CLASSEMENT

Liste

L = (7, 3, 1, 4, 8, 3)

classement, tri

L = (1, 3, 3, 4, 7, 8)

Liste classée (en ordre croissant)

Tri interne

éléments en table, liste chaînée. En mémoire centrale

Tri externe

éléments en fichiers

Opérations élémentaires

comparaison de deux éléments
échange
sélection de places

TRIS INTERNES

Elémentaires

Sélection
Insertion [Shell] O (n^2)
Bulles

Dichotomiques

Tri rapide
Fusion O ($n \log n$)

Par structures

Arbre (équilibré)
Tas O ($n \log n$)

Rangement

Tri lexicographique
Partitionnement - rangement ~ linéaires, O(n)

CLES

Guy	1m75	60 k
Anne	1m70	55 k
Lou	1m75	57 k
Luc	1m72	61 k

CLE = TAILLE

Anne	1m70	55 k
Luc	1m72	61 k
Guy	1m75	60 k
Lou	1m75	57 k

CLE = POIDS / TAILLE

Anne	1m70	55 k
Lou	1m75	57 k
Guy	1m75	60 k
Luc	1m72	61 k

CLE = (TAILLE, POIDS)

Anne	1m70	55 k
Luc	1m72	61 k
Lou	1m75	57 k
Guy	1m75	60 k

TRI en TABLE

$L = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en table, accès direct à e_i
Clé : Élément $\rightarrow$ Ensemble muni de l 'ordre $\leq$

Problème

Calculer p, permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$

telle que $Clé(e_{p(1)}) \leq Clé(e_{p(2)}) \leq \ldots \leq Clé(e_{p(n)})$

Rang

$p^{-1}(i)$ est le rang de l'élément i dans la suite classée

Stabilité

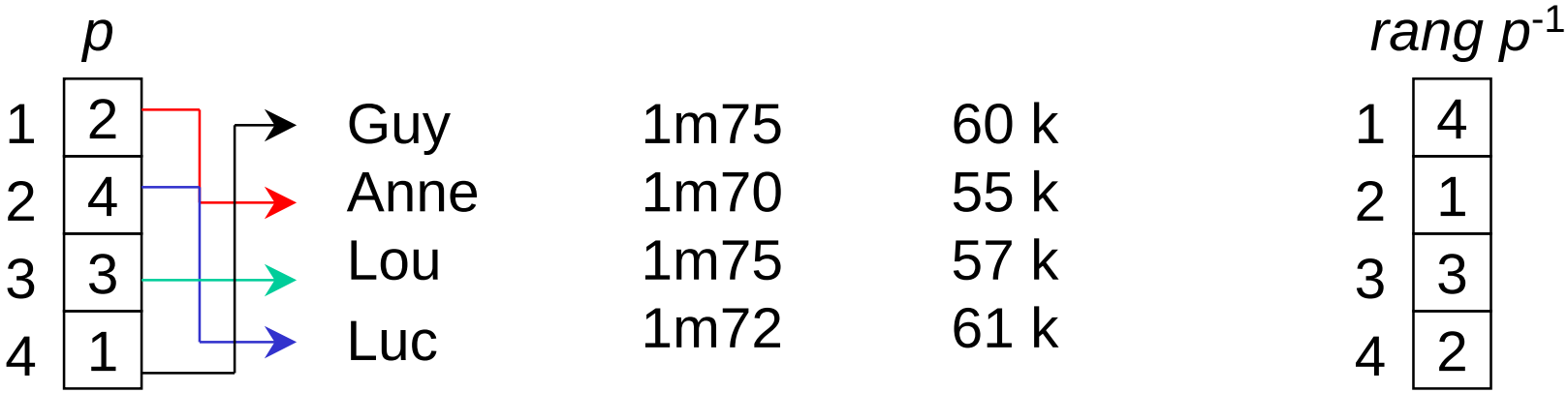
p est stable, chaque fois que $Clé\ (e_{p(i)}) = Clé\ (e_{p(k)})$:

$i < k$ équivalent $p(i) < p(k)$

[le tri n'échange pas les éléments de même clé]

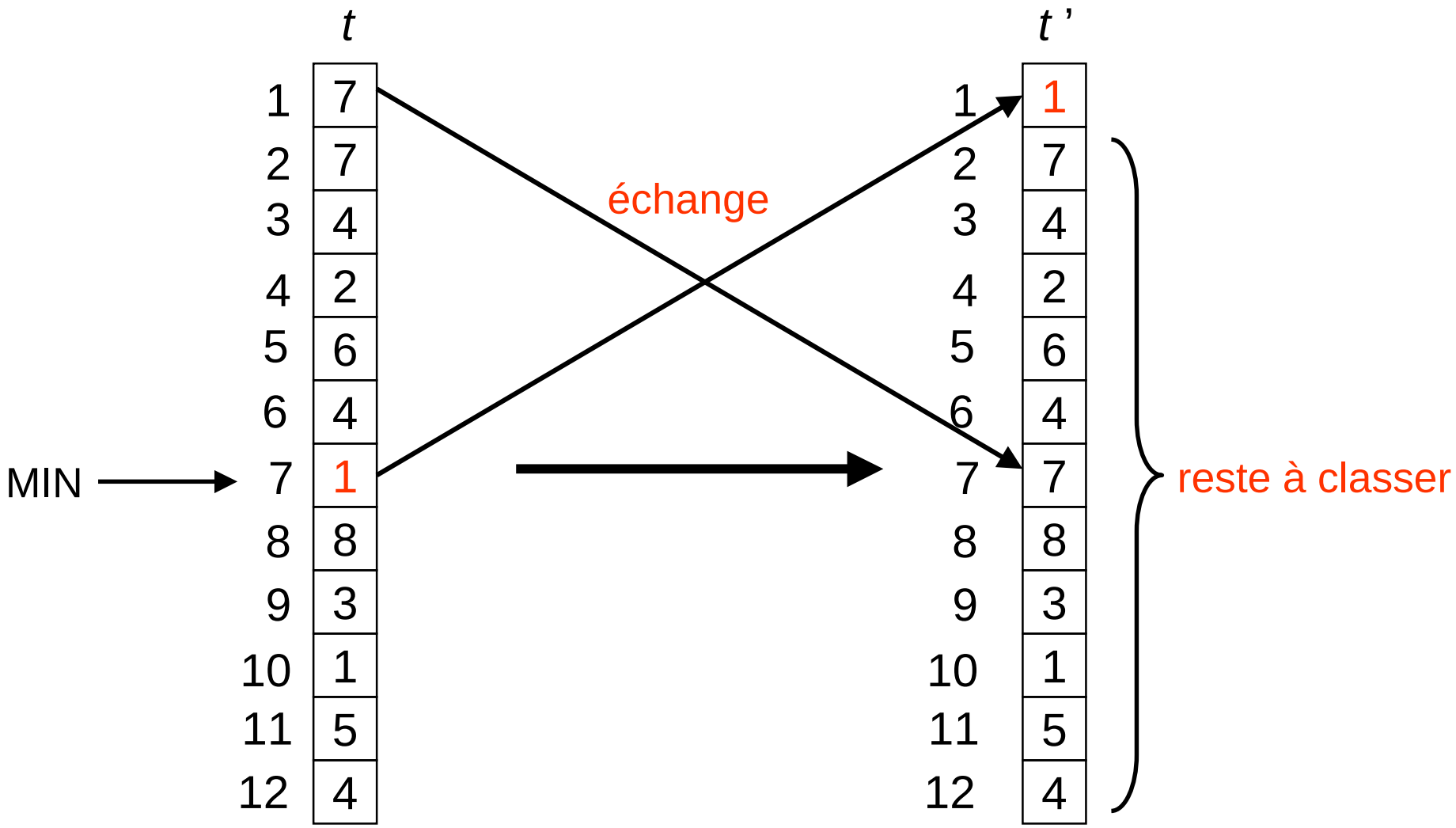
1	Guy	1m75	60 k
2	Anne	1m70	55 k
3	Lou	1m75	57 k
4	Luc	1m72	61 k

Classement par rapport à la clé (TAILLE, POIDS)



Problème équivalent à :
trier (1, 2, …, *n*) suivant *Clé* o *e*

Tri par sélection



Recherche du minimum par balayage séquentiel

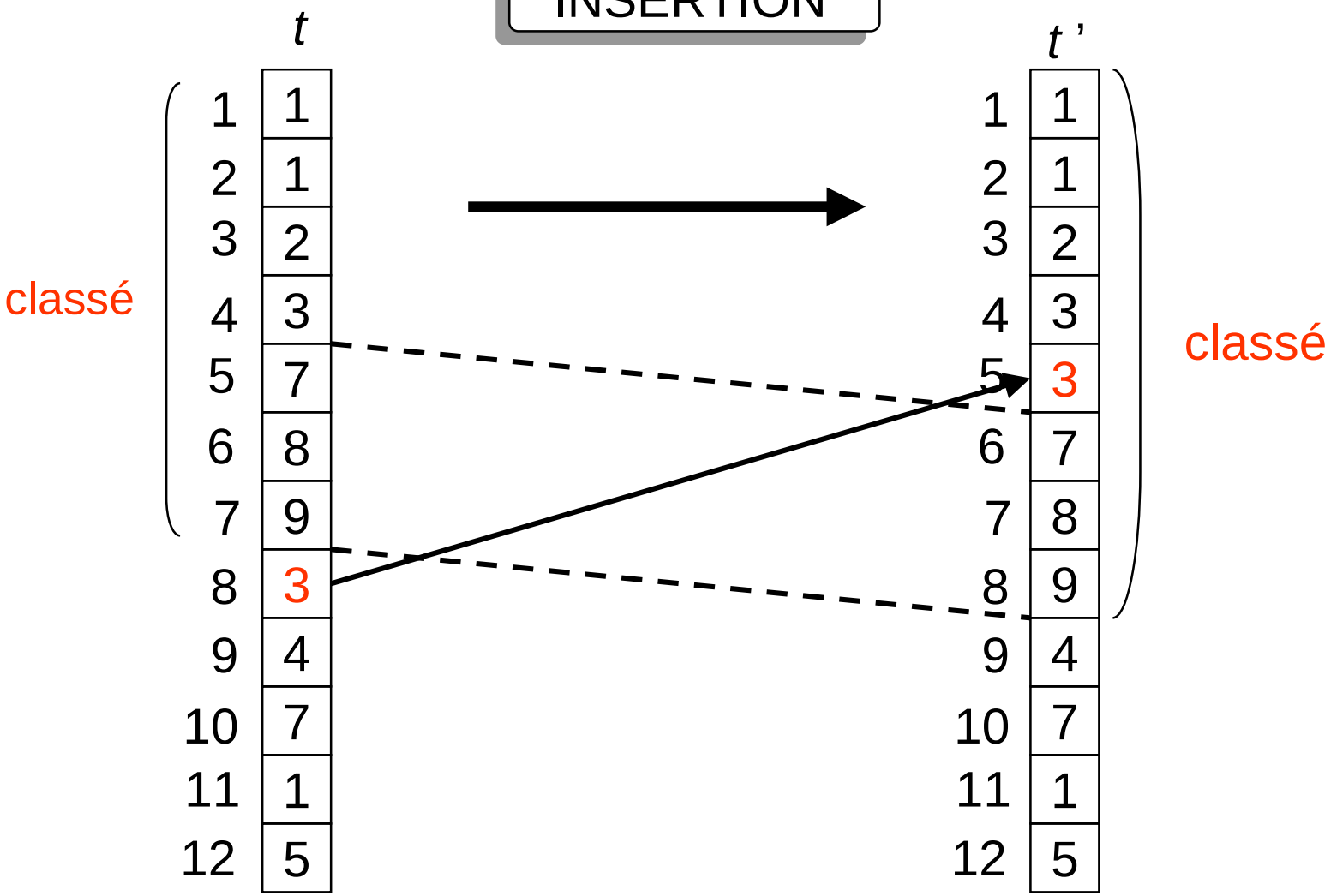
Ou organisation des éléments en « tas » (voir « file de priorité »)

Tri par sélection

```
fonction  TRI_PAR_SELECTION (t table [1…n]) : table ;
début
        pour  i ← 1  à  n-1  faire
        {  min ← i ;
           pour  j ←  i + 1  à  n  faire
                 si  t [ j ]  < t [ min ]  alors  min ← j ;
           temp ← t  [ i ]  ;
           t [ i ] ← t [ min ] ;
           t [ min ] ← temp ;
        }  retour  ( t ) ;
fin .
```

Complexité : espace O (1)
temps O (n^2) { O (n^2) comparaisons ; n-1 échanges

INSERTION



Point d 'insertion

- recherche séquentielle
- recherche dichotomique

TRI PAR INSERTION

```
fonction  TRI_ PAR_INSERTION  ( t  table [1...n]) : table ;
début
        pour  i ← 2  à  n  faire
        {   k ← i - 1 ;  temp  ←  t [ i ] ;
            tant  que  temp < t [ k ]  faire
            {    t [ k + 1] ← t [ k ] ;   k ← k - 1 ; }
             t [ k + 1] ← temp ;
        }
        retour  ( t ) ;
fin  .
```

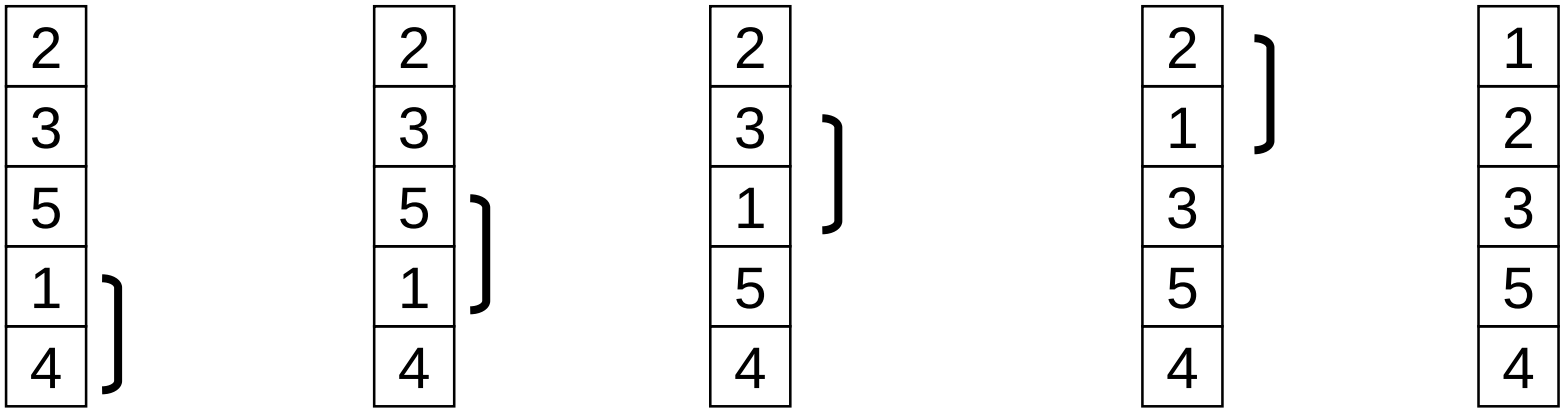
Complexité : espace O (1)
temps O (n^2)

- O (n^2) comparaisons
- O (n^2) affectations d'éléments

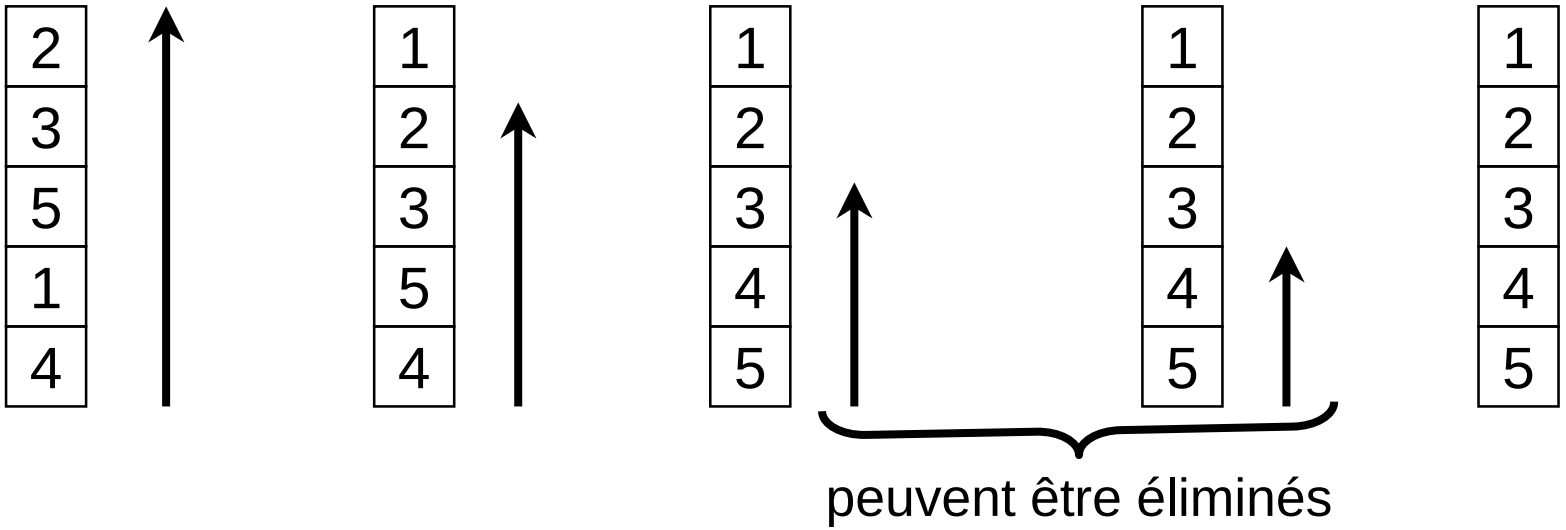
Insertion dichotomique : O (n log n) comparaisons

Tri des Bulles

Un balayage



Suite des balayages



TRI DES BULLES

```
fonction  TRI_des_BULLES ( t  table [1…n] ) : table ;
début
        i ← 1 ;
        tant que  i ≤ n - 1  faire
        {  dernier_échange ← n ;
           pour k ← n  à  i + 1  pas - 1  faire
              si  t [ k - 1] > t [ k ]  alors
              {    temp  ←  t [ k - 1 ] ;
                   t [ k - 1 ] ←  t [ k ] ;
                   t [ k ] ←  temp ;
                   dernier_échange  ←  k ;
              }
        i  ←  dernier_échange ;
        }
        retour  ( t ) ;
fin.
```

Complexité : espace O (1)

temps O (n^2) comparaisons et échanges

PARTAGE / FUSION

Si liste assez longue

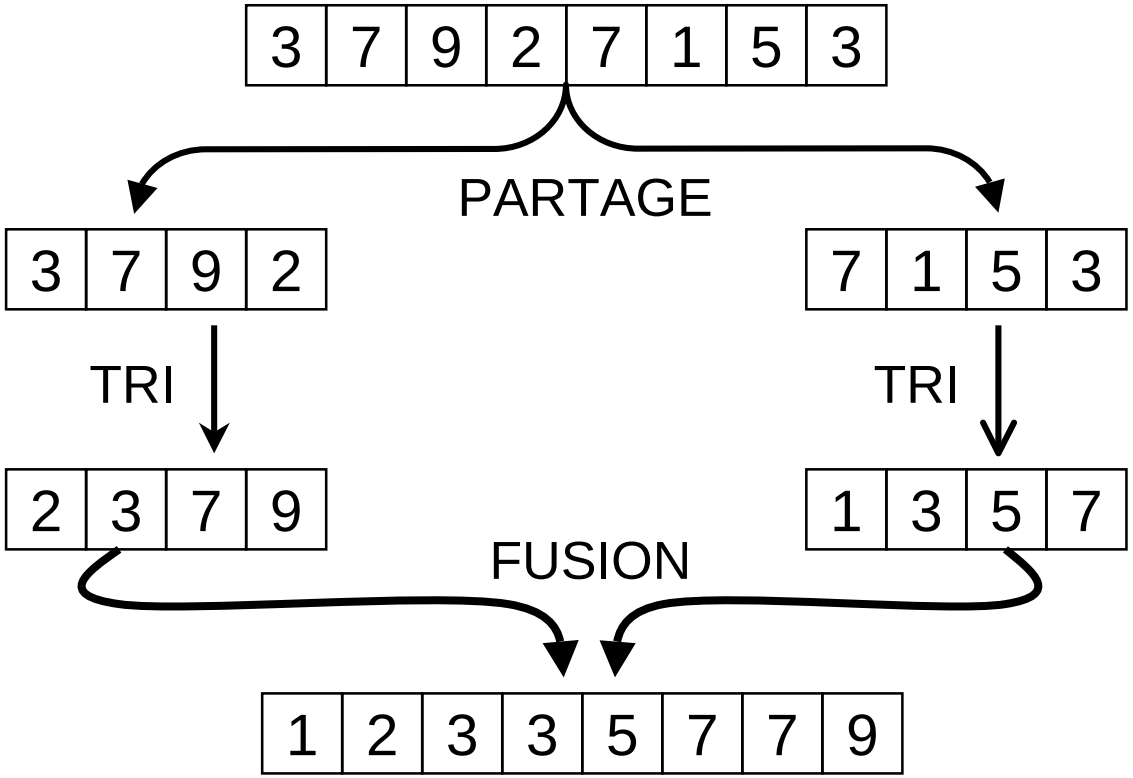


Schéma pour : TRI RAPIDE
TRI par FUSION

PREUVE

Schéma correct si

- correct sur listes courtes
- partage correct
- fusion correcte

et surtout si

- $(L_1, L_2) = \text{PARTAGE}(L)$
  $\Rightarrow |L_1| < |L|$ et $|L_2| < |L|$

COMPLEXITE

$T_{MAX} = O (n \log n)$ si $| L_1 | \sim | L_2 | \sim | L | / 2$ et
PARTAGE et FUSION linéaires

Soit $n = | L | = 2^k$ (après ajout éventuel d'éléments fictifs)

$T (n) = \gamma n + 2\, T (n/2)$ si $n > 1$

$T (1) = \beta$

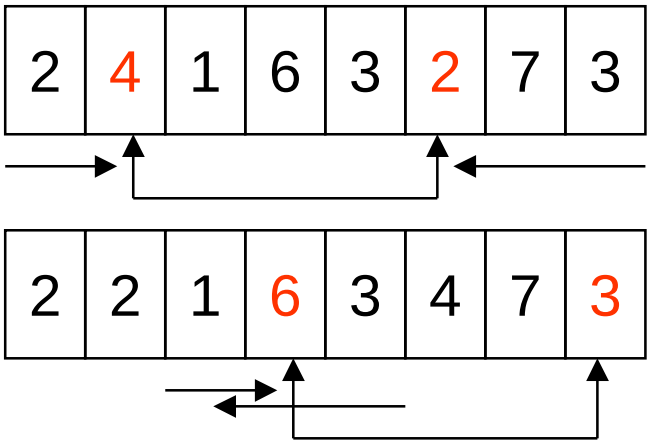
$$\frac{T(2^k)}{2^k} = \gamma + \frac{T(2^{k-1})}{2^{k-1}} = \gamma + \gamma + \frac{T(2^{k-2})}{2^{k-2}}$$

$$= \gamma k + \beta$$

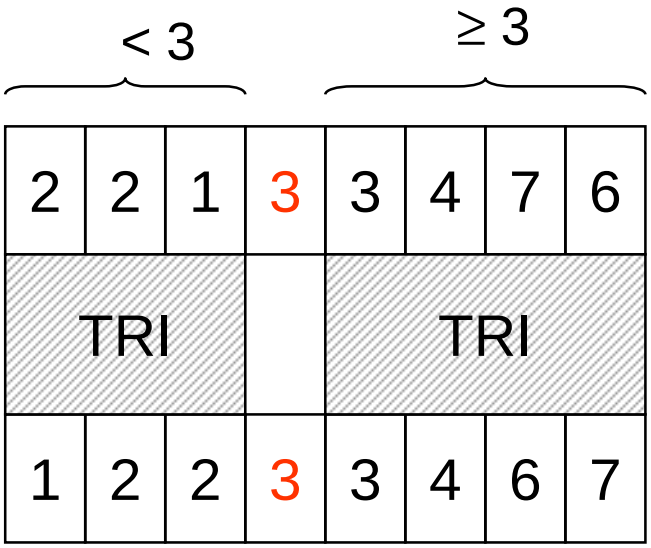
$$T (n) = \gamma n \log n + \beta n = O (n \log n)$$

TRI RAPIDE

Partage avec *pivot* = 3



Suite du tri

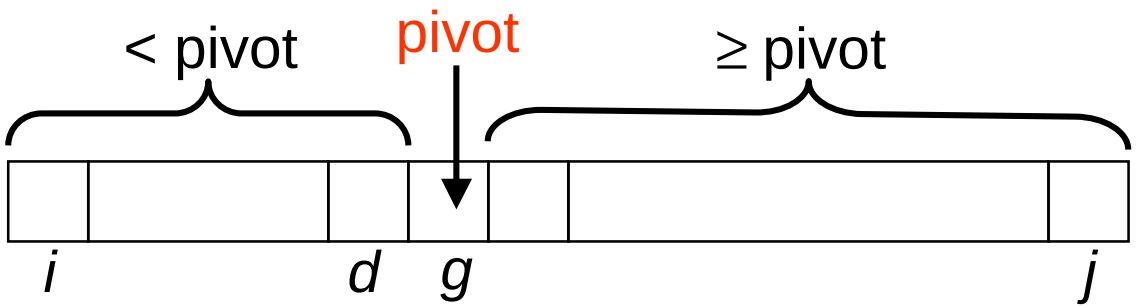


```
fonction  TRI_RAPIDE ( t  table [1…n] ) : table ;
début
        appliquer TR (1, n )  à  t ;
        retour  ( t ) ;
fin .

procédure  TR (i, j) ;
/*  classe la partie t [ i...j ] de t  */
début
        si i < j  alors
        {   p ←  choix (i, j) ;
            k ←  PARTAGE (i, j, p) ;
            TR (i, k - 1) ; TR (k + 1, j) ;
        }
fin  .
```

choix(*i, j*) : choix aléatoire d'un entier entre *i* et *j*.

```
fonction  PARTAGE ( i, j, p ) ;
/*   partage t suivant le pivot t [ p ]    */
début
        g ← i ; d ← j ; échanger (t [ p ], t [ j ] ) ; pivot = t [ j ] ;
        répéter
           tant que t [ g ] < pivot faire g ← g + 1 ;
           tant que d ≥ g et t [ d ] ≥ pivot faire d ← d - 1 ;
           si g < d alors
           {    échanger (t [ g ] , t [ d ] ) ;
                g ← g + 1 ; d ← d - 1 ;
           }
        jusqu 'à ce que g > d ;
        échanger ( t [ g ], t [ j ] ) ;
        retour ( g ) ;
fin.
```



Complexité du Tri rapide

Temps (PARTAGE (i, j, p)) = Θ (j - i + 1) ($i < j$)

T_{MAX}(TR (1, n)) = O (n^2)

Exemple : table déjà classée et choix successifs de p : 1, 2, …, n - 1

T_{MOY}(TR (1, n)) = O (n log n)

(t [1], …, t [n]) = (1, 2, …, n)

toutes les permutations de t [1], …, t [n] équiprobables.

Preuve [T (n) = T_{MOY}(TR (1, n))]

probabilité 1/n de d 'avoir k parmi {1, 2, …, n}

$T(0) = T(1) = \beta$

$$T(n) \le \gamma n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[T(k-1)+T(n-k)] \quad n \ge 2$$

Partage Appels récursifs

$\Rightarrow$ $T(n) \le (2\beta + 2\gamma)\, n \log_e n$ $n \ge 2$

par récurrence sur n .

$$\mathrm{T}(n) \le \gamma\, n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{T}(k-1) + \mathrm{T}(n-k)\right] \qquad n \ge 2$$

$$\le \gamma\, n + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{T}(k-1) \le \gamma\, n + \frac{4\beta}{n} + \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}\mathrm{T}(i)$$

$$\le \gamma\, n + \frac{4\beta}{n} + \frac{2(2\beta+2\gamma)}{n}\sum_{i=2}^{n-1} i\log i \qquad \text{par Hyp. Rec.}$$

Comme $\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} i\log i \le \int_2^n x\log x\,\mathrm{d}x \le \frac{n^2}{2}\left(\log n - \frac{1}{2}\right)$

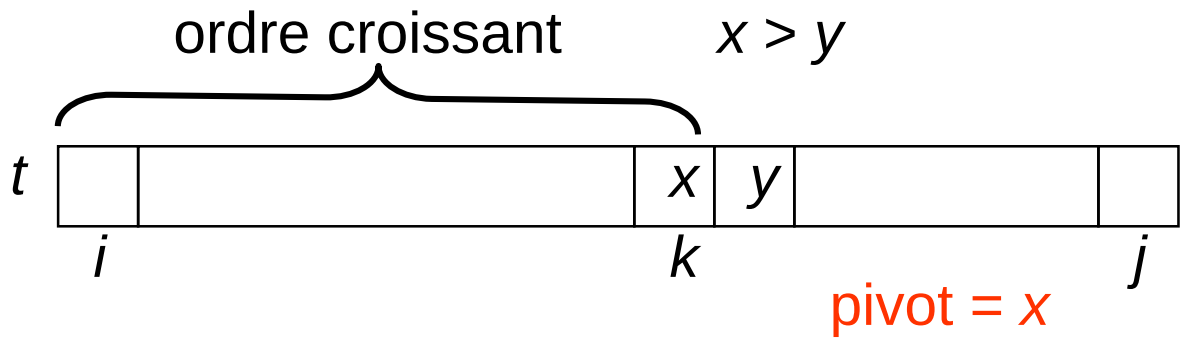
On obtient

$$\mathrm{T}(n) \le \gamma\, n + \frac{4\beta}{n} + (2\beta+2\gamma)n\log n - (2\beta+2\gamma)\frac{n}{2}$$

$$\le (2\beta+2\gamma)n\log n \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Autre choix du pivot

Plus de garantie sur le temps d ’exécution moyen




```
fonction choix (i, j) : indice ;
début
    pour k ← i  à  j - 1 faire
        si  t [k] > t [k + 1] alors
            retour  k ;
    retour  -1 ;  /* cas t [i] ≤ t [i+1] ≤ ... ≤ t [j] */
fin.
```

Version itérative

```
fonction TRI_RAPIDE_ITERATIF ( t  table [1…n] ) : table ;
début
    P ← empiler(Pile_vide, (1,n)) ;
    tant que  non vide(P)  faire
       (i, j) ←  sommet(P) ;  dépiler(P) ;
       si  i < j  alors
           p ←  choix (i, j) ;
           k ←  PARTAGE (i, j, p) ;
           P ← empiler(P, (k +1, j)) ;
           P ← empiler(P, (i,  k -1)) ;
    retour  t ;
fin.
```

NOTE : ordre des empilements sans importance.

Hauteur de la pile : O(*n*)

Optimisation mémoire

Suppression de la récursivité terminale avec optimisation

```
procédure TR_optimisé (i, j) ;
début
        tant  que i < j  faire
        {   p ← choix (i, j) ;
            k ← PARTAGE (i, j, p) ;
            si  k - i < j - k  alors
            {   TR_optimisé (i, k - 1) ;  i ← k + 1 ; }
            sinon
            {   TR_optimisé (k + 1, j) ;   j ← k - 1 ; }
        }
fin.
```

Hauteur de la pile de récursion : O (log *n*)