut dire ?

On peut éliminer le pic critique associé par une preuve plus petite qui n'utilise pas la paire critique.

$$r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma = l\sigma[g\sigma]_p \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p$$

- substitution σ réductible
- $l\sigma$ réductible strictement au dessous de p

Et si ça ne marche pas ?

- Problème lié à l'ordre choisi (voir la démo)
- Problème inhérent au système d'équations de départ ; par exemple commutativité

$$x + y = y + x$$

Entrées :

- un système d'équations E_0
- un ordre $\succ$

Étape de récriture ordonnée :

$$s \xrightarrow[E_{\succ};u=v,\sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p = u\sigma \quad , \quad t = s[v\sigma]_p \quad \text{et} \quad u\sigma \succ v\sigma$$

Changer la relation de récriture (1)

Récriture ordonnée par un ordre $\succ$

On ajoute les règles suivantes à la complétion usuelle

- Deduction2 $(E; R) \vdash (E\{s = t\}; R)$
  if $s \leftrightarrow_{E \cup R} u \leftrightarrow_{E \cup R} t$ and $u \not\prec t$, $u \not\prec s$
- Simplification2 : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E \cup \{u = t\}; R)$
  if $s \rightarrow_{E_\succ; l=r} u$ and $s \rhd l$
- Composition2 : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E; R \cup \{s \rightarrow u\})$
  if $t \rightarrow_{E_\succ} u$
- Collapse2 : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E \cup \{v = t\}; R)$
  if $s \rightarrow_{E_\succ; l=r} v$ and $s \rhd l$

Entrées :

- un système d'équations A (commutativité ou AC)
- un système d'équations E_0
- un ordre $\succ$ compatible avec A

$$\xleftrightarrow[A]{*} \succ \xleftrightarrow[A]{*} \quad \subseteq \quad \succ$$

Étape de récriture modulo A :

$$s \xrightarrow[A \backslash l \to r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p =_A l\sigma \quad \text{et} \quad t = s[r\sigma]_p$$

Changer la relation de récriture (2)

- Delete : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E; R)$ if $s =_A t$
- Compose : $(E; R \cup \{s \to t\}) \vdash (E; R \cup \{s \to u\})$ if $t \xrightarrow[A\backslash R]{} u$
- Simplify : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E \cup \{s = u\}; R)$ if $t \xrightarrow[A\backslash R]{} u$
- Orient : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E; R \cup \{s \to t\})$ if $s \succ t$
- Collapse : $(E; R \cup \{s \to t\}) \vdash (E \cup \{u = t\}; R)$ if $s \xrightarrow[A\backslash R]{} u$ by a rule $l \to r \in R$ with $s \rhd l$
- Extend : $(E; R) \vdash (E; R \cup \{t \to s\})$ if $s \xleftarrow[R]{} u \xleftrightarrow[A]{} t$
- Deduce : $(E; R) \vdash (E \cup \{s = t\}; R)$ if $s \xleftarrow[R]{} u \xrightarrow[A\backslash R]{} t$

Changer la relation de récriture (3)

Entrées :

- un système de récriture S convergent
- un système d'équations E_0
- un ordre $\succ$ compatible avec S

$$\underset{S}{\rightarrow} \quad \subseteq \quad \succ$$

Étape de récriture modulo S :

$$s \xrightarrow[l \to r/S, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s' = s\downarrow_S \quad \text{et} \quad s' \xrightarrow[l \to r, \sigma]{p} t$$

Changer la relation de récriture (3)

Récriture normalisée

- Normalisation $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \{u\downarrow_S = v\downarrow_S\}; R$
- Orientation $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \Theta(u, v); R \cup \Psi(u, v)$ si $u = u\downarrow_S,\ v = v\downarrow_S,\ u \succ v$
- Déduction $E; R \vdash E \cup \{u = v\}; R$ si $u = v \in CP_T(R)$
- Effacement $E \cup \{u = v\}; R \vdash E; R$ si $u =_{AC} v$
- Composition $E; R \cup \{u \to v\} \vdash E; R \cup \{u \to v'\}$ si $v \xrightarrow[R/S]{} v'$
- Simplification $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \{u' = v\}; R$ si $u \xrightarrow[R/S]{} u'$
- Réduction $E; R \cup \{u \to v\} \vdash E \cup \{u' = v\}; R$ si
$$\begin{cases} l \to r \in R \\ u \xrightarrow[l \to r/S]{\theta} u' \\ (u, v) \rhd (l\theta, r\theta) \end{cases}$$

Assurer autrement la terminaison du résultat (1)

Multi-complétion

Idée : faire en parallèle plusieurs complétions avec plusieurs ordres $\prec_1, \prec_2, \ldots, \prec_n$
Structure de données : un ensemble N de faits

$$\langle s : t, L_\rightarrow, L_\leftarrow, L_= \rangle$$

avec

- $L_=, L_\rightarrow, L_\leftarrow$ sont deux à deux disjoints
- $L_= \cup L_\rightarrow \cup L_\leftarrow \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$
- si $i \in L_=$ et $\langle s : t, L_=, L_\rightarrow, L_\leftarrow \rangle \in N$, alors $s = t \in E(\prec_i)$
- si $i \in L_\rightarrow$ et $\langle s : t, L_=, L_\rightarrow, L_\leftarrow \rangle \in N$, alors $s \rightarrow t \in R(\prec_i)$
- si $i \in L_\leftarrow$ et $\langle s : t, L_=, L_\rightarrow, L_\leftarrow \rangle \in N$, alors $t \rightarrow s \in R(\prec_i)$

- DELETE : $N \cup \{\langle s : s, \emptyset, \emptyset, L\rangle\} \vdash N$ if $L \neq \emptyset$
- REWRITE-1 : $N \cup \{\langle s : t, L_1, L_2, L_3\rangle\} \vdash N \cup \left\{ \begin{array}{c} \langle s : t, L_1 \backslash L, L_2, L_3 \backslash L\rangle \\ \langle s : u, L \cap L_1, \emptyset, L \cap L_3\rangle \end{array} \right\}$
  if $\langle l : r, L, \ldots, \ldots\rangle \in N$, $t \rightarrow_{\{l \rightarrow r\}} u$, $L \cap (L_1 \cup L_3) \neq \emptyset$, and either $t \doteq l$ or $L \cap L_2 = \emptyset$
- REWRITE-2 :
  $N \cup \{\langle s : t, L_1, L2, L_3\rangle\} \vdash N \cup \left\{ \begin{array}{c} \langle s : t, L_1 \backslash L, L_2 \backslash L, L_3 \backslash L\rangle \\ \langle s : u, L \cap L_1, \emptyset, L \cap (L_2 \cup L_3)\rangle \end{array} \right\}$ if $\langle l : r, L, \ldots, \ldots\rangle \in N$, $t \rightarrow_{\{l \rightarrow r\}} u$, $t \rhd l$ and $L \cap L_2 \neq \emptyset$
- ORIENT : $N \cup \{\langle s : t, L_1, L_2, L_3 \cup L\rangle\} \vdash N \cup \{\langle s : t, L_1 \cup L, L_2, L_3\rangle\}$ if $L \neq \emptyset$ and $s \succ_i t$ for all $i \in L$
- DEDUCE : $N \vdash N \cup \{\langle s : t, \emptyset, \emptyset, L \cap L'\rangle\}$ if $\langle l : r, L, \ldots, \ldots\rangle \in N$, $\langle l' : r', L', \ldots, \ldots\rangle \in N$, $L \cap L' \neq \emptyset$, and $s \leftarrow_{\{l \rightarrow r\}} u \rightarrow_{\{l' \rightarrow r'\}} t$

Assurer autrement la terminaison du résultat (2)

Complétion avec un TT ("termination tool")

Idée : au lieu d'attendre un ordre en entrée,
on utilise un outil automatique de terminaison

une équation est orientée si la règle obtenue ne casse pas la terminaison.

Attention :

- à l'étape (E_n, R_n), l'ordre sous-jacent $\underset{\bigcup_{i \leqslant n} R_i}{\longrightarrow}$ est bien fondé
- $\underset{\bigcup_{i \leqslant n} R_i}{\longrightarrow} \subseteq \underset{\bigcup_{i \leqslant n+1} R_i}{\longrightarrow}$
- $\underset{\bigcup_i R_i}{\longrightarrow}$ n'est en général pas bien fondé

Contre-exemple (récriture de mots)

$$E_0 = \{wa = ab; ac = abc\} \qquad R_n = \{wa \to ab\} \cup \bigcup_{i \leqslant n} \{ab^i c \to ab^{i+1} c\}$$

Paires critiques

$$abb^i c \xleftarrow[ab \leftarrow wa]{} wab^i c \xrightarrow[ab^i c \to ab^{i+1} c]{} wab^{i+1} c \xrightarrow[wa \to ab]{} abb^{i+1} c$$

Il faut se restreindre à des exécutions finies.

Assurer autrement la terminaison du résultat (2)

Complétion avec un TT ("termination tool")

- orient : $(E \cup \{s = t\}, R, C) \vdash (E, R \cup \{s \to t\}, C \cup \{s \to t\})$ if $C \cup \{s \to t\}$ terminates
- deduce : $(E, R, C) \vdash (E \cup \{s = t\}, R, C)$ if $s \leftarrow_R u \to_R t$
- delete : $(E \cup \{s = s\}, R, C) \vdash (E, R, C)$
- simplify : $(E \cup \{s = t\}, R, C) \vdash (E \cup \{u = t\}, R, C)$ if $s \to_R u$
- compose : $(E, R \cup \{s \to t\}, C) \vdash (E, R \cup \{s \to u\}, C)$ if $t \to_R u$
- collapse : $(E, R \cup \{s \to t\}, C) \vdash (E \cup \{v = t\}, R, C)$ if $s \xrightarrow[R]{\rhd} v$

Unification

(suite)

Unification modulo E

E un ensemble d'équations de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

Définition (Problème d'unification modulo)

1. $\top, \bot$,
2. $s = t$,
3. $\exists x, P$,
4. $P \wedge Q$, $P \vee Q$

Définition (Solutions)

1. *Toute substitution est solution de $\top$, aucune n'est solution de $\bot$,*
2. *σ est solution de $s = t$ si $s\sigma =_E t\sigma$,*
3. *σ est solution de $\exists x, P$ s'il existe t tel que σ est solution de $P\{x \mapsto t\}$,*
4. *σ est une solution de $P \wedge Q$ si σ est une solution de P et de Q,*
5. *σ est une solution de $P \vee Q$ si σ est une solution de P ou de Q.*

Notation $\mathcal{U}_E(P)$: ensemble des solutions de P modulo E

Formes résolues

Définition

forme résolue si

- $\top$ *ou* $\bot$
- *ou de la forme*

$$\exists y_1, \ldots, y_p, x_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge x_n = t_n$$

x_is 2à 2 $\neq$, $\{x_i\}_i \cap \{y_j\}_j = \emptyset$, $\{x_i\}_i \cap \bigcup_k \mathcal{V}ar(t_k) = \emptyset$.

forme résolue compacte : pour toute équation variable-variable $x = y$, x et y sont libres

Forme résolue $\mapsto$ forme résolue compacte

appliquer la règle suivante autant que possible

$$\text{Replace-nv} \quad \frac{\exists y_1, \ldots, y_p, y \;\; P \wedge x = y}{\exists y_1, \ldots, y_p \;\; P\{y \mapsto x\}}$$

Solutions des problèmes en forme résolue

Proposition

$P \equiv \exists y_1, \ldots, y_p,\ x_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge x_n = t_n$ un problème en forme résolue, et soit θ la substitution

$$\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$$

$\{\theta\}$ est un ensemble complet minimal d'unificateurs pour P

même preuve que dans le cas $E = \emptyset$

Ensemble complet minimal d'unificateur(s)

Définition (Ensemble complet minimal d'unificateurs)

$\mathscr{M}(P)$ *est un* *ensemble complet minimal d'unificateurs* *si*

- $\mathscr{M}(P) \subseteq \mathscr{U}(P)$
- *minimal : pour tous* $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}(P)$, *si* $\mu_1 = \mu_2\theta$, *alors* $\mu_1 = \mu_2$
- *complet :* $\mathscr{U}(P) = \{\mu\theta \mid \mu \in \mathscr{M}(P), \theta \text{ substitution}\}$

Classification

E une théorie équationnelle est

1. unitaire si $\mathscr{U}(P) = \emptyset$ ou $\mathscr{M}(P) = \{\mu\}$
2. finitaire si $\mathscr{M}(P) = \bigcup_{i=1}^{i=n_P} \{\mu_i\}$
3. infinitaire si $\mathscr{M}(P) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\mu_i\}$
4. nullaire sinon

1. $E = \emptyset$, unitaire
2. $E = AC$, finitaire
3. $E = A$, infinitaire
4. $E = A \cup \{x + x = x\}$, nullaire

Représentation commode des termes modulo AC

$$\begin{array}{rcll}
(x+y)+z & = & x+(y+z) & \qquad (A)\\
x+y & = & y+x & \qquad (C)
\end{array}$$

Définition (Forme canonique)

forme canonique $\overline{t}$ d'un terme t :

$$\begin{array}{rcll}
\overline{x} & = & x & \text{si } x \text{ est une variable}\\
\overline{f(t_1,\ldots,t_n)} & = & f(\overline{t_1},\ldots,\overline{t_n}) & \text{si } f \text{ n'est pas un symbole AC}\\
\overline{+(t_1,t_2)} & = & \left\{\begin{array}{l}
+(Sort(\overline{t_1},\overline{t_2})) \text{ si } t_i(\Lambda) \neq +\\
+(Sort(\overline{t_1},v_1,\ldots,v_n)) \text{ si } t_1(\Lambda) \neq +, \overline{t_2} = +(v_1,\ldots,v_n)\\
+(Sort(u_1,\ldots,u_m,\overline{t_2})) \text{ si } \overline{t_1} = +(u_1,\ldots,u_m), t_2(\Lambda) \neq +\\
+(Sort(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n)) \text{ si } \overline{t_1} = +(u_1,\ldots,u_m),\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{t_2} = +(v_1,\ldots,v_n)
\end{array}\right. &
\end{array}$$

$Sort$ est une fonction de tri sur les listes de termes qui utilise un ordre arbitraire fixé

Égalité modulo AC

Théorème

$$s =_{AC} t \iff \overline{s} = \overline{t}$$

Unification modulo AC

finitaire, mais pas unitaire

$x + y = a + b$ a pour solutions

$$\{x \mapsto a; y \mapsto b\} \text{ et } \{x \mapsto b; y \mapsto a\}$$

pas de $\mathrm{mgu}\ \mu$

Unification modulo AC élémentaire

élémentaire = 1 seul symbole AC + des variables

$\mathscr{U}_{AC}(x+s=x+t)=\mathscr{U}_{AC}(s=t)$:
donc on peut se restreindre aux équations AC de la forme

$$E \equiv \underbrace{x_1+\cdots+x_1}_{a_1 \text{ fois}}+\cdots+\underbrace{x_n+\cdots+x_n}_{a_n \text{ fois}} = \underbrace{y_1+\cdots+y_1}_{b_1 \text{ fois}}+\cdots+\underbrace{y_m+\cdots+y_m}_{b_m \text{ fois}}$$

avec $\{x_1,\ldots,x_n\}\cap\{y_1,\ldots,y_m\}=\emptyset$

équation diophantienne linéaire associée à E

$$(e) \equiv a_1v_1+\cdots+a_nv_n-b_1w_1-\cdots-b_mw_m=0$$

Lien entre E et (e)

Lemme

σ une solution de E et z une variable introduite par σ.
$c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m$ les nombres d'occurrences de z dans $x_1\sigma, \ldots, x_n\sigma, y_1\sigma, \ldots, y_m\sigma$.
Alors $(c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m)$ est une solution de (e).

Démonstration.

les formes canoniques de $s\sigma$ et $t\sigma$ ont le même nombre de z,
et ces nombres sont $a_1c_1 + \cdots + a_nc_n$ et $b_1d_1 + \cdots + b_md_m$. $\square$

Représentation compacte des substitutions

Définition

$v_1, \dots, v_n$ variables, $t_1, \dots, t_m$ termes, $a_{ij} \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$
$\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} \neq 0$

$$\textit{tableau } T \equiv \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & \cdots & v_i & \cdots & v_n \\ \hline t_1 & a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_m & a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

désigne la substitution

$$\{v_i \mapsto \underbrace{t_1 + \cdots + t_1}_{a_{1i} \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{t_m + \cdots + t_m}_{a_{mi} \text{ fois}}\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$$

sous-tableau admissible de T : sous ensemble de lignes de T où la somme des coefficients d'aucune colonne n'est nulle.

Unification AC élementaire

Théorème (Stickel (1975), Livesey & Siekman (1976))

P : p équations modulo AC, $E_1, \ldots, E_p$ avec n variables $x_1, \ldots, x_n$. Soit

$$S = \{(c_{1,1}, \ldots, c_{1,n}), \ldots, (c_{m,1}, \ldots, c_{m,n})\}$$

l'ensemble des solutions minimales pour $\leqslant^n$, positives, non nulles de $(e_1) \wedge \ldots \wedge (e_p)$. Alors, les sous-tableaux admissibles de

$$T \equiv \begin{array}{c|ccc} & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline z_1 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_m & c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} \end{array}$$

où $z_1, \ldots, z_m$ sont de nouvelles variables,

sont un ensemble complet d'unificateurs modulo AC de P.

Exemple

Combinaison d'algorithmes d'unification : hypothèses

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2$ est finie

$E = E_1 \cup E_2$

E_i ne contient que des termes de $\mathcal{T}(\mathscr{F}_i, \mathscr{X})$, finitaire

E_i, $i = 1, 2$ est une théorie simple, les équations de la forme $s = t$ où t est un sous-terme propre de s, n'ont pas de solutions modulo E_i.

pour E_i, $i = 1, 2$, algorithme qui calcule un ensemble complet fini d'unificateurs

Séparation

Définition (Sous-terme étranger)

$u = t|_p$ *est* étranger *dans* t *si* $p = q \cdot n$, $t(q) \in \mathcal{F}_i$, $t(q \cdot n) \in \mathcal{F}_j$ *avec* $i \neq j$.

VA $$\frac{\exists y_1, \ldots, y_p \; s[u]_p = t \wedge P}{\exists x, y_1, \ldots, y_p \; s[x]_p = t \wedge x = u \wedge P}$$ si u est un sous-terme étranger de $s[u]_p$ à la position p.

Règles d'inférence

E-Res $\dfrac{P_i}{P'_i}$ si P_i n'est pas en forme résolue et P'_i est une forme résolue compacte de P_i.

Lemme

$s, t \in \mathcal{T}(\mathscr{F}_1, \mathscr{X})$, γ de $\mathcal{T}(\mathscr{F}, \mathscr{X})$ telle que

$$s\gamma =_{E_1 \cup E_2} t\gamma$$

Alors il existe σ de $\mathcal{T}(\mathscr{F}_1, \mathscr{X})$, θ de $\mathcal{T}(\mathscr{F}, \mathscr{X})$

$$s\sigma =_{E_1} t\sigma \quad \text{et} \quad \gamma =_{E_1 \cup E_2} \sigma\theta$$

La preuve de ce lemme repose sur la complétion close ordonnée.

Règles d'inférence (suite)

Var-Rep $\dfrac{\exists z_1, \ldots, z_p\ x = y \wedge P}{\exists z_1, \ldots, z_p\ x = y \wedge P\{x \mapsto y\}}$ si $x, y \in \mathrm{Var}(P)$, et x est $\exists$-quantifié ou y est libre

Conflit-1 $\dfrac{\exists z_1, \ldots, z_p\ x = s_1 \wedge x = s_2 \wedge P}{\perp}$ si $x \in \mathcal{X}$, $s_1(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_2(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$

Conflit-2 $\dfrac{\exists z_1, \ldots, z_p\ s_1 = s_2 \wedge P}{\perp}$ $s_1(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_2(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$

Cycle $\dfrac{\exists y_1, \ldots, y_p\ x_1 = t_1[x_2]_{p_1} \wedge \ldots x_n = t_n[x_1]_{p_n}}{\perp}$ si $n \geqslant 2$, $\exists i$ et $\exists j$, $s_i(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_j(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$.

EQE $\dfrac{\exists x, y_1, \ldots, y_p\ x = s \wedge P}{\exists y_1, \ldots, y_p\ P}$ si x n'apparaît ni dans s ni dans P