



Optimisation Topologique de Formes Évolutionnaires

Marc Schoenauer*

Équipe TAO – INRIA Futurs – France

<http://www.lri.fr/~marc/>

17 mars 2004

* Au CMAP, École Polytechnique (UMR CNRS 7641) avant sept. 2001



Plan

Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- **Contexte** Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
 - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
 - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Un premier exemple sans ordinateur

Deuxième partie : optimisation topologique de formes



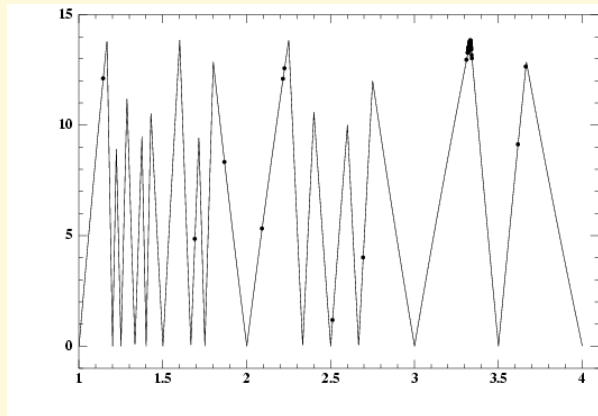
\mathcal{F} très chahutée

L. Taïeb, CMAP & Thomson

Espace de recherche : Interféromètres

Positionner des antennes

But : Maximiser la tolérance en conservant la précision.



Cas de 3 antennes, \mathcal{F} = Marge d'erreur (position 2ème antenne)

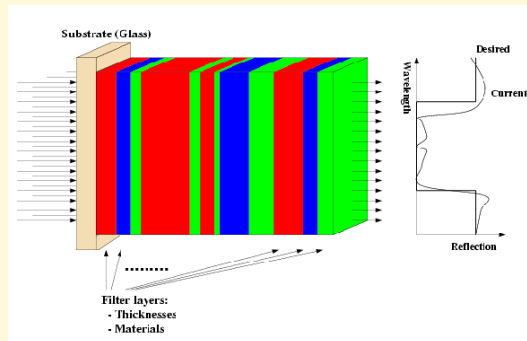


Ω mixte : discrets \times réels
 Schutz & Bäck, ICD, Dortmund.
 Martin, Rivory & Schoenauer,
 Optique des Solides Paris VI & CMAP.

Espace de recherche : Filtres optiques

(matériau, épaisseur)₁ ... (matériau, épaisseur)_N

But : Répondre au gabarit fixé.





Ω = Circuits analogiques

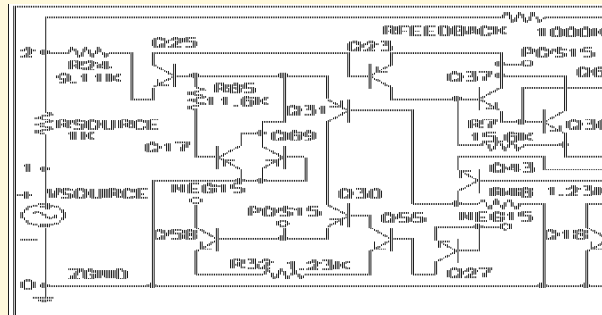
Koza et al., Stanford.

Espace de recherche : Circuits analogiques

Réseau de transistors, diodes, résistances

But : Fonctionnalités fixées

e.g. extraction de racine cubique





\mathcal{F} non calculable
Herdy & al., Berlin, PPSN96

Espace de recherche : Mélanges de café

But : Retrouver un arôme

\mathcal{F} = note de l'expert





Algorithmes d'optimisation

- Algorithmes de gradient
- Hill-Climbing
- Méthodes énumératives
- Méthodes stochastiques (méta-heuristiques)

Critères de comparaison

- Type d'espace de recherche
- Régularité de la fonction objectif (contraintes)
- Recherche locale – recherche globale



Plan

Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- **L'algorithme** le paradigme biologique
- Les deux points de vue
 - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
 - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Un premier exemple sans ordinateur

Deuxième partie : optimisation topologique de formes



Paradigme Darwinien

- Sélection naturelle avantage aux espèces adaptées à leur environnement
- Variabilité parents → enfants par petites déviations apparemment non dirigées.
- “Objectif” capacité de survivre et de se reproduire
- Adaptation résultante apparition d’espèces (e.g. bactéries résistantes).

Mais

- Source d’inspiration
- Aide à l’explication
- **Pas justification**



Algorithmes Évolutionnaires : La Métaphore

Modèle : L'évolution darwinienne des populations biologiques.

Les individus les plus adaptés survivent et se reproduisent

Vocabulaire :

Individu	Élément X de Ω
Performance	Valeur de $\mathcal{F}(X)$
Population	Ensemble de P éléments de Ω
Génération	Passage de la population Π_i à Π_{i+1}

Processus :

- 1) Sous la pression du milieu,
- 2) Les individus se croisent, mutent et se reproduisent.
- 3) Au bout d'un nombre certain de générations, les individus les plus performants apparaissent dans la population.

≡ les **optima** de \mathcal{F} ...



Parallèle biologie/algorithmique

Différences

Environnement changeant mécanismes spécifiques ?	Généralement fixe
Performance inconnue finalité des plumes du paon ?	C'est le point de départ
?	Tentation eugénique
?	Lamarckisme possible



Parallèle biologie/algorithmique

Points communs

Diversité génétique essentielle

Maladies fatales
Multi-racial utile

Convergence prématurée
Solutions multiples utiles

Lenteur du processus

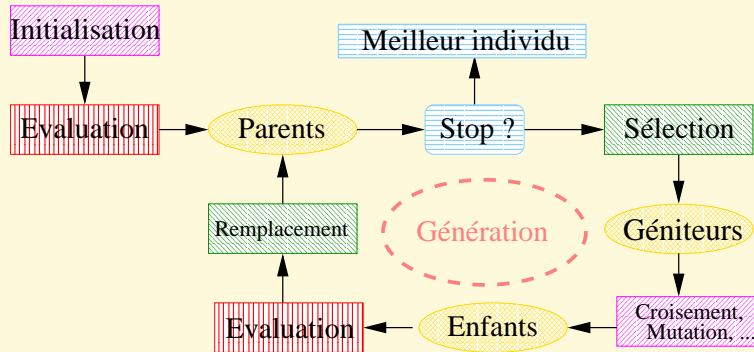
Néanderthal: -150 000 à -35 000
 \simeq 6000 générations
Cro-Magnon: -30 000 à nous
 \simeq 1200 générations





Vous verrez!

On est peut-être pas à l'optimum,
mais on a des solutions assez bonnes :-)



Algorithmes d'évolution : Le Squelette



-  Opérateurs stochastiques: Dépendent de la représentation
-  "Darwinisme" (stochastique ou déterministe)
-  Coût calcul
-  Critère d'arrêt, statistiques, ...



Plan

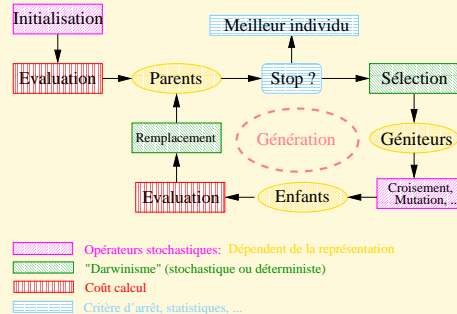
Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- **Les deux points de vue**
 - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
 - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- Un premier exemple sans ordinateur

Deuxième partie : optimisation topologique de formes



Deux points de vue orthogonaux



- Le **Darwinisme artificiel** (sélection et remplacement) ne dépend que de la **performance**
- L'**initialisation** et les **opérateurs de variation** (croisement, mutation, ...) ne dépendent que de la **représentation**, i.e. l'espace de recherche.



Le moteur d'évolution

Sélection et remplacement

Deux étapes de “sélection”

- La **sélection** peut sélectionner plusieurs fois le même parent
- le **remplacement** sélectionne 0 ou 1 fois chaque individu

Points communs

- Darwinisme: Biais en faveur des plus adaptés
- Biais trop important: Perte de diversité
- Biais trop petit : pas de convergence

Opérateurs d'exploitation



Le moteur d'évolution (2)

Sélection : Choisir ceux qui se reproduisent

- Déterministe, comparaisons de fitness ES historique
- Proportionnelle roulette, GAs historiques
- Stochastique, basée sur des comparaisons de fitness GAs historiques, EP historique

Remplacement : Choisir ceux qui survivent

- Choix parmi les enfants seulement, ou conflit de générations
- Peut également être déterministe ou stochastique



Exemples de sélection stochastique

Le tournoi

- **Tournoi (déterministe)**

$$ps \approx T$$

- Tournoi de taille $T \in \mathbb{N}$
- Choix uniforme de T individus
Rendre le meilleur

avec ou sans remplacement?

- **Tournoi stochastique (binaire)**

$$ps \approx 2t$$

- Taux $t \in [0.5, 1]$
- Choix uniforme de 2 individus
Rendre le meilleur avec probabilité t

- **Avantages**

- Robustesse par rapport aux erreurs sur \mathcal{F}
- Facile à paramétrer T ou t



Exemples de remplacement déterministe

Les Stratégies d'évolution

(μ, λ) -ES : prochains μ parents = meilleurs parmi les λ enfants

Pour: meilleurs résultats de convergence

Contre: on peut perdre les meilleurs

$(\mu + \lambda)$ -ES : prochains μ parents =
meilleurs parmi les μ parents + les λ enfants

Pour: robustesse pratique

Contre: on peut converger vers un opt. local

Paramètres : μ (taille population), λ



Plan

Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
 - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
 - **Opérateurs de variation** Croisement et mutation
- Un premier exemple sans ordinateur

Deuxième partie : optimisation topologique de formes



Représentations

Exemples usuels

- Représentation “binaire”

$$\Omega = \{0, 1\}^N$$

Algorithmes génétiques historiques

- Représentation “réelle”

$$\Omega = [0, 1]^N \text{ ou } \mathbb{R}^N \text{ ou } \dots$$

Algorithmes génétiques – codage réel, **Stratégies d'évolution**

- Représentation “combinatoire”

$$\Omega = \mathcal{S}_N$$

→ Genetic Local Search

- Représentation “par arbres”

Espace d'arbres – **Programmation génétique**

Plusieurs représentations pour le même problème

→ Dynamiques différentes



Opérateurs de variation (non-dirigée)

Le croisement: échange d'information entre parents

- Début d'évolution : exploration

“linéarité” de la fonction objectif ?

- Fin d'évolution : exploitation

... efficacité décroissante

La mutation: (ré)introduction de diversité

- Ergodicité

Mais petites variations plus probables

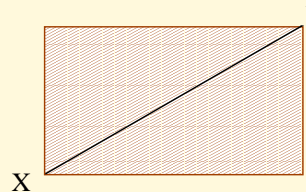
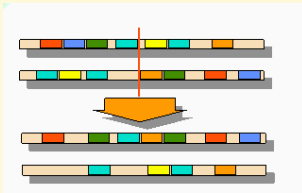
- “Strong causality”

Continuité faible locale



Opérateurs de variation : Le croisement

Exemples classiques



Échange de **gènes** Croisement de paramètres réels

Exemple orgiaque: Cinq parents

La foule subjuguée **boira** ses paroles enflammées
 Ce plat **exquis** enchantait leurs papilles expertes
 L'aube aux doigts de roses se leva sur un jour **nouveau**
Le cadavre sanguinolent encombra la police nationale
 Les coureurs assoiffés se jetèrent sur **le vin** pourtant mauvais
pour un enfant surréaliste



Croisement (2): les arbres

Représentation de “programmes”

Fonctions analytiques, expressions booléennes, LISP, ...

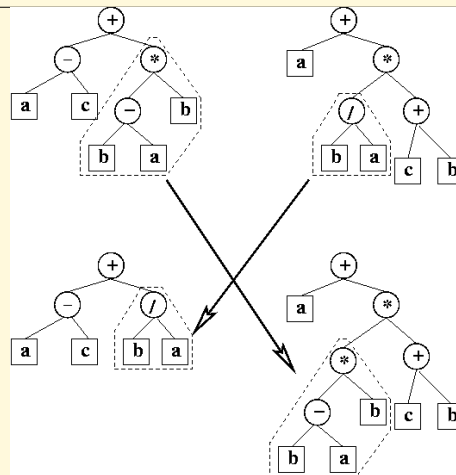
Arbres construits à partir de

\mathcal{N} ensemble de noeuds

\mathcal{T} ensemble de feuilles

Exemple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = \{+, \times\} \\ \mathcal{T} = \{X, \mathcal{R}\} \\ \longrightarrow \text{Polynomes}[X]. \end{array} \right.$$



Fermeture syntaxique



Opérateurs de variation : La mutation

Exemples classiques

- Mutation d'un gène



- Ajout de bruit Gaussien aux paramètres réels

Transparent suivant

Un exemple sans queue ni tête

La terre est comme un orange **bleue**

La terre est **bleue** comme une orange



Optimisation continue et mutations gaussiennes

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

Ajout de bruit Gaussien

$$X := X + \sigma \mathcal{N}(0, C)$$

$\sigma > 0$,

$C \in \mathcal{M}(n, n)$ symétrique définie positive

pas de la mutation
matrice de covariance

Adaptation de σ et C

- User-defined : $C = I_n$, σ fixe ou décroissant Peu performant
- Auto-adaptatif : par mutation
- CMA-ES : en fonction de l'histoire de l'évolution, par exemple
 - Si plusieurs pas de même direction, augmenter σ
 - Ajouter à C une matrice de rang 1 de vecteur propre la dernière direction de descente



Plan

Première partie : les algorithmes évolutionnaires

- Contexte Optimisation
- L'algorithme le paradigme biologique
- Les deux points de vue
 - Moteur d'évolution Darwinisme artificiel
 - Opérateurs de variation Croisement et mutation
- **Un premier exemple** sans ordinateur

Deuxième partie : optimisation topologique de formes



La feuille de papier qui tombe

P. Bentley

Le problème

- Trouver la forme d'un morceau de papier
- qui met le plus de temps possible à tomber

Difficultés

- Pas de simulation
- Pas d'a priori sur la forme de la solution

Quoique ...



Un algorithme sans ordinateur

Matériel nécessaire

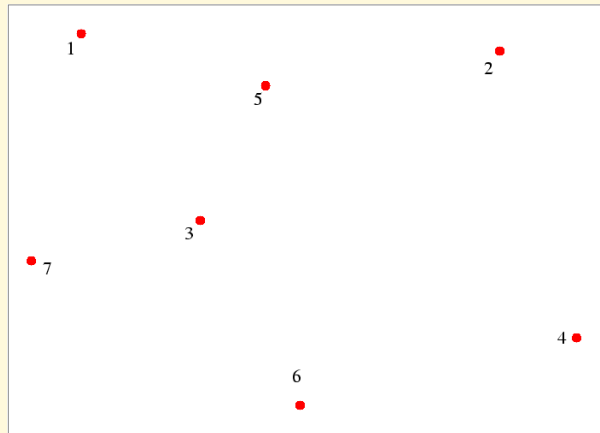
- Une ramette de feuilles A4
- Des ciseaux
- Un bac à sable format A4
- Une dizaine de petites cailloux numérotés
- Un chronomètre
- Une fléchette
- ... de la patience



Initialisation

- Lancer les petits cailloux en l'air au dessus du bac à sable
- Reporter les positions des cailloux tombés dans le bac sur une feuille A4

Génotype : Liste ordonnée des points





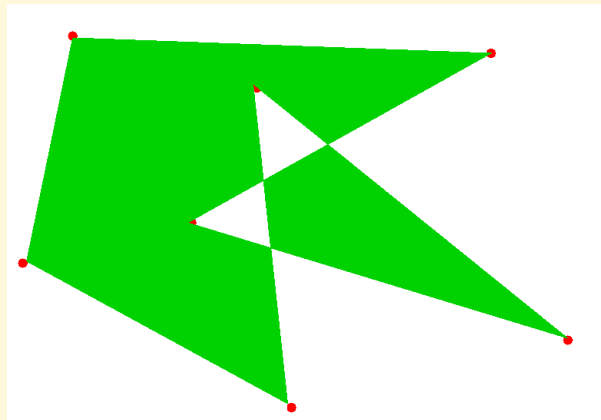
Morphogénèse

passage du génotype au phénotype

- Tracer le polygone rempli correspondant
- Découper la forme obtenue

à la MacPaint

Phénotype : La forme de papier





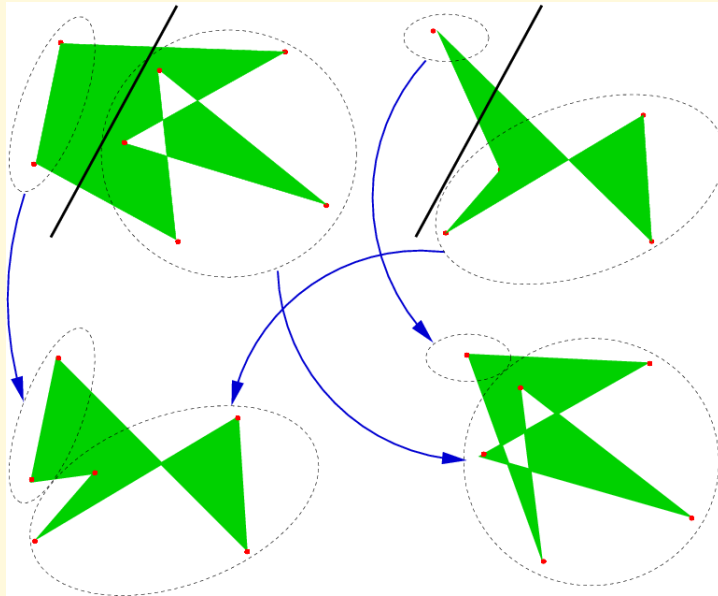
Évaluation

Pour chaque forme

- Faire 5 fois
- Lâcher la forme de 2m de haut
- Chronométrer le temps d'atteinte du sol
- Faire la moyenne des 5 temps



Croisement

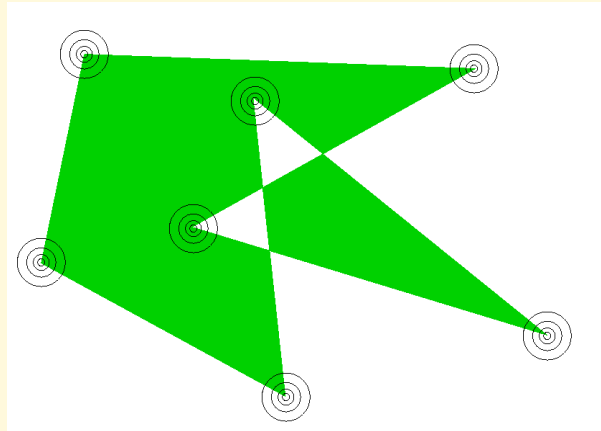


Un croisement possible, pour lequel les ciseaux et le scotch ne suffisent pas.



- Viser avec la fléchette chaque point tour à tour

Distance à ajuster selon votre habileté



- Tracer sur une nouvelle feuille les impacts

Si la fléchette sort du cadre, enlever le point

Si votre portable sonne, ajouter un point



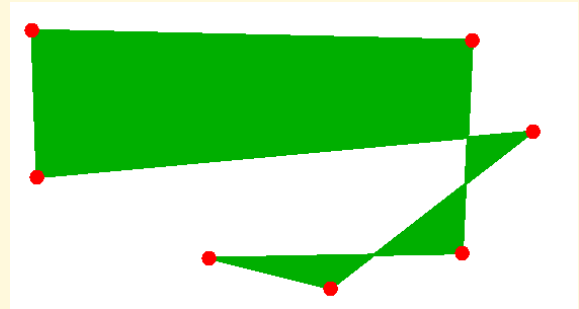
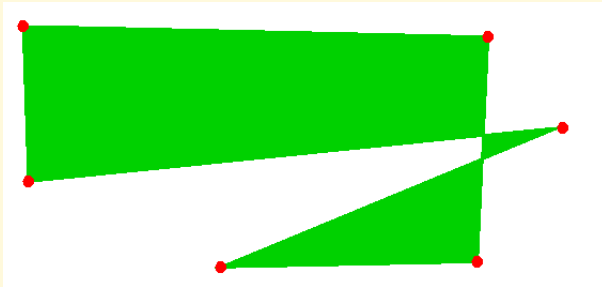
Darwinisme (remplacement déterministe)

Déchirer la moitié des formes – les plus rapides



Résultats

Avec 5 formes et 10 générations



Deux des meilleures formes obtenues

Meilleure forme aléatoire : 0.8s

Toutes les formes après 10 générations de 10 formes : $> 2s$

Comportement “hélicoptère”





Darwinisme artificiel : Points clé

- Indépendance objectif / moteur d'optimisation
 - Boîte noire ou connaissances du contexte ?
 - No Free Lunch Theorem
- Critère de succès : Conception vs Production
 - Au moins une fois une très bonne solution
 - En moyenne une solution assez bonne
- Une population, pas un individu
 - Attention à la perte de diversité génétique
- Exploration de l'espace / Optimisation locale
 - Le dilemme EVE



Pragmatisme de rigueur

Quelques résultats théoriques

- Algorithmes génétiques de base (chaînes de bits)

Convergence globale (G.Rudolph, R.Cerf)

Déceptivité et régularité fractale (E.L.)

- Stratégies d'évolution (vecteurs de paramètres réels)

Estimations d'erreur (G.Rudolph, H.-G. Beyer, A. Auger)

Des leçons venues d'applications réussies

- Prise en compte du problème
- Trop(?) grande flexibilité