Table des matières

Introduction

Ce travail a pour principal objectif la résolution d'un problème d'optimisation souvent présent au niveau industriel dans le domaine des contre-mesures: Le positionnement d'antennes pour constituer un interféromètre. Les algorithmes utilisés dans ce sens sont "peu classiques" car ils suivent une série d'étapes stochastiques.
Ce sont les algorithmes génétiques.
L'évolution vers l'optimum n'est pas guidé par un processus purement déterministe mais par l'application d'opérateurs où l'aléatoire joue un rôle important.

Le premier chapitre présente les grandes lignes de ces algorithmes avec l'accent mis sur les différents opérateurs utilisés et les paramètres à régler pour une bonne mise en œuvre. Les avantages et les inconvénients de cette méthode seront discutés ainsi que les multiples possibilités qu'offre cette approche.
Le chapitre deux traite du principal problème sur lequel les algorithmes génétiques vont être appliqués. Il s'agit d'optimiser la localisation d'antennes ainsi que leur nombre pour maximiser la performance d'un interféromètre lors d'une utilisation dans un environnement électromagnétique sévère. Après avoir présenté les équations à résoudre et ramené le problème sous forme d'un problème d'optimisation, les différents paramètres intervenant seront discutés afin de mettre à jour leur signification physique.
Le chapitre trois présente un certain nombre de résultats numériques dans différentes configurations possibles du problème. L'application des algorithmes génétiques pour obtenir ces solutions mènera à une série de discussions sur le choix de la méthode.
Le chapitre quatre marque un retour vers le plus simple des interféromètres, celui constitué de seulement trois antennes alignées. Il est alors montré qu'il est possible de déterminer les différents optima globaux de la fonctionnelle à partir de la résolution d'expressions très simples. Avant de conclure, le chapitre cinq présentera une généralisation des différents problèmes abordés dans le cas d'un interféromètre plan pouvant plus aisément s'adapter aux supports présents dans la réalité.

Chapitre 1

Les algorithmes génétiques

Ce chapitre est entièrement consacré à la description des algorithmes génétiques qui seront appliqués dans toute la suite de la thèse. Après avoir introduit les différents opérateurs intervenant dans le processus de convergence vers l'optimum, les principaux paramètres entrant en compte pour une mise en œuvre efficace seront présentés. La possibilité qu'offre des algorithmes pour l'obtention de plusieurs maxima globaux ou locaux sera par la suite longuement traitée car elle constitue l'une des caractéristiques essentielles de cette approche avec en particulier la mise au point d'une méthode originale l'algorithme "Énergie". Enfin un retour vers les fondements empiriques de ces algorithmes clôturera ce premier chapitre.

1 Introduction

Les algorithmes génétiques (AG) ont été mis au point par John Holland [25] à l'université du Michigan et développés par David Goldberg [15]. Ils peuvent être considérés comme des algorithmes d'exploration ayant pour règles de base les lois de Darwin sur la survie et la reproduction des espèces. En d'autres termes, ils utilisent le principe selon lequel les structures les mieux adaptées à leur environnement survivent et les autres disparaissent. L'évolution se fait à travers une succession de générations durant lesquelles reproductions, éliminations, créations et recombinaisons vont intervenir pour laisser finalement place à la (ou les) meilleure(s) structure(s) pour l'environnement considéré. Bien qu'utilisant le hasard, les algorithmes génétiques ne sont pas purement aléatoires. En effet ils tiennent compte des informations obtenues dans une génération pour construire la suivante

L'essor de ces algorithmes non déterministes est lié à la dépendance excessive des méthodes classiques aux conditions initiales. D'abord parce que ces dernières ne s'appliquent que localement. Les extrêma qu'elles atteignent sont optimaux dans un voisinage du point de départ. Une fois un sommet atteint la seule possibilité d'amélioration est une réinitialisation aléatoire. L'autre grand désavantage des méthodes dites classiques ou déterministes est qu'elles sont basées sur l'existence des dérivées, ce qui dans de nombreux problèmes n'est pas le cas. En effet dans la pratique un grand nombre de fonctions ne sont pas dérivables et souvent même pas continues. Il est bien entendu toujours possible d'utiliser des méthodes dites "énumératives" qui permettent dans un espace de recherche fini ou dans un espace de recherche infini mais discrétisé de parcourir tous les points un par un. Mais ces méthodes sont peu efficaces car bien souvent les espaces de recherche sont beaucoup trop grands pour que l'on puisse explorer toutes les configurations possibles.

Les algorithmes génétiques peuvent donc être considérés comme des algorithmes pseudo-aléatoires d'exploration, c'est à dire qu'ils utilisent un des tirages aléatoires mais sont aussi guidés par des informations obtenues durant la phase de recherche. Ils se distinguent des méthodes dites "classiques" par quatre aspects principaux:

- *Les AG travaillent sur une population de points, au lieu d'un point unique.*

- *Les AG n'utilisent que les valeurs de la fonction à optimiser sans prendre en compte les dérivées ou toutes autres informations.*

- *Les AG utilisent des règles de transition probabilistes, et non déterministes.*

- *Les AG sont capables de trouver les meilleurs solutions et pas seulement l'optimum.*

Cette approche stochastique a pour principale conséquence d'éviter la convergence vers un optimun local, qui est souvent le piège principal dans les problèmes d'optimisation. L'utilisation d'une population de points de l'espace de recherche ainsi que le contrôle qui peut être fait à travers la "mise à l'échelle" que nous verrons plus loin est leur principale force qui fait qu'aujourd'hui ils permettent de dépasser dans de nombreuses applications les limites des méthodes traditionnelles.

2 Les différentes étapes d'un algorithme génétique

L'objectif est de résoudre le problème d'optimisation suivant:

Maximiser une fonction F appelée fonction performance (fitness) définie sur un espace métrique E à valeurs réelles positives.

Remarque:
Le problème de minimisation se ramène facilement à celui de la maximisation de $\frac{1}{F}$ ou de M-F avec toutefois la prise en considération de la valeur M qui peut modifier sensiblement les résultats obtenus (Cf Mise à l'échelle).

Les éléments de E sont appelés *individus* et un P-uplet d'individus une *population.* Cette population à la date t constitue une génération. Dans toute la suite G_t représentera la génération à la date t.

La première étape est une initialisation aléatoire qui donne naissance à la première génération. Par la suite les mécanismes d'un algorithme génétique sont très simples car ils ne sont basés que sur la copie des points performants de l'espace pour l'environnement considéré (la valeur de la fonctionnelle F en ces points pour un problème d'optimisation), la recombinaison de ces points et dans une moindre mesure la mutation par l'ajout d'une perturbation. En fait les trois principales étapes sont l'application de trois opérateurs:

- Sélection.

- Croisements.

- Mutation.

Il est à noter que différents types de codage peuvent être appliqués pour représenter l'espace de recherche. La modification du codage entraîne une modification des opérateurs. Les deux principaux sont le codage binaire ($E = \{0,1\}^N$), cadre original des AG, le codage réel ($E = \mathbb{R}^N$).
Concernant les différentes choix du codage, Holland [25] et Goldberg [15] recommandent d'utiliser un codage dans $\{0,1\}^N$ alors que d'autres comme Schwefel [49], Radcliffe [39], Fogel[10] et Michalewicz[28] considèrent qu'il est préférable de travailler avec le codage réel.

• **Codage binaire**:

$$x \in [a, b[\rightarrow \; i_x = \frac{x-a}{b-a} \times 2^N$$

i_x représente les entiers de l'intervalle $[0, 2^N - 1]$ lui même codé par N bits suivant différents modes (Standard, Gray).

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow (i_{x_1}, i_{x_2}, \ldots, i_{x_n}) \in \{0,1\}^{n \times N}$$

Distance utilisée généralement: distance de Hamming.

• **Codage réel**:

On travaille sur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ directement.
Distance utilisée généralement: distance Euclidienne.

Sélection

L'étape de sélection est la clé de cet algorithme car c'est elle qui lui permet de progresser dans la "bonne direction" c'est à dire celle permettant d'espérer l'accumulation de la population à l'optimum. Elle est d'ailleurs utilisée sous une autre forme dans l'algorithme du recuit simulé (sélection de Boltzman).
Chaque x_i élément de de la population courante donne naissance à un nombre fils(x_i) de clones (copies de lui-même), avec une espérance notée Esp:

$$Esp(fils(x_i)) = \frac{F(x_i)}{\overline{F}} \;\; , \;\; \overline{F} = \frac{\sum_{i=1}^{P} F(x_i)}{P}$$

P étant la taille de la population et $F(x_i)$ l'image de x_i à travers la fonction F.

Il est à noter que ce mode de sélection favorise la reproduction des individus qui ont une bonne performance et pénalise les autres. C'est dans ce sens que peut être fait le parallèle avec le Darwinisme qui confère aux individus les plus forts une plus grande capacité à survivre et se reproduire.
Dans la pratique cette sélection est appliquée à travers une procédure qui porte le nom de "tirage de la roulette", introduite par D. Goldberg [15].
Soit $F_s = \sum_{i=1}^{P} F(x_i)$ la somme des fitness des P éléments de la population à la génération G_t. On tire aléatoirement un nombre α, $\alpha \in [0, F_s]$ uniformément
Si x_s, $s \in [1, P]$, est l'élément de la population courante tel que $F(x_{s-1}) < \alpha \leq F(x_s)$, alors x_s est sélectionné. Ce processus est répété P fois sans modification de la roulette.

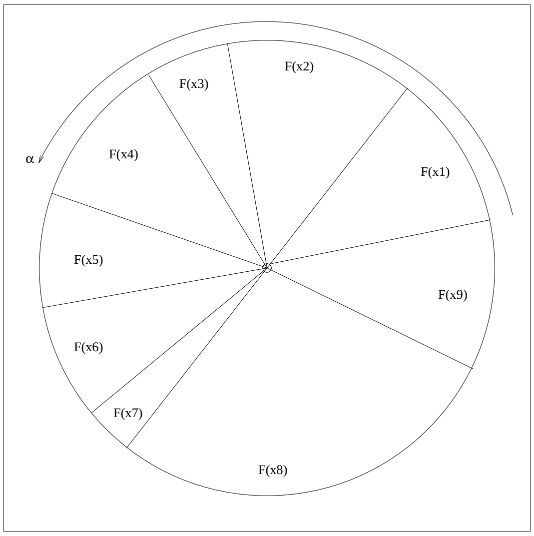


Figure 1.1 *Sélection de l'élément* x_4

Ce mode de sélection proportionnel à la valeur des $F(x_i)$ pose toutefois un problème lié à la vitesse de convergence de l'algorithme. En effet si les valeurs des $F(x_i)$ sont trop proches les unes des autres la sélection sera quasi uniforme et il s'ensuivra une diversité trop importante dans la population qui rendra la convergence très lente. A l'inverse si une valeur l'emporte largement sur les autres, l'élément correspondant risque d'envahir la population, entraînant une accumulation sur un optimum local et finalement une convergence prématurée.
Pour résoudre ce problème il est important de pouvoir redistribuer les valeurs $F(x_i)$ de sorte que les écarts soient suffisamment important pour qu'une distinction entre les "bons" et les "mauvais" soit possible sans toutefois laisser envahir la population par un petit nombre d'individus qui serait bien meilleurs que les autres. Dans ce but il est indispensable d'utiliser une "*mise à l'échelle*".

La mise à l'échelle

Maximiser F ou $F_{\alpha,\beta} = \alpha F + \beta, \;\; (\alpha \geq 0)$ est théoriquement équivalent. Par contre les résultats obtenus lors de la sélection par tirage de roulette peuvent être très différents suivant les valeurs de $\alpha,\ \beta$.

Définition:
On appelle *pression sélective* P_t le rapport $F_{max}/\overline{F}$ qui est le nombre moyen de copies du meilleur à la génération G_t.

Les valeurs α et β sont calculées à chaque génération à partir de la vérification des deux égalités suivantes:

$$P_t = \tau, \quad et \;\; \overline{F_{\alpha,\beta}} = \overline{F}$$

F_{max} étant la valeur maximale des $F(x_i)$ et $\overline{F}$ la valeur moyenne à chaque génération.

Si la valeur fixée τ de la pression sélective est trop faible il n'y aura presque pas de sélection, si elle est trop forte la convergence sera prématurée. Ces cas extrêmes sont illustrés Figure 1.2, la distribution des valeurs en haut de la Figure représente la distribution initiale ($\alpha = 1, \; \beta = 0$) c'est à dire avant l'étape de mise à l'échelle.

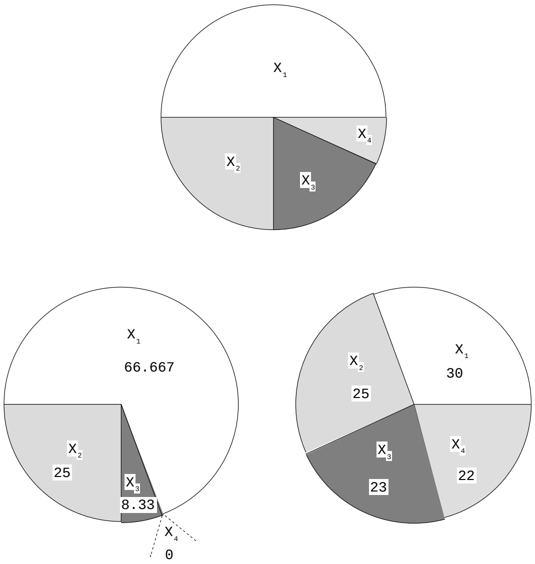


Figure 1.2 *Effets de la mise à l'échelle*

Sur la Figure 1.2 on peut donc voir trois différentes distributions de valeurs dont deux après à une mise à l'échelle:

1 Fonction F originale.
2 Fonction F avec une première une mise à l'échelle $F \rightarrow 0.2F + 20$.
3 Fonction F avec une seconde mise à l'échelle $F \rightarrow \frac{5}{3}(F - 10)$.

L'expression des coefficients α et β est donc:

$$\alpha(\tau) = (\tau - 1)\frac{\overline{F}}{F_{max} - \overline{F}} \quad , \quad \beta(\tau) = \frac{F_{max} - \tau\overline{F}}{F_{max} - \overline{F}}$$

Les valeurs sur lesquelles sont appliquées l'étape de sélection (tirage de la roulette), ne sont plus celles de F mais celle de la fonction:

$$F_{\alpha,\beta} = (\tau - 1)\frac{\overline{F}}{F_{max} - \overline{F}}F + \frac{F_{max} - \tau\overline{F}}{F_{max} - \overline{F}}, \quad si\ F_{\alpha,\beta} \geq 0$$

$$F_{\alpha,\beta} = 0, \quad si\ F_{\alpha,\beta} < 0$$

La valeur $\tau = 2$ est couramment admise comme une bonne valeur de pression sélective. Cependant ce paramètre dépend fortement de la fonction à optimiser ainsi que de la taille de la population. Nous verrons plus en détails dans le chapitre 3 le réglage de ce paramètre dans le cas concret du problème d'optimisation en interférométrie.

Croisements

Après l'étape de sélection et la copie des éléments considérés comme plus prometteurs dans cette marche vers l'optimum, un opérateur entre en jeu:

l'opérateur de croisement

L'importance du rôle qu'il joue dans le processus de convergence est considéré différemment. Opérateur très performant pour Holland[25] et Goldberg[15], il est jugé peut efficace par le groupe Evolutionary Programming de Fogel [10].
Enfin pour Schwefel [49] et Rechenberg[43] de L'Evolution Strategy sa participation est parfois jugée conséquente parfois insignifiante. L'idée de base est qu'en recombinant deux éléments sélectionnés il existe une probabilité non négligeable d'en obtenir un meilleur. Ils apportent donc de la mixité durant l'exploration, mixité qui a des chances d'être constructive puisqu'elle se fait à partir de deux entités considérés comme "bonnes". Cet opérateur doit être défini pour chaque type de problème puisqu'il est basé sur des notions subjectives d'amélioration. Dans un espace de recherche donné il est important de se demander quels échanges d'informations peuvent être profitables et ceux qui peuvent être dommageables. Enfin, ils peuvent s'appliquer sur l'espace de recherche codé ou sur l'espace de recherche lui-même.

Espace codé en binaire: les croisements par échanges de bits.

Historiquement, plutôt que de travailler sur l'espace de recherche lui-même les AG sont appliqués sur des chaînes de bits. Les individus ainsi codés portent le nom de chromosomes. Si x_1 et x_2 sont deux élément de $E = \{0,1\}^N$, le croisement s'effectue comme suit:

$$\left.\begin{array}{l}(b_1, b_2, \ldots, b_N)\\(c_1, c_2, \ldots, c_N)\end{array}\right\} \xrightarrow{p_c} \left\{\begin{array}{l}(b_1, b_2, \ldots, b_l, c_{l+1}, \ldots, c_N)\\(c_1, c_2, \ldots, c_l, b_{l+1}, \ldots, b_N)\end{array}\right.$$

Les couples sont tirés aléatoirement (et uniformément) dans la population des sélectionnés sans remise. La position l est choisie aléatoirement (et uniformément) dans [1,N].

Ce type de croisements pose toutefois un problème. En effet la recombinaison entre deux éléments x_1 et x_2 à certaines chances de donner naissance à un individu meilleur si les fils obtenus ont des valeurs comprises entre x_1 et x_2. Or ce type recombinaison ne respecte pas cette contrainte, ce qui peut rendre ces croisements peut consistant. Pour palier à cet inconvénient il peut être plus intéressant de travailler sur l'espace de recherche lui-même, sans forcément le projeter sur $\{0,1\}^N$.

Codage réel

Dans le cadre de l'optimisation paramétrique ($E = \mathbb{R}^N$), deux types de croisements ont été introduis par Michalewicz[28] et Radcliffe[40].

- Adaptation du *croisement binaire* :

$$\left.\begin{array}{l}(r_1, r_2, \ldots, r_N)\\(s_1, s_2, \ldots, s_N)\end{array}\right\} \xrightarrow{p_c} \left\{\begin{array}{l}(r_1, r_2, \ldots, r_l, s_{l+1}, \ldots, s_N)\\(s_1, s_2, \ldots, s_l, r_{l+1}, \ldots, r_N)\end{array}\right.$$

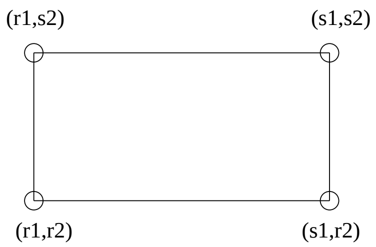


Figure 1.1 : *Conséquence du croisement par échanges (N=2)*

Les enfants possibles de r et s sont les sommets de l'hypercube.

- Rajout d'un *croisement barycentrique* :

  On tire α uniformément dans $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l}(r_1, r_2, \ldots, r_N)\\(s_1, s_2, \ldots, s_N)\end{array}\right\} \xrightarrow{p'_c} \left\{\begin{array}{l}(\alpha r_1 + (1-\alpha)s_1, \ldots, \alpha r_N + (1-\alpha)s_N)\\((1-\alpha)r_1 + \alpha s_1, \ldots, (1-\alpha)r_N + \alpha s_N)\end{array}\right.$$

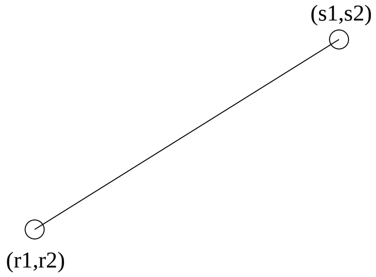


Figure 1.2 : *Conséquence du croisement barycentrique*

  Les enfants possibles de r et s sont sur le segment [r,s].

- mélange des deux croisements précédents :

  On tire α_i uniformément dans $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l}(r_1, r_2, \ldots, r_N)\\(s_1, s_2, \ldots, s_N)\end{array}\right\} \xrightarrow{p'_c} \left\{\begin{array}{l}\alpha_i r_i + (1-\alpha_i)s_i\\(1-\alpha_i)r_i + \alpha_i s_i\end{array}\right.$$

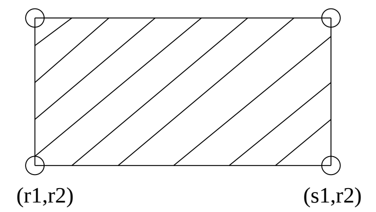


Figure 1.3 : *Conséquence du croisement mixte*

Les enfants possibles de r et s sont dans l'hypercube de diagonale [r,s].

Mutation

Les opérateurs précédents (Sélection+Croisements) permettent donc à la phase dite d'exploitation de concentrer les éléments de la population courante dans les zones de forte performance. Cependant rien n'assure que ces lieux de concentrations soient ceux correspondant à l'optimum de la fonction considérée. En d'autre termes, elles peuvent se faire sur des optima locaux. Il est donc indispensable, à chaque étape de l'algorithme (à chaque génération) *d'exploiter* des zones jusqu'alors négligées si l'on veut s'assurer que la convergence ne se fasse pas sur un optimum local. Pour cela l'on applique sur certains éléments **l'opérateur de mutation**. Il consiste en fait à perturber l'élément sur lequel il est appliqué. Dans le cas où les points sont codés en chaîne de bits l'opérateur de mutation s'exprime par:

Si $x \in E$ est noté $(b_1, b_2, \ldots, b_N), b_i \in \{0, 1\}$.

Pour chaque x sélectionné et pour chaque position l,

$$(b_1, b_2, \ldots, b_N) \xrightarrow{p_m} (b_1, b_2, \ldots, \overline{b_l}, b_{l+1}, \ldots, b_N)$$

Dans le cas de l'espace codé en réel l'opérateur de mutation développé par Schwefel[49] et Rechemberg [43] est une gaussienne centrée sur le point devant muté, avec un écart type prédéfini suivant le problème à résoudre.

$$x \xrightarrow{p_m} x + N(0, \sigma)$$

Des travaux plus récents de H.P. Schwefel proposent une auto-adaptation du σ avec une probabilité de mutation égale à 1. Cette auto-adaptation permet en fait de limiter le réglage de ce paramètre qui se fait alors automatiquement suivant le la manière dont se fait la phase d'exploration.

3 Obtention de plusieurs maxima

Les algorithmes génétiques ont également la faculté de permettre l'obtention de plusieurs optima pas forcément absolus. Pour cela il existe différentes techniques parmi lesquelles: le crowding (De jong[29] et Mahfoud[34]), Le partage (Sharing) introduit par D. Goldberg et Richardson[18], et le Sequential Niching (Beasley[4]). Ces méthodes sont basées sur l'existence d'une distance sur E et peuvent être brièvement décrites comme suit:

3.1 Le crowding

Principe:

La fitness de l'enfant n'est comparée qu'au parent le plus proche.
Il prend alors sa place si elle est d'une valeur supérieur.

1. Sélection aléatoire de deux parents p_1 et p_2.

2. Après croisement, obtention de c_1 et c_2.

3. Après mutation, obtention c'_1 et c'_2.

4. Si $d(p_1, c'_1) + d(p_2, c'_2) \leq d(p_1, c'_2) + d(p_2, c'_1)$

- *si* $f(c'_1) > f(p_1)$ remplacement de p_1 par c'_1
- *si* $f(c'_2) > f(p_2)$ remplacement de p_2 par c'_2

Autrement

- *si* $f(c'_2) > f(p_1)$ remplacement de p_1 par c'_2
- *si* $f(c'_1) > f(p_2)$ remplacement de p_2 par c'_1

3.2 Le Sharing

En ce qui concerne le Sharing, l'idée générale est qu'il est dangereux d'accumuler trop d'individus semblables dans une même zone. En effet, il en résulte un manque d'informations pour une grande partie de l'espace qui laisserait présager une convergence vers un pic trompeur. D'autre part, il est en pratique souvent intéressant de pouvoir sélectionner différents optima (globaux ou locaux). En résumé le partage à un double but:

- **Éviter une convergence trop rapide**
  sans doute vers un optimum local

- **Permettre d'identifier plusieurs optima**
  pas forcément absolus

Le moyen utilisé est de pénaliser les individus trop proches les uns des autres. Grâce à cela d'autres moins performants mais appartenant à des zones différentes pourront entrer en jeu ce qui aura pour principale conséquence d'accroître significativement la diversité de la population.

Dans la pratique on définit la similarité de deux individus:

$$Sim(X,Y) = \left(1 - \frac{d(X,Y)}{\sigma}\right)^{+}$$

σ étant un paramètre fixé pour l'application considérée.

La sélection sera faite sur $\mathcal{F}'$ définie par :

$$\mathcal{F}'(X) = \frac{\mathcal{F}(X)}{\sum_{Y \in \mathcal{G}} Sim(X,Y)}$$

Partage - Exemple

Cas de 3 individus :

• 1

• 2

• 3

$$d(1,2) > \sigma \quad \Longrightarrow \quad Sim(1,2) = Sim(2,3) = 0$$

$$d(1,3) \ll \sigma \quad \Longrightarrow \quad Sim(1,3) \approx 1$$

On obtient donc les pénalisations suivantes:

$$\begin{cases} \mathcal{F}'(1) = \mathcal{F}(1)/2 \\ \mathcal{F}'(2) = \mathcal{F}(2) \\ \mathcal{F}'(3) = \mathcal{F}(3)/2 \end{cases}$$

Cependant cette méthode pose un certain nombre de problèmes dans son application:

- *Le nombre de maxima obtenu dépend fortement de la taille de la population.*

- *Les croisements sont moins efficaces car il y a plusieurs maxima à chaque génération (même si il est en fait possible d'appliquer des croisements restreints, i.e la probabilité de recombinaison dépend de la distance entre les individus).*

- *Une certaine difficulté dans le réglage des paramètres (Interaction entre le facteur de partage et la pression sélective).*

- *L'ensemble des maxima n'est obtenu qu'à la fin de l'évolution.*

3.3 Le Sequential Niching

Principe:

Trouver plusieurs optima par pénalisation des voisinages correspondants aux pics précédemment trouvés.

1- Fitness $\rightarrow$ Fitness modifiée ($M_{n+1}(x) \equiv M_n(x) \times G(x, s_n)$)

2- Application d'un AG sur la fitness modifiée.

3 - Modification de la fitness en tenant compte du nouveau meilleur élément s_n du run.

Fonction de pénalisation:

$$G(x, s) = \begin{cases} (d_{xs}/r)^\alpha & d_{xs} < r \\ 1 & d_{xs} \geq r \end{cases}$$

3.4 L'Algorithme "Énergie"

Pour éviter les inconvénients du Sharing, une nouvelle approche a été envisagée. Celle-ci consiste non plus à pénaliser les fitness en fonction des distances entre individus à chaque génération mais à localiser les voisinages des optima déjà trouvés et pénaliser les points qui se trouvent dans une zone trop proche. Les principales étapes de cet algorithme sont les suivantes:

- Stockage des points de l'espace parcouru et de leur fitness $(x_i^a, f(x_i^a))$ jusqu'à la génération G_T pour des populations de taille P.

- A partir de la génération G_{T+1}, pour un point x_j et pour chaque point stocké x_i^a, calcul du terme "Énergie":

$$E(x_j, x_i^a) = \frac{f(x_i^a)}{d^2(x_j, x_i^a)}$$

- Calcul de la somme des énergies:

$$E = \sum_{a=1}^{P \times G_T} E(x_j, x_i^a)$$

- Calcul de la somme des énergies maximum et minimum:

$$E_{max} = \sum_{a=1}^{P \times G_T} \frac{f(x_i^a)}{d_m^2}, \quad E_{min} = \sum_{a=1}^{P \times G_T} \frac{f(x_i^a)}{d_M^2}$$

d_M = distance des deux points les plus éloignés de l'espace de recherche.
d_m= paramètre à fixer pour chaque type d'application, $d_m \ll d_M$

- Tirage aléatoire uniforme d'une énergie de référence E_r pour chaque individu:

$$E_{min} \leq E_r \leq E_{max}$$

- Si $E \geq E_r \Rightarrow f(x_j) = 0$.

Le processus précédemment décrit est répété toutes les G_T générations avec alors plusieurs énergies de référence.

Cette méthode diffère du Sequential Niching principalement par le fait que l'historique de l'évolution est pris en compte de manière plus importante. Les "zones interdites" ne sont plus déterminées par un rayon au voisinage d'un optimum déjà trouvé mais par les voisinages des points de l'espace déjà parcourus. Nous verrons dans les résultats numériques du chapitre 3 un exemple d'application de cet algorithme.

4 Les fondements

Lorsque les algorithmes génétiques sont apparus il n'y avait aucune base sérieuse concernant la preuve de leur convergence. La validité de cette méthode ne reposait que sur des résultats approximatifs après de nombreuses suppositions et simplifications. La suite de cette section présente un cours extrait du raisonnement alors tenu pour justifier leur convergence vers l'optimum.

Un schème (Holland [25], 1968, 1975) est un motif de similarité décrivant un sous ensemble de chaînes avec des similarités à des positions définies. Nous supposerons que les chaînes sont construites sur l'alphabet binaire $V = \{0, 1\}$. Une exploration génétique conséquente nécessite une population de chaînes A_j, $j = 1, 2, ...P$ qui forment la population $A(t)$ à la génération t. Nous considérons un schème H défini sur l'alphabet $V_+ = 0, 1, *$. Chaque élément de cette chaîne porte le nom d'allèle. L'astérisque est le symbole indifférent correspondant à 0 ou 1. L'ordre d'un schème H, noté o(H) est tout simplement le nombre de positions instanciées (pour un alphabet binaire, le nombre de 0 et de 1) dans le schème. La longueur utile d'un schème H, noté $\delta(H)$ est la distance entre la première et la dernière position instanciée dans la chaîne. Dans toute la suite de cette section nous noterons f_i la fitness de l'élément x_i.

Considérons maintenant les effets isolés puis combinés de la Sélection, du Croisement, et de la Mutation sur les schèmes contenus dans une population de chaînes (d'après Goldberg [15]).

<u>Effet de la sélection</u>

L'effet de la Sélection sur le nombre attendu de schèmes est particulièrement facile à déterminer. Imaginons qu'à une date t donnée, il y ait m exemplaires d'un schème H contenus dans la population $A(t)$, ce que nous notons $m = m(H, t)$. Lors de la sélection, une chaîne est copiée en fonction de son adaptation, ou , plus précisément, une chaîne

A_i est sélectionnée avec une probabilité $p_i = \frac{f_i}{\sum f_i}$. Après avoir choisi une population de taille P, nous nous attendons à avoir $m(H, t+1) = m(H, t) \times P \times \frac{f(H,t)}{\sum f_i}$ représentants du schème H dans la population à la date t+1, où f(H,t) est l'adaptation moyenne des chaînes représentant le schème H à la date t. En s'apercevant que l'adaptation moyenne de la population peut être écrite $\overline{f_t} = \frac{\sum f_i}{P}$, on peut reformuler l'équation de développement par reproduction des schèmes comme suit:

$$m(H, t+1) = m(H, t)\frac{f(H, t)}{\overline{f_t}}$$

L'effet de la reproduction sur le nombre de schèmes est clair qualitativement: les schèmes qui sont au-dessus de la moyenne se développent et ceux qui sont au-dessous disparaissent.

Effet du croisement

Le croisement est un échange aléatoire d'informations entre les chaînes. Il crée de nouvelles structures en évitant améliorant la stratégie dictée par la sélection seule. Il en résulte des proportions de schèmes exponentiellement croissantes (ou décroissantes) dans la population. Comme un schème survit quand le point de croisement tombe à l'extérieur de sa longueur utile, la probabilité de survie lors d'un croisement simple est $p_s = 1 - \frac{\delta(H)}{(l-1)}$ puisque le schème a de grandes chances d'être perdu quand un point compris dans sa longueur utile est choisi parmi les l-1 points possibles. Si le croisement a lieu avec une probabilité p_c lors d'un appariement quelconque, la probabilité de survie peut être exprimé ainsi:

$$p_s \geq 1 - p_c\frac{\delta(H)}{l-1}$$

L'effet combiné de la reproduction et du croisement peut donc maintenant être considéré. Comme lorsque nous avons considéré la reproduction seule, nous nous intéressons au calcul du nombre de schèmes H attendu pour la génération suivante. En supposant indépendance des opérations de reproduction et de croisement, on obtient l'estimation:

$$m(H, t+1) \geq m(H, t)\frac{f(H, t)}{\overline{f_t}}[1 - p_c\frac{\delta(H)}{l-1}]$$

En comparant ceci à l'expression obtenue plus tôt pour la reproduction seule, l'effet combiné du croisement et de la reproduction s'obtient en multipliant le nombre attendu de schèmes lors de la reproduction seule par la probabilité p_s de survie d'un croisement.

Effet de la mutation

Le dernier opérateur à prendre en compte est la mutation. En utilisant notre définition de la section 2 , la mutation est la modification aléatoire de probabilité p_m d'une position quelconque de la chaîne. Pour qu'un schème H survive, toutes ses positions instanciées doivent survivre. Aussi puisqu'un allèle quelconque a une chance de survie de $(1-p_m)$, et puisque chaque mutation est indépendante des autres, un schème quelconque survit quand chacune des o(H) positions instanciées dans le schème survit. En multipliant la probabilité de survie $(1-p_m)$ par elle même o(H) fois, on obtient la probabilité de survie à la mutation $(1-p_m)^{o(H)}$. Quand p_m est petit ($p_m << 1$), la probabilité de survie du schème peut être approximée par l'expression $1-o(H)p_m$. Nous pouvons donc conclure qu'on peut s'attendre à ce qu'un schème H quelconque reçoive, du fait de la reproduction, du croisement, et de la mutation, un nombre de copies donné par l'équation suivante (en négligeant les termes du second ordre en p_m):

$$m(H,t+1) \geq m(H,t)\frac{f(H,t)}{\overline{f_t}}[1-p_c\frac{\delta(H)}{l-1}-o(H)p_m]$$

L'ajout de la mutation affecte peu les conclusions précédentes. Les schèmes courts, d'ordre faible, et de performance au-dessus de la moyenne font l'objet d'un nombre de tests exponentiellement croissants dans les générations suivantes. Cette conclusion d'une importance telle qu'il lui est donné un nom spécial: le **Théorème des Schèmes**, ou le Théorème Fondamental des Algorithmes Génétiques.

Remarque:

Il est important de noter que f(H) peut être supérieur à $\overline{f_t}$, mais f(H,t) peut être très différent de f(H). Ce n'est donc pas un théorème mais cela permet néanmoins de comprendre le processus d'amélioration de la performance. Pour des résultats plus rigoureux de convergence on peut se référer à Cerf[5] et Rudolf[44].

Chapitre 2

L'interféromètre linéaire

Ce chapitre est consacré à la présentation détaillée du problème d'interférométrie, et à la formulation mathématique précise du problème d'optimisation dans le cas d'un interféromètre linéaire. Après une introduction rapide dans la première section de ce chapitre, la seconde section sera consacrée à la présentation du problème. Les principes de base sur lesquels reposent le fonctionnement de l'appareil seront énoncés en insistant tout particulièrement sur les difficultés que posent les erreurs de mesures. Afin de limiter les effets négatifs qu'elles engendrent sur calcul de l'angle recherché, il est possible d'agir sur les paramètres fondamentaux que sont le nombre d'antennes ainsi que leurs positions relatives. A travers une modélisation mathématique nous verrons les conséquences de leur modification. Le cas d'une couverture angulaire symétrique par rapport à l'axe orthogonal à l'alignement pouvant être considéré comme un cas particulier important étant donné la fréquence de son application, sera par la suite abordé. Nous verrons comment certaines propriétés des équations peuvent alors permettre de réduire significativement le nombre d'opérations et donc le temps de calcul de la fonctionnelle. Dans la dernière section une étude sera consacrée aux interféromètres de faible précision avec certaines modifications sur les équations modélisant le problème.

1 Introduction

L'interféromètre est un appareil de mesure utilisé pour déterminer la direction de provenance d'une source électromagnétique à partir des différences de phase mesurées entre des antennes. Cependant la mesure d'un seul déphasage ne suffit pas à situer le lieu d'émission de manière unique. Le problème vient de ce que le déphasage théorique n'est connu qu'a $2k\pi$ près par rapport à celui mesuré. Il est donc indispensable de déterminer la valeur des paramètres k si l'on veut connaître la direction recherchée sans ambiguïté. Si l'interféromètre était fabriqué avec perfection et travaillait dans un environnement électromagnétique idéal il suffirait de rajouter une antenne et les informations fournies par les deux déphasages mesurés permettraient de trouver la direction recherchée. Mais dans la réalité des erreurs sur les mesures sont commises et l'appareil doit être dimensionné pour que malgré ces informations imparfaites la localisation du lieu d'émission soit possible. Le problème revient donc à trouver le bon nombre d'antennes ainsi que les meilleurs emplacements pour que malgré ces imperfections sur les mesures la direction puisse être trouvée.

Pour différentes études traitant des ambiguïtés ainsi que d'autres points fondamentaux en interférométrie avec une seule source on pourra consulter A.R Cusdin[7], R.B Dybdal [12], E. Jacobs and E.W Ralston [27], W.H Kummer [32]. Ces travaux décrivent principalement pour la levée d'ambiguïtés l'utilisation de montages électroniques sophistiqués.

2 Présentation du problème

Considérons l'interféromètre le plus simple, c'est à dire celui constitué par simplement deux antennes distantes d'une distance D comme représentée Figure 2.1. On se place dans le plan défini par la source et les deux antennes.

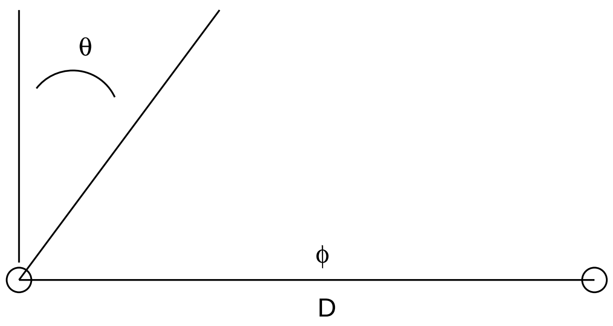


Figure 2.1 *Interféromètre à deux antennes*

Si les deux antennes reçcoivent un signal électromagnétique de longueur d'onde λ, la longueur d'onde minimale correspondant à la bande de fréquence étant λ_{min}, à partir d'une direction θ dans l'intervalle $[\theta_{min}, \theta_{max}]$, le déphasage théorique ϕ est donné par:

$$\phi = \frac{2\pi D}{\lambda}\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max} \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.1}$$

Connaissant ϕ , la détermination de l'angle θ est immédiate:

$$\theta = \arcsin(\frac{\lambda\phi}{2\pi D}) \tag{2.2}$$

Mais en pratique le déphasage mesuré $\phi_m \in [-\pi, \pi]$ et le déphasage théorique n'est donc connu qu'a $2k\pi$ près. La relation entre ϕ_m et θ devient:

$$\phi_m = \frac{2\pi D}{\lambda}\sin\theta - 2k\pi, \; k \in \mathbb{N} \cap S \tag{2.3}$$

L'ensemble S vérifiant:

$$\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{min} - \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

Le nombre k est appelé *"nombre de tours"*.

Si $\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{min} \leq -\frac{1}{2}$ ou $\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} \geq \frac{1}{2}$ ce paramètre k doit être déterminé pour que le calcul de θ soit possible. Dans le cas d'un interféromètre à deux antennes il est impossible de déterminer ce paramètre. En effet l'information fournie par la mesure n'est pas suffisante pour identifier la valeur de k qui peut seule permettre de connaître la valeur de ϕ à partir de ϕ_m (Cf Figure 2.2).

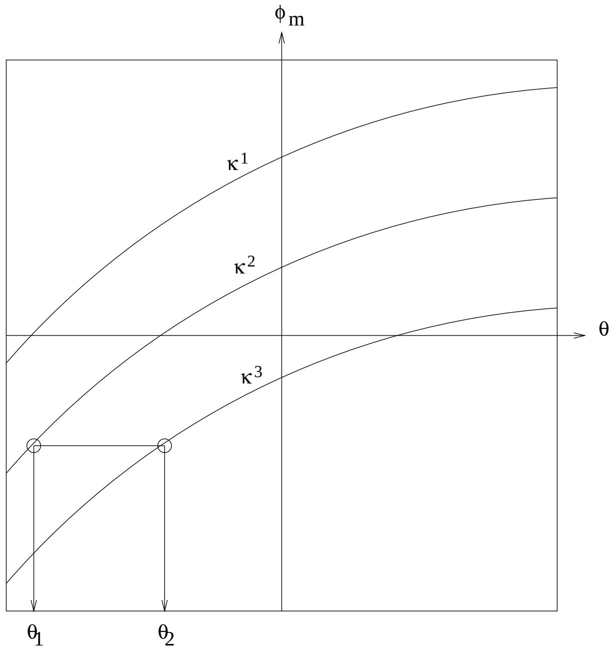


Figure 2.2 *Diverses valeurs de θ possibles pour un même déphasage mesuré*

Considérons maintenant un interféromètre à trois antennes (Cf Figure 2.3).

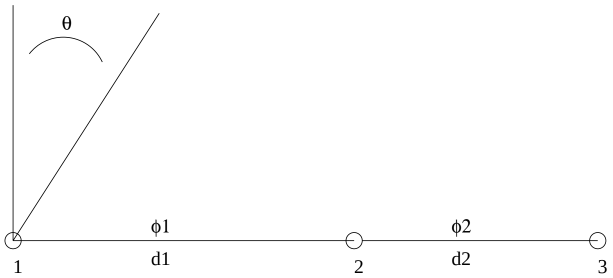


Figure 2.3 *Interféromètre à trois antennes*

Les antennes 1 et 2 (resp. 2 et 3) sont séparées par les distances d_1 (resp. d_2), et ϕ_{1m} (resp. ϕ_{2m}) sont les déphasages mesurés entre les antennes 1 et 2 (resp. 2 et 3). Appliquant l'équation (2.3) pour chaque couple d'antennes, on obtient en éliminant θ une équation faisant intervenir les déphasages mesurés, les distances entre les antennes et les tours k_i

qui doivent être identifiés.

$$\phi_{2m} = \frac{d_2}{d_1}\phi_{1m} + 2\pi(\frac{d_2}{d_1}k_1 - k_2) \tag{2.5}$$

Le diagramme des phases fait apparaître un faisceau de droites paramétrées par les différents couples (k_1, k_2) dans le plan (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}) (Cf Figure 2.4)

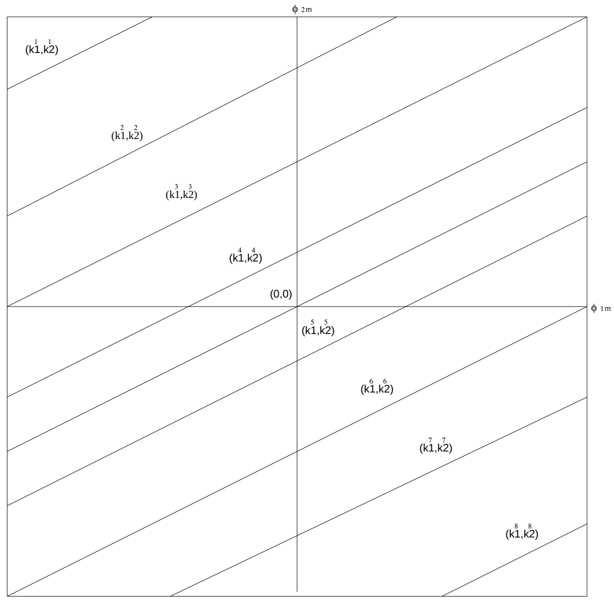


Figure 2.4 ϕ_{2m}=*f*(ϕ_{1m}, k_1^a, k_2^a)*: ensemble des droites paramétrées par les couples admissibles*

A partir d'un couple de mesures (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}) il est maintenant possible d'identifier (k_1, k_2):

$$\frac{d_2}{d_1}k_1 - k_2 = \frac{\phi_{2m} - \frac{d_2}{d_1}\phi_{1m}}{2\pi}, \quad |\phi_{im}| \leq \pi \tag{2.6}$$

Le seul cas de non unicité est le cas ou $(k_1^a, k_2^a), (k_1^b, k_2^b)$ satisfont

$$\frac{d_2}{d_1}k_1^a - k_2^a = \frac{d_2}{d_1}k_1^b - k_2^b,\ a \neq b \tag{2.7}$$

i.e.

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{k_2^b - k_2^a}{k_1^b - k_1^a} \tag{2.8}$$

Si les distances (d_1, d_2) sont choisies telles que $\frac{d_2}{d_1} \notin Q$, il n'existe qu'un seul couple correspondant aux mesures (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}) ce qui permet la détermination de l'angle θ à partir de la relation:

$$\theta = \arcsin(\frac{\lambda}{2\pi D}(\phi_{1m} + 2k_1\pi + \phi_{2m} + 2k_2\pi)) \tag{2.9}$$

Mais ceci suppose que les mesures des déphasages sont parfaites, c'est à dire que l'appareil soit configuré avec une précision infinie et travaille dans un environnement électromagnétique idéal. Ce n'est dans la pratique pas le cas et des erreurs sur les mesures sont commises.

3 Prise en compte des erreurs de mesures

En pratique des erreurs sur les mesures (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}) sont commises. Si $\delta\phi_i$ est l'erreur sur ϕ_{im}, les déphasages mesurés ont pour expression:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda} \sin\theta - 2k_i\pi + \delta\phi_i,\ 1 \leq i \leq 2 \tag{2.10}$$

La relation entre ϕ_{1m} and ϕ_{2m} est alors:

$$\phi_{2m} = \frac{d_2}{d_1}(\phi_{1m} - \delta\phi_1) + 2\pi(\frac{d_2}{d_1}k_1 - k_2) + \delta\phi_2 \tag{2.11}$$

Les points mesurés ne sont généralement pas sur l'une des droites du faisceau mais à une certaine distance de celles-ci suivant l'importance des erreurs commises. Une telle situation est présentée Figure 2.5. Le cube représente l'erreur de phase maximale qui peut être acceptée tout en garantissant l'unicité dans la détermination du couple de tours k_i.
Quand un point (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}) est mesuré, avant de calculer θ, le couple (k_1, k_2) de l'équation (2.11) doit être identifier **sans ambiguïté**. La simple procédure "*projeter sur la droite la plus proche*" donne la bonne réponse si l'erreur commise ne dépasse pas l'erreur de phase maximale admissible.
Donc pour tout couple (k_1^a, k_2^a), (k_1^b, k_2^b) , il existe une "erreur de phase maximale admissible" notée $\delta\phi_{ab}$, telle que si l'erreur commise sur $\delta\phi_1$ et $\delta\phi_2$ est d'une grandeur inférieure, alors le point mesuré appartient au "cube erreur" d'une seule de ces droites. Par contre si elle est supérieure, c'est que le point mesuré peut provenir de l'une ou l'autre de ces droites, en d'autres termes, il y a intersection entre les cubes erreurs et impossibilité d'identification des couples de tours sans ambiguïté.

L'expression de $\delta\phi_{ab}$ est donnée par:

$$\delta\phi_{ab} = \pi \frac{|\frac{d_2}{d_1}(k_1^b - k_1^a) - (k_2^b - k_2^a)|}{1 + \frac{d_2}{d_1}} \tag{2.12}$$

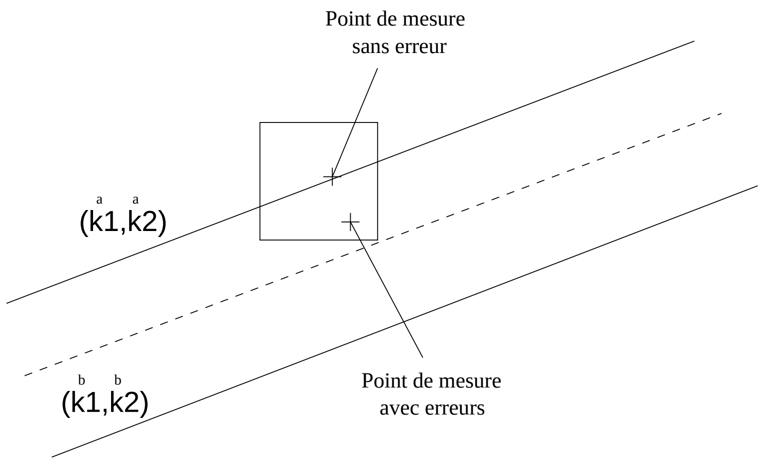


Figure 2.5 *Le cube erreur $\delta\phi$: s'il ne coupe pas la droite médiane entre les droites paramétrées par les couples (k_1^a, k_2^a), (k_1^b, k_2^b), l'identification de la droite la plus proche du point de mesure est toujours possible sans ambiguïté*

Posons

$$\delta\phi = \inf_{a \neq b} \delta\phi_{ab}$$

Cette valeur correspond à “l'erreur de phase maximale admissible” pour le dimensionnement effectué. Cela signifie que si les erreurs $\delta\phi_1, \delta\phi_2$ n'excèdent pas cette valeur alors quel que soit le couple de mesures (ϕ_{1m}, ϕ_{2m}), il n'y aura qu'un seul couple de paramètres (k_1, k_2) lui correspondant.

Remarque 1:

En réalité l'angle de site s intervient dans l'expression du déphasage:

$$\phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos s \sin \theta$$

Il est donc à noter que dans le calcul de l'angle θ il y a en fait le terme $\cos s$ qui est présent. Pour que la valeur de l'angle soit proche de la réalité ce terme doit donc être petit ce qui est implicitement supposé dans toute cette approche.
Concernant le nombre de tours k pouvant crée des ambiguïtés, c'est lorsque s=0 qu'il est maximal. C'est donc à partir de cette valeur que le nombre de droites constituant le faisceau sera calculé, ce qui représente en fait le cas le plus contraignant pour le problème d'optimisation.

Remarque 2:

La distance D entre les deux antennes extrémales joue un rôle fondamental concernant la précision du calcul de l'angle recherché. Si θ_δ est l'angle calculé avec les erreurs de mesures et θ l'angle théorique, on a:

$$\theta_\delta = \arcsin(\frac{\lambda}{2\pi}(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(\phi_{im} + 2k_i\pi)}{D} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\delta\phi_i}{D}))$$

$$\theta = \arcsin(\frac{\lambda}{2\pi}(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}(\phi_{im} + 2k_i\pi)}{D}))$$

et donc

$$\lim_{D\to\infty}\theta_\delta = \theta$$

Il est donc préférable de choisir D aussi grand que possible car alors l'influence des erreurs de mesures devient négligeable. Ce paramètre est en général imposé lors de la conception de l'appareil soit pour des impératifs de précision soit pour des contraintes techniques le plus souvent liées à la place disponible sur le porteur (avion par exemple).

Remarque 3:

L'objectif final reste la détermination de θ.
La relation $\theta = f(\phi_{im}, k_i, \frac{\lambda}{2\pi D})$ est obtenu de la manière suivante:
Le déphasage théorique entre les antennes 1 et N est donné par:

$$\phi = \frac{2\pi D}{\lambda}\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}\sum_{i=1}^{N-1} d_i \sin\theta$$

En utilisant l'égalité

$$\frac{2\pi d_i}{\lambda}\sin\theta = \phi_{im} + 2k_i\pi$$

On trouve:

$$\frac{2\pi D}{\lambda}\sin\theta = \sum_{i=1}^{N-1}(\phi_{im} + 2k_i\pi)$$

D'où l'on déduit:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{2\pi D}\sum_{i=1}^{N-1}(\phi_{im} + 2k_i\pi)$$

Et finalement:

$$\theta = \arcsin(\frac{\lambda}{2\pi D}\sum_{i=1}^{N-1}(\phi_{im} + 2k_i\pi))$$

Dans le cas d'un interféromètre à 3 antennes alignées, si la distance entre les deux antennes extrémales est fixée il n'y a qu'un seul paramètre $b = \frac{d_1}{d_2}$. En calculant les valeurs de $\delta\phi$ pour différentes valeurs de b on obtient le graphique 2.6.

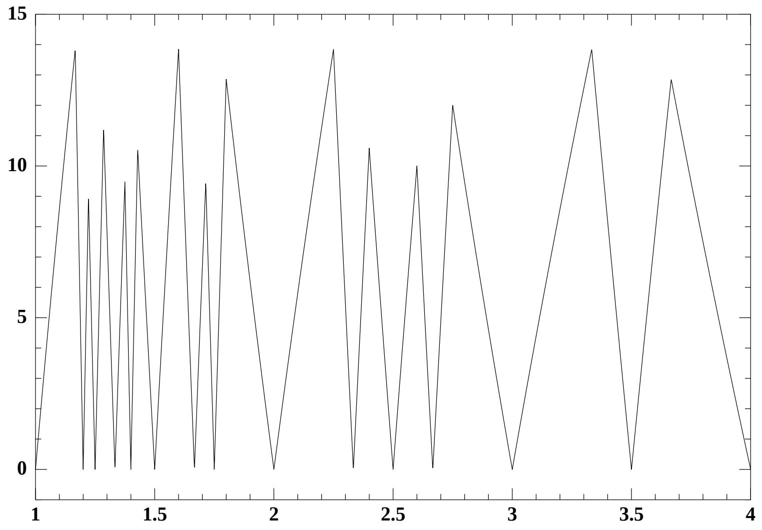


Figure 2.6 $\delta\phi = f(b)$

On conçoit à la vue de cette fonctionnelle où de nombreux maxima locaux sont présents que les algorithmes d'optimisation standards éprouvent quelques problèmes d'efficacité. C'est pourquoi il est préférable de faire appel à des techniques d'optimisation globale comme les algorithmes génétiques.

Dans le cas d'un interféromètre linéaire à 4 antennes, il est intéressant de visualiser le faisceau et ses cubes erreurs après projection de ces derniers sur l'hyperplan orthogonal aux droites. Il apparaît des cellules de formes polygonales qui délimitent le voisinage d'un triplé de tours. Lorsque un point de mesure se trouve sur l'une de ces cellules les k_i correspondant peuvent être identifiés sans ambiguïté si les erreurs commises sur les mesures ne dépassent pas l'erreur de phase admissible que peut accepter l'appareil. Dans le cas contraire deux situations peuvent se présenter. Soit le point appartient à une mauvaise cellule et alors un mauvais triplé sera choisi engendrant une importante erreur sur l'angle θ. Soit le point n'appartient à aucune cellule (se trouve dans un trou) et alors aucun triplé ne pourra être identifié.
Sur la Figure 2.7 GISA représente la couverture angulaire de l'appareil, FRE la fréquence maximale en Ghz, DPHI l'erreur de phase maximale admissible, D3 la distance entre la 3^{eme} et la 4^{eme} antenne, et BET1 et BET2 les rapports des distances entre la plus grande et les deux autres. Enfin, le grand polygone représente la projection du cube $[-\pi, \pi]^3$ sur l'hyperplan orthogonal aux droites.

Figure 2.7 *Cellules des cubes projetés*

4 Formulation du problème d'optimisation

Nous avons donc vu qu'il existe une erreur de phase maximale admissible à ne pas dépasser sous peine d'impossibilité de détermination de l'angle θ. Elle dépend en fait principalement du nombre d'antennes et de leurs positions. Cette section a pour principal objectif d'établir l'expression de l'erreur de phase maximale admissible en fonction du nombre d'antennes et de leurs positions relatives dans le cas où le terme $|\frac{D}{\lambda}\sin\theta|$ est grand, qui représente le cas le plus fréquent dans les applications. Une étude de certaines propriétés de symétrie clôturera cette partie.

4.1 Cas général

Soit D la distance entre les deux antennes extrémales, d_{min} la distance minimale qui peut être acceptée entre deux antennes, λ la longueur d'onde du signal reçu, $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ la couverture angulaire de l'interféromètre et N le nombre d'antennes qui le constitue.

Les différences de phases mesurées s'expriment par:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda}\sin\theta - 2k_i^{\alpha}\pi + \delta\phi_i \ , \quad 1 \leq i < N$$

$\delta\phi_i$ étant l'erreur de mesure commise sur ϕ_{im}.

Si (ϕ_{im}, ϕ_{jm}) est un couple de déphasages mesurés, on a les relations:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda}\sin\theta - 2k_i\pi + \delta\phi_i$$

$$\phi_{jm} = \frac{2\pi d_j}{\lambda}\sin\theta - 2k_j\pi + \delta\phi_j$$

En éliminant θ on obtient la relation:

$$\phi_{jm} = \frac{d_j}{d_i}(\phi_{im} - \delta\phi_i + 2k_i\pi) - 2k_j\pi + \delta\phi_j$$

ou encore:

$$\phi_{jm} - \frac{d_j}{d_i}\phi_{im} = \delta\phi_j - \frac{d_j}{d_i}\delta\phi_i + 2\pi(\frac{d_j}{d_i}k_i - k_j)$$

Considérons deux (N-1)-uplets de tours $(k_1^a, k_2^a, \ldots, k_{N-1}^a) \neq (k_1^b, k_2^b, \ldots, k_{N-1}^b)$. Si $\delta\phi_{ij}^{ab} \in \mathbb{R}$ est l'erreur de phase maximale admissible pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans la détermination du couple de paramètres $(k_i^\alpha, k_j^\alpha)_{\alpha=a,b}$ à partir d'un couple de mesures (ϕ_{im}, ϕ_{jm}), on a

$$\begin{cases} \phi_{jm} - \frac{d_j}{d_i}\phi_{im} = \delta\phi_j^a - \frac{d_j}{d_i}\delta\phi_i^a + 2\pi(\frac{d_j}{d_i}k_i^a - k_j^a) \\ \\ \phi_{jm} - \frac{d_j}{d_i}\phi_{im} = \delta\phi_j^b - \frac{d_j}{d_i}\delta\phi_i^b + 2\pi(\frac{d_j}{d_i}k_i^b - k_j^b) \end{cases}$$

En éliminant $\phi_{jm} - \frac{d_j}{d_i}\phi_{im}$ de ce système on obtient l'égalité:

$$2\pi(\frac{d_j}{d_i}k_i^a - k_j^a) - \frac{d_j}{d_i}\delta\phi_i^a + \delta\phi_j^a = 2\pi(\frac{d_j}{d_i}k_i^b - k_j^b) - \frac{d_j}{d_i}\delta\phi_i^b + \delta\phi_j^b$$

ce qui implique:

$$2\pi(\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)) = \delta\phi_j^a - \delta\phi_j^b - \frac{d_j}{d_i}(\delta\phi_i^a - \delta\phi_i^b)$$

Cherchons la borne supérieur sur $\delta\phi_i^a, \delta\phi_j^a, \delta\phi_i^b, \delta\phi_i^b < \delta\phi_{ij}^{ab}$ pour qu'il n'y ait qu'un seul couple $(k_i^\alpha, k_j^\alpha)_{\alpha=a,b}$ correspondant au couple de mesures de phases (ϕ_{im}, ϕ_{jm}) :

Pour pouvoir distinguer les deux couples (k_i^a, k_j^a) et (k_i^b, k_j^b), il faut:

$$2\pi(\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)) \neq \delta\phi_j^a - \delta\phi_j^b - \frac{d_j}{d_i}(\delta\phi_i^a - \delta\phi_i^b)$$

et donc:

$$\pi|(\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a))| \geq (1 + \frac{d_j}{d_i})\delta\phi_{ij}^{ab}$$

L'on obtient finalement:

$$\delta\phi_{ij}^{ab} = \pi\frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Dans le cas d'un interféromètre à N antennes il faut déterminer le (N-1)-uplet $(k_1, k_2, ..., k_{N-1})$ correspondant aux N-1 mesures $(\phi_{1m}, \phi_{2m}, ..., \phi_{(N-1)m})$ malgré les N-1 erreurs de mesure commises $(\delta\phi_1, \delta\phi_2, ..., \delta\phi_{N-1})$.

Pour différencier deux (N-1)-uplets $(k_1^a, k_2^a, ..., k_{N-1}^a)$ et $(k_1^b, k_2^b, ..., k_{N-1}^b)$, il suffit de pouvoir différencier au moins un couple (k_i, k_j) parmi les $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ couples possibles.

L'erreur de phase maximale admissible pour qu'il y ait unicité dans la détermination du (N-1)-uplet entre deux paramétrages possibles s'exprime donc par:

$$\delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté quelles que soit les mesures $|\phi_{im}| \leq \pi$, il faut et il suffit que les erreurs de mesure ne dépassent pas $\delta\phi$ défini par:

$$\delta\phi = \pi \inf_{b>a} \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Soit S l'ensemble des (N-1)-uplets $(k_1, k_2, ..., k_{N-1})$ qui permettent de retrouver les déphasages réel à partir des déphasages mesurés, notant E[x] la partie entière de x, les couples (k_i, k_j) permettant de construire ces (N-1)-uplets vérifient les deux inégalités suivantes:

$$E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{min} - \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})] \leq k_i \leq E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})]$$

$$\sup_{i<j\leq N-1} |\frac{d_j}{d_i} k_i - k_j - \frac{1}{2}\frac{d_j}{d_i}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})| \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi}), \quad 1 \leq i < N-1$$

θ_{min} et θ_{max} représentent l'angle minimal et l'angle maximal de la couverture angulaire de l'interféromètre par rapport à l'axe orthogonal à l'alignement, λ_{min} est la longueur d'onde minimale correspondant à la bande de fréquence.

La première inégalité donne les tours maximaux et minimaux permettant le passage des déphasages mesurés aux déphasages réel:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda} \sin\theta - 2k_i\pi + \delta\phi_i$$

En tenant compte de l'intervalle des mesures:

$$-\pi \leq \phi_{im} \leq \pi$$

On obtient:

$$\begin{cases} 2k_i\pi \leq \frac{2\pi d_i}{\lambda} \sin\theta + \delta\phi_i + \pi \\ 2k_i\pi \geq \frac{2\pi d_i}{\lambda} \sin\theta + \delta\phi_i - \pi \end{cases}$$

Si $\delta\phi$ est l'erreur de phase maximale admissible ($|\delta\phi_i| < \delta\phi$), il vient

$$\begin{cases} k_i \leq \frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi}) \\ k_i \geq \frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{min} - \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi}) \end{cases}$$

On trouve finalement:

$$E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{min} - \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})] \leq k_i \leq E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})]$$

La seconde inégalité donne les (N-1)-uplets de tours pour lesquels il peut y avoir ambiguïté. Parmi tous les (N-1)-uplets possibles cela revient à ne prendre en compte que ceux qui paramètrent les droites traversant le cube $[-(\pi + \delta\phi), \pi + \delta\phi]^{N-1}$. Or une droite paramétrée par le (N-1)-uplet de tours $(k_1^a, k_2^a, \ldots, k_{N-1}^a)$ traverse le cube si elle coupe l'une des faces du cube. Le (N-1)-uplet correspondant vérifie alors cette seconde inégalité.

4.2 Cas symétrique

Dans le cas où $\theta_{max} = -\theta_{min}$, le problème admet une symétrie qui permet de faire diminuer sensiblement les temps de calcul de la fonctionnelle $\delta\phi$.

Notons: S_1 l'ensemble des (N-1)-uplets $(k_1^a, k_2^a, ..., k_{N-1}^a)$
S_2 l'ensemble des (N-1)-uplets $(-k_1^a, -k_2^a, ..., -k_{N-1}^a)$
$S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$
$K^a = (k_1^a, k_2^a, ..., k_{N-1}^a)$

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab}, \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_2}} \delta\phi^{ab}, \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi^{ab}, \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^a \in S_1 \\ b \neq a}}, \inf_{\substack{K^b \in S \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b})$$

En tenant compte de certaines propriétés de $\delta\phi$ en particulier liées à sa parité il est possible de calculer uniquement:

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a}} \delta\phi^{ab}, \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a}} \delta\phi_+^{ab}, \inf_{K^b \in S_1} \delta\phi^{0b})$$

avec

$$\delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}} \quad , \quad \delta\phi^{0b} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i} k_i^b - k_j^b|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\delta\phi_+^{ab} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b + k_i^a) - (k_j^b + k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Les propriétés menant à cette relation peuvent être trouvées en Annexe.

<u>Diminution du nombre de tests pour le calcul de $\delta\phi$</u>

• **Sans symétrie**:

Soit $C_s = Card(S)$ le nombre de (N-1)-uplets qui paramètrent le faisceau de droites. Le nombre de tests à effectuer est:

$$N_t = \sum_{i=1}^{C_s - 1} i = \frac{(C_s - 1)C_s}{2}$$

- **Avec symétrie**:

$C_{s_1} = Card(S_1),\ C_{s_2} = Card(S_2)$

Avec K^0, on a:

$C_s = C_{s_1} + C_{s_2} + 1$

Or $C_{s_2} = C_{s_1}$, ce qui implique $C_{s_1} = \frac{C_s - 1}{2}$

Le nombre de tests devient:

$N_t^{sym} = \frac{(C_{s_1}-1)\times C_{s_1}}{2} + \frac{(C_{s_1}-1)\times C_{s_1}}{2} + C_{s_1} - 1$

$N_t^{sym} = (\frac{(C_s-1)}{2} - 1)(\frac{(C_s-1)}{2} + 1)$

$N_t^{sym} = \frac{1}{4}(C_s^2 - 2C_s - 3)$

Sans les propriétés de symétrie on avait:

$N_t = \frac{1}{2}(C_s^2 - C_s)$

Quand C_s est grand on a donc $N_t^{sym} \sim \frac{N_t}{2}$

5 Modélisation pour $|\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta|$ petit

Dans la modélisation du problème précédent les demi-droites du faisceau ont été considérées comme des droites pour faciliter la phase d'extraction, c'est à dire la détermination des tours à partir des mesures. Dans le cas où $|\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{min}|, |\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max}|$ sont grands, cette approximation ne change en rien les résultats du problème à optimiser. Lorsque $|\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{min}|, |\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max}|$ sont petits, il n'en va pas de même. En effet les valeurs de l'erreur de phase admissible peuvent changer significativement.
Graphiquement il est facile de voir que de considérer les demi-droites comme des droites a pour conséquence l'élimination de solutions.

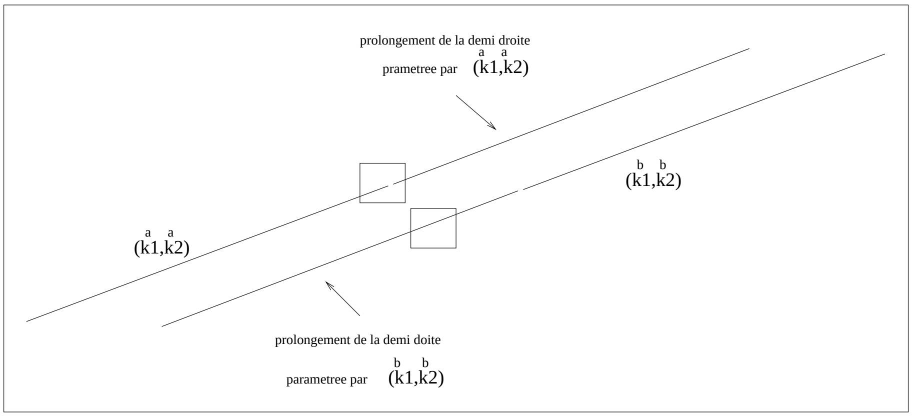


Figure 2.8 *Cubes erreurs avec prolongement des demi-droites*

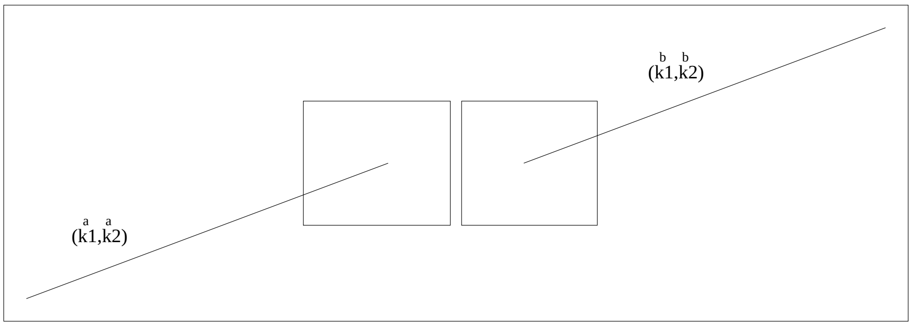


Figure 2.9 *Cubes erreurs sans prolongement des demi-droites*

Le fait de ne pas prolonger les demi-droites a pour conséquence la présence d'un terme supplémentaire dans l'expression de $\delta\phi$:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda}\sin\theta - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a$$

$$\phi_{im} = \frac{2\pi d_i}{\lambda}\sin\theta - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b$$

si $k_i^b \geq k_i^a$

$$\frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b \leq \frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{min} - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a$$

Le terme supplémentaire de l'erreur de phase maximale admissible pour chaque composante i peut être déterminé de la manière suivante:

$$\frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^{ab} = \frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{min} - 2k_i^a\pi - \delta\phi_i^{ab}$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}) - 2\pi(k_i^b - k_i^a) + 2\delta\phi_i^{ab} = 0$$
$$\Rightarrow \delta\phi_i^{ab} = \pi(k_i^b - k_i^a - \frac{d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}))$$

si $k_i^a \geq k_i^b$, on a

$$\frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^{ab} = \frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}\sin\theta_{min} - 2k_i^b\pi - \delta\phi_i^{ab}$$
$$\Rightarrow \frac{2\pi d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}) - 2\pi(k_i^b - k_i^a) + 2\delta\phi_i^{ab} = 0$$
$$\Rightarrow \delta\phi_i^{ab} = \pi(k_i^a - k_i^b - \frac{d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}))$$

Finalement, il vient:

$$\delta\phi^{ab} = \sup_{1\leq i\leq N-1} \pi(|k_i^b - k_i^a| - \frac{d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}))$$

L'erreur de phase maximale admissible a donc pour expression:

$$\delta\phi = \inf_{b>a}(\sup(\pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1+\frac{d_j}{d_i}}, \pi \sup_{1\leq i\leq N-1}(|k_i^b - k_i^a| - \frac{d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}))))$$

Comparant cette égalité à celle du cas général (section 4.1), on remarque Le terme supplémentaire $\pi \sup_{1\leq i\leq N-1}(|k_i^b - k_i^a| - \frac{d_i}{\lambda_{min}}(\sin\theta_{max} - \sin\theta_{min}))$, qui provient du fait que lorsque $|\frac{D}{\lambda}\sin\theta|$ est petit les droites du faisceau peuvent être situées "les unes derrière les autres" et non plus seulement "les unes à côté des autres" (Cf Figure 2.9). Il y a donc un gain d'espace pour le positionnement. Nous verrons au chapitre 3 un cas concret d'application de ce type de problème.

Chapitre 3

Résultats numériques

Ce chapitre présente un certain nombre de résultats numériques obtenus par application des algorithmes génétiques aux problèmes d'optimisation précédemment décrit. Après une brève description de l'algorithme qui permet le calcul de la fonctionnelle $\delta\phi$ à partir des équations décrites au chapitre 2, la section 2 présentera en détails des AG utilisés. Divers positionnements d'antennes optimaux seront alors calculés pour différentes approches du problème. Enfin, ce chapitre sera conclu par des résultats issus de la recherche de plusieurs optima, à l'aide de techniques de recherche d'optima multiples décrites au chapitre 1 section 3.

1 Le calcul de $\delta\phi$

Le principal problème posé au calcul de $\delta\phi$ vient du fait que l'ensemble des (N-1)-uplets de tours $(k_1^\alpha, k_2^\alpha, \ldots, k_{N-1}^\alpha)$ qui permettent de passer des déphasages mesurés aux déphasages théoriques, dépendent du $\delta\phi$ qui doit être calculé. En d'autres termes si $F_{\delta\phi}$ représente l'ensemble des (N-1)-uplets de tours pouvant intervenir pour une certaine valeur de $\delta\phi$, on a:

$$\delta\phi = \pi \inf_{K \in F_{\delta\phi}} \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{\left|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)\right|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Nous avons imaginé pour résoudre ce problème d'utiliser une méthode de bissection sur $\delta\phi$.

Si $\delta\phi(K^a, K^b)_{(K^a, K^b \in F_{\delta\phi})} < \delta\phi$ alors la valeur de $\delta\phi$ est trop grande et l'on décrémente $\delta\phi \rightarrow \frac{\delta\phi}{2}$
Si $\delta\phi(K^a, K^b)_{(K^a, K^b \in F_{\delta\phi})} > \delta\phi$ alors la valeur de $\delta\phi$ est trop petite et l'on incrémente $\delta\phi \rightarrow \frac{3\delta\phi}{2}$

L'algorithme fera tendre la valeur de $\delta\phi$ vers la valeur recherchée qui représente l'erreur de phase maximale admissible pour qu'il n'y ait pas d'ambigïté. Le calcul est fait avec une précision fixée $\delta\phi_I^{prec}$.

<u>Algorithme du calcul de $\delta\phi$</u>

$$F_{\frac{\pi}{2}} \rightarrow (K^1, K^2, \ldots, K^n) \tag{3.1}$$

$$\delta\phi_I = \frac{\pi}{2},\ \alpha = 1,\ \beta = 2 \tag{3.2}$$

$$\delta\phi = \delta\phi_I \tag{3.3}$$

$$F_{\delta\phi} \rightarrow K^i,\ i = 0\ si\ K^i \notin F_{\delta\phi} \tag{3.4}$$

$$\delta\phi(K^\alpha, K^b)_{\substack{b \geq \beta \\ K^b \in S}} \leq \delta\phi \rightarrow K^b \in S \tag{3.5}$$

$$\delta\phi(K^\alpha, K^b)_{\substack{b \geq \beta \\ K^b \in S}} > \delta\phi \rightarrow K^b \notin S \tag{3.6}$$

$$\delta\phi_I \rightarrow \delta\phi_I - \frac{\delta\phi_I}{2},\ \ \frac{\delta\phi_I}{2} > \delta\phi_I^{prec} \rightarrow (3.4),\ \frac{\delta\phi_I}{2} \leq \delta\phi_I^{prec} \rightarrow (3.11) \tag{3.7}$$

$$\delta\phi(K^\alpha, K^b)_{\substack{b \geq \beta \\ K^b \in S}} > \delta\phi \rightarrow K^b \notin S \tag{3.8}$$

$$\delta\phi_I \rightarrow \delta\phi_I + \frac{\delta\phi_I}{2},\ \ \frac{\delta\phi_I}{2} > \delta\phi_I^{prec} \rightarrow (3.4),\ \frac{\delta\phi_I}{2} \leq \delta\phi_I^{prec} \rightarrow (3.11) \tag{3.9}$$

$$\delta\phi(K^a, K^b)_{\alpha < a < b} \leq \delta\phi \rightarrow \alpha = a,\ \ \beta = b \rightarrow (3.4) \tag{3.10}$$

$$\delta\phi(K^a, K^b)_{\alpha < a < b} > \delta\phi \tag{3.11}$$

Le faisceau est tout d'abord calculé pour $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$ (3.1). α et β sont les bornes inférieurs des numéros des (N-1)-uplets créant un problème d'ambiguïté. Par la suite pour chaque $\delta\phi$ on teste si la droite paramétrée par le (N-1)-uplet K^i appartient au faisceau (3.4). Parmi ces droites on ne conserve que celles qui posent un problème d'ambiguïtés pour une valeur inférieur au $\delta\phi$ fixé (3.5)(3.6). Puis on décrémente le $\delta\phi$ (3.7) et on teste à nouveau les droites qui appartiennent au faisceau (3.4). On continue le processus jusqu'à ce qu'aucun (N-1)-uplet ne pose de problème d'ambiguïté. Cette fois on incrémente le $\delta\phi$ (3.9) et l'on teste à nouveau les droites qui appartiennent au faisceau (3.4). Lorsque l'on a finalement atteint la précision recherchée, la dernière valeur de $\delta\phi$ est celle de l'erreur de phase maximale admissible que peut accepter l'interféromètre considéré.

2 Algorithmes génétiques utilisés

Les algorithmes génétiques utilisés pour résoudre ce problème d'optimisation ont les caractéristiques suivantes:

- **Codage** réel.

- **Initialisation aléatoire** d'une population de taille P. La valeur de P sera généralement prise autour de 100.

- **Sélection** proportionnelle à la performance de l'individu. Elle se fait par application de la procédure de tirage de la roulette décrite au chapitre 1, avec une pression sélective pour la mise à l'échelle $\tau \sim 1.75$, valeur qui sera discutée dans la section 3.

- **Croisements** de couples avec une certaine probabilité $p_{cross} = 0.65$. Les trois types de recombinaisons appliqués sont ceux décrits chapitre 1 dans le cas d'un codage réel.

- **La mutation** est une gaussienne centrée sur le point devant muter avec une probabilité $p_{mut} = 0.075$ et σ de l'ordre de la différence des bornes de l'intervalle de recherche.

- **Test d'arrêt** lorsque après un certain nombre de générations (quelques centaines) aucune amélioration n'a pu être effectuée.

Ces paramètres sont réglés "au mieux" pour que soit trouvé l'optimum en un temps "le plus cours possible" tout en évitant une convergence vers un maximum local.

3 La mise à l'échelle

La mise à l'échelle est une étape fondamentale pour une bonne mise en œuvre d'un algorithme génétique. En effet à travers la pression sélective τ s'effectue un véritable contrôle de l'évolution de la population permettant de régler la vitesse de la convergence. L'utilisation de ce paramètre doit donc être considéré comme une nécessité et non comme une sophistication supplémentaire. Son omission peut avoir des conséquences significatives quant au processus de convergence. Une pression sélective trop faible peut rendre inutilement lente la phase de recherche. A l'inverse une pression sélective trop forte pour un problème présentant de nombreux maxima locaux aura pour conséquence une convergence prématurée sur un pic secondaire. Ces arguments montrent une interdépendance entre la valeur de la pression sélective et le problème d'optimisation considéré.
Il est important de noter que la pression sélective ne peut être réglée sans prendre en compte la taille de la population. En effet plus la population est de taille importante, plus grande est la diversité des individus et la pression sélective devra être augmentée pour favoriser le choix d'une direction de progression de l'algorithme. A l'inverse une population de trop petite taille demandera une diminution de la pression sélective pour éviter que certain individus n'envahissent la population et mènent à un maximum local.

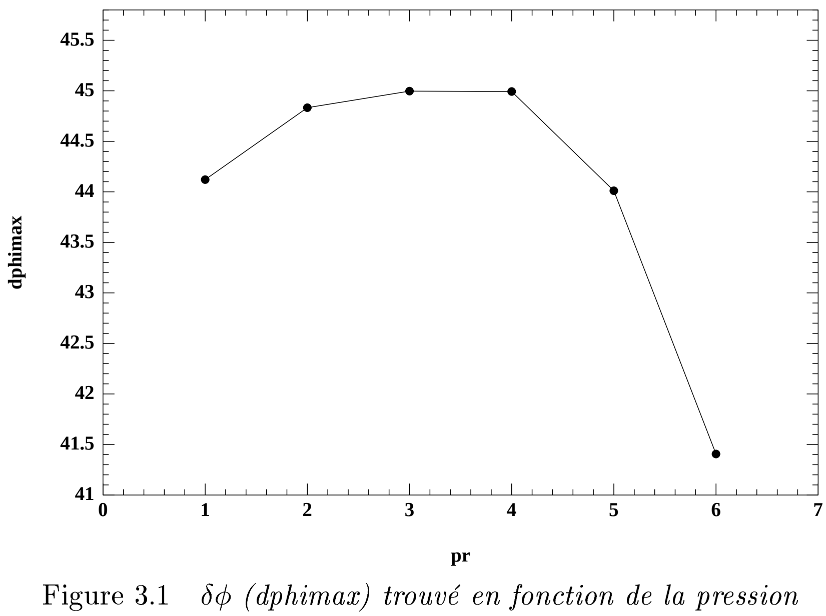


Figure 3.1 *$\delta\phi$ (dphimax) trouvé en fonction de la pression sélective (pr) pour une population ~ 200 individus*

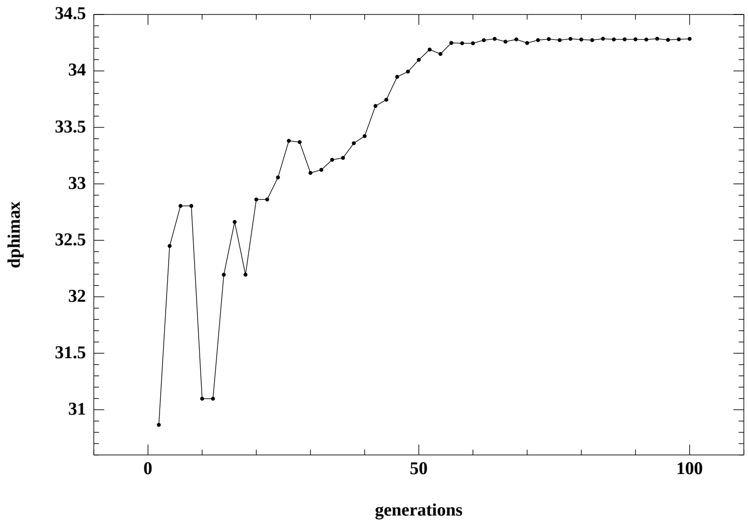


Figure 3.2 *Meilleur $\delta\phi$ en fonction des générations pour une évolution*

3.1 Un exemple d'évolution dans le cas de 3 antennes

Les Figures 3.3, 3.4, 3.5, montrent l'évolution d'une population à travers plusieurs générations pour converger finalement vers l'optimum. Le premier graphique donne la distribution des individus après le tirage aléatoire de la génération initiale G_0. Les graphiques suivant sont des photographies prises à des intervalles $G_{t'} = G_{t+10}$. On peut remarquer l'accumulation des points sur l'un des maxima globaux, l'application ayant été faite sans partage. L'application successive des opérateurs de Sélection, Croisement, Mutation permet de faire progresser la population vers le sommet du pic. Le dernier graphique montre la situation finale c'est à dire la phase de convergence proprement dite avec un certain nombre de points issus des dernières mutations. Il est important de noter que l'amélioration de la fitness (fonction performance) n'est pas régulière tout au long de l'évolution (Cf Figure 3.2). En effet le gain obtenu durant les premières générations est bien plus important qu'à la fin. Ceci peut être aisément expliqué par le fait que plus les points se rapprochent du sommet moins ils ont la possibilité d'améliorer la fitness. La diminution du gain sur la fonctionnelle peut donc être considéré comme un bon indicateur de proximité de l'optimum. C'est pourquoi il est préférable d'arrêter l'évolution lorsque aucune amélioration n'a pu être effectuée après un certain nombre de génération. Le cas suivant correspond aux données: $D = 100\ mm$, $Fre = 18\ Ghz$, $|\theta| \leq 90^o$, $N = 3$.

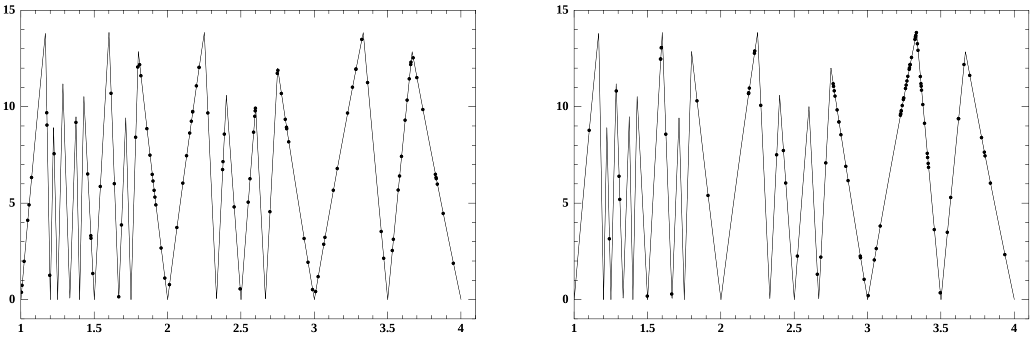


Figure 3.3 *Progression peu après l'initialisation aléatoire*

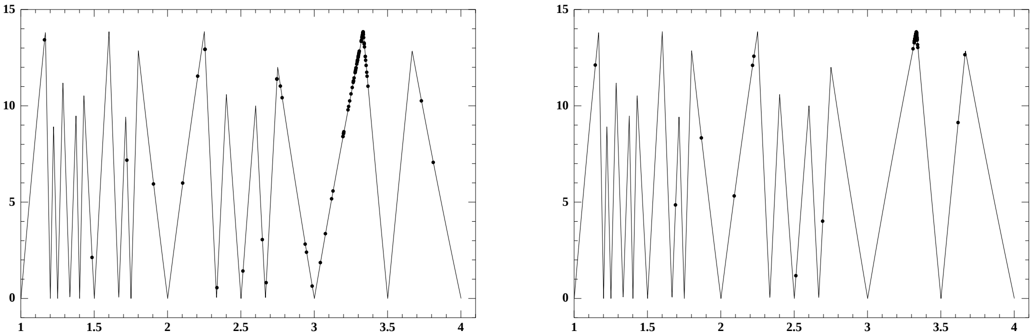


Figure 3.4 *Début du processus de convergence*

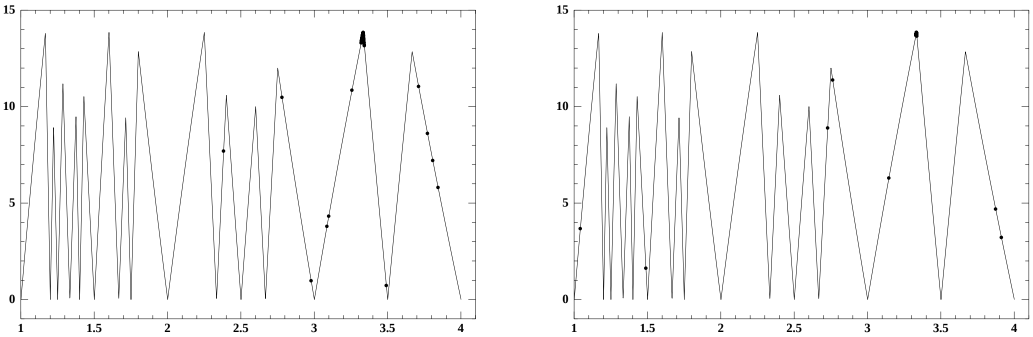


Figure 3.5 *Convergence de la population vers un optimum global*

3.2 Résultats généraux

Le tableau (Figure 3.6) donne les maxima pour des interféromètres de différentes longueur D, constitués par un certain nombre d'antennes N. Dans les cas où plusieurs maxima globaux étaient présents un seul a été trouvé puisque l'application a été faite sans partage. On peut remarquer que lorsque la longueur de l'interféromètre croît (ce qui implique un accroissement de la précision sur l'angle recherché) l'erreur de phase maximale admissible pour un nombre d'antennes fixées décroît. À l'inverse, pour une longueur fixée, l'augmentation du nombre d'antennes accroît l'erreur de phase maximale admissible. La distance de 1,6m correspond à une précision d'environ 0,1 degré sur l'angle de gisement. L'utilisation de seulement 4 antennes pour la levée des ambiguïtés n'autorise pas son utilisation dans un environnement électromagnétique sévère. Par contre avec 6 antennes les erreurs de phase sur les mesures peuvent atteindre 37,370 degrés. Dans ce tableau les b_i sont les rapports entre la distance d_1 et la distance d_{i+1}. Ces résultats ont été obtenus en respectant une distance minimale de 12.7 mm entre les antennes. Nous reviendrons sur cette contrainte dans la section 3.5.

N \ D	100	200	400	800	1600
4	b1=1.2 b2=3 δϕ=45	b1=3.2 b2=4 δϕ=34.285	b1=5.143 b2=6 δϕ=25.11	b1=9 b2=10.125 δϕ=18	b1=13 b2=14.083 δϕ=12.85
5	b1=1.989 b2=2.59 b3=3.605 δϕ=58.91	b1=2.507 b2=5.318 b3=7.495 δϕ=50.6	b1=2.382 b2=3.866 b3=4.439 δϕ=40.66	b1=2.129 b2=3.533 b3=7.585 δϕ=34.41	b1=3.051 b2=5.669 b3=7.422 δϕ=26.21
6	b1=1.201 b2=1.443 b3=1.763 b4=2.146 δϕ=65.28	b1=1.398 b2=2.736 b3=3.785 b4=5.472 δϕ=60	b1=1.786 b2=5.205 b3=6.168 b4=8.193 δϕ=50.8	b1=3 b2=4.546 b3=5.4 b4=7.659 δϕ=44.96	b1=2.255 b2=3.03 b3=4.017 b4=5.384 δϕ=37.79

Figure 3.6 *Résultats numériques pour* $N > 3$, $b_i = \frac{d_1}{d_{i+1}}$

3.3 Conséquence de l'augmentation du nombre d'antennes

La Figure 3.7 montre l'accroissement de l'erreur de phase maximale admissible en fonction du nombre d'antennes utilisées pour constituer un interféromètre de longueur D fixée. On peut remarquer principalement la diminution de la pente de la courbure qui indique qu'à partir d'un certain nombre d'antennes l'augmentation de $\delta\phi$ devient négligeable.

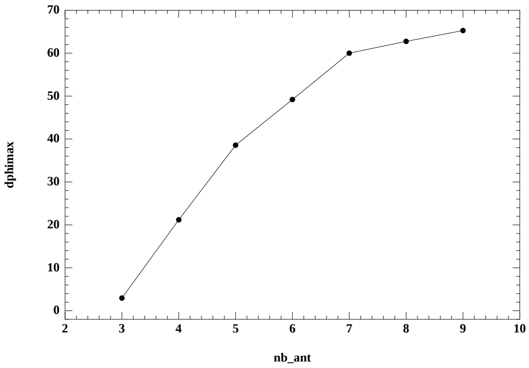


Figure 3.7 *$\delta\phi$ en fonction du nombre d'antennes*

3.4 Objectif de précision

Une autre manière de voir le problème est de fixer une précision que l'on veut atteindre sur l'angle de gisement. À partir de cette valeur, on calcule les longueurs exigées pour différentes valeurs d'erreur de phase maximale admissible. En effet l'augmentation de cette dernière influe sur l'erreur de l'angle et pour compenser ce phénomène, il faut augmenter la distance entre les deux antennes extrémales de l'appareil. Une fois ces distances calculées il reste à optimiser le positionnement des antennes, le nombre minimal de celles-ci étant choisi pour au moins dépasser l'erreur de phase maximale admissible fixée.

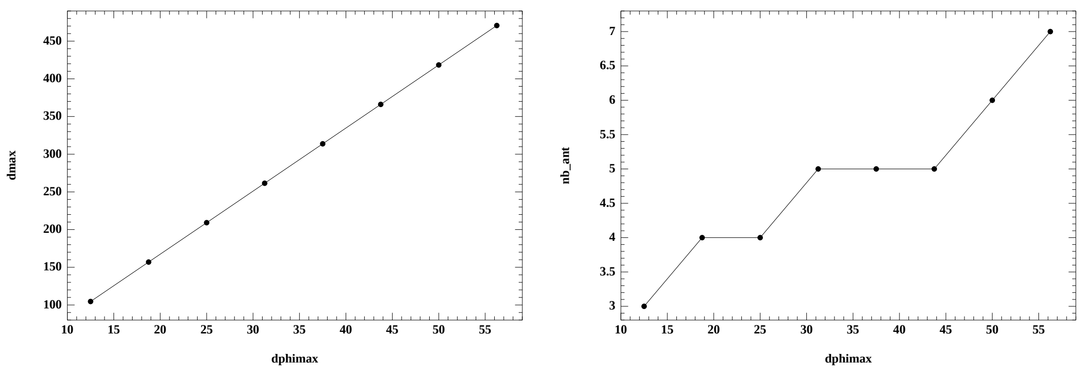


Figure 3.8 *Distances extrémales nécessaires pour une précision de 0.5 degré en fonction de l'erreur commise et nombre d'antennes nécessaires pour une erreur de phase fixée*

Le premier graphe de la Figure 3.8 montre les différentes distances à respecter en fonction des $\delta\phi$ pour obtenir un erreur sur l'angle de l'ordre de 0,5 degré. Le second graphe montre le nombre d'antennes qu'il est nécessaire d'utiliser pour que l'erreur de phase maximale admissible fixée soit dépassée.

3.5 Contrainte de la distance minimale d_{min} entre 2 antennes

Le positionnement des antennes doit respecter un paramètre important relatif à l'épaisseur des antennes. Il existe en fait une distance minimale admissible entre les antennes qui doit être respectée. Cette contrainte supplémentaire entraîne l'élimination d'un certain nombre de solutions. Lorsque la longueur de l'interféromètre est importante, cette condition devient négligeable pour un nombre fixé d'antennes. Le graphe 3.9 montre les différentes valeurs calculées de $\delta\phi$ pour différentes longueurs d'interféromètres (d_{max}), avec des distances minimales acceptables de 12,7 mm et 32 mm. On peut voir que lorsque la longueur de l'interféromètre est petite la distance minimale de 32 mm élimine un grand nombre de positions optimales.

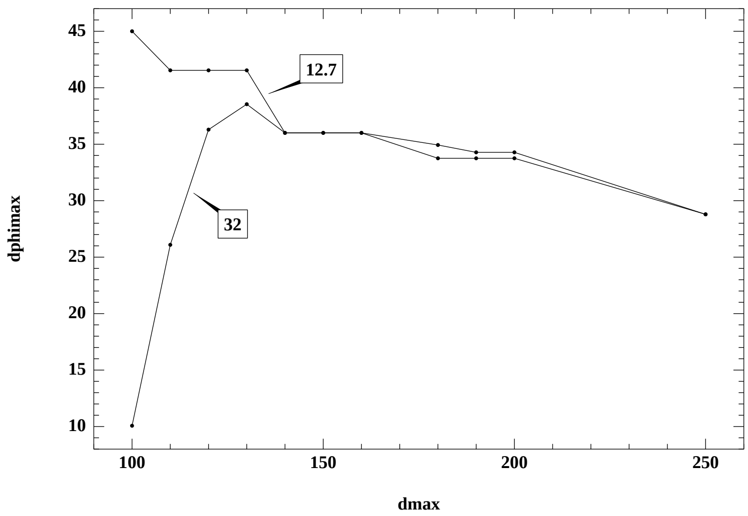


Figure 3.9 *Influence sur $\delta\phi$ de la distance minimale entre deux antennes*

3.6 Interféromètres de "faible précision"

Dans le cas où $\frac{D}{\lambda}\sin\theta_{max}$ est petit, l'expression de l'erreur de phase maximale admissible compte un terme supplémentaire. En effet, quand $\frac{D}{\lambda}\sin\theta_{max}$ est grand la seule manière de distinguer deux (N-1)-uplets de tours est de faire intervenir les couples (k_i, k_j). Par contre lorsque les demi-droites dans le diagramme des phases sont de faible longueur, il est également possible d'identifier le (N-1)-uplet correspondant aux mesures à partir des valeurs k_i prises isolément. Ceci a pour conséquence le gain d'une dimension et l'augmentation du $\delta\phi$. Cette situation peut être observée sur les graphes 3.10, 3.11. Lorsque $-15 \leq \theta \leq 15$, la longueur des demi-droites permet de les positionner à la fois "les une à côté des autres" mais aussi "les une derrière les autres". Lorsque la couverture angulaire de l'appareil augmente $-45 \leq \theta \leq 45$, on se rapproche du cas où $\frac{D}{\lambda}\sin\theta_{max}$ est grand et il n'est plus possible de placer les demi-droites "les unes derrière les autres". Comme en plus le nombre de (N-1)-uplets pouvant entraîner des ambiguïtés est plus important, cette perte d'une dimension a un effet négatif sur la valeur des erreurs de mesures que peut accepter l'interféromètre. Application pour les données suivantes:

$D = 4500\ mm,\ d_{min} = 750\ mm,\ Fre = 0.2\ Ghz,\ N = 3.$

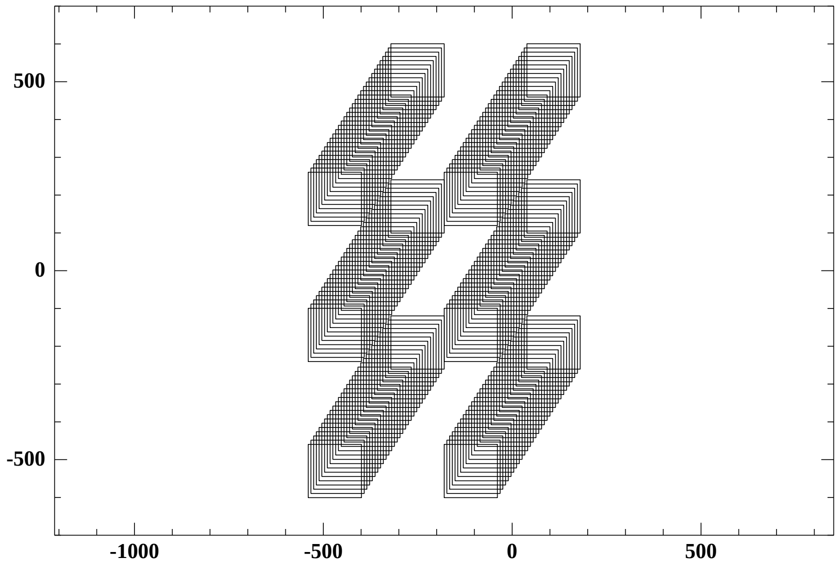


Figure 3.10 $-15 \leq \theta \leq 15,\ \ \delta\phi = 70.489$

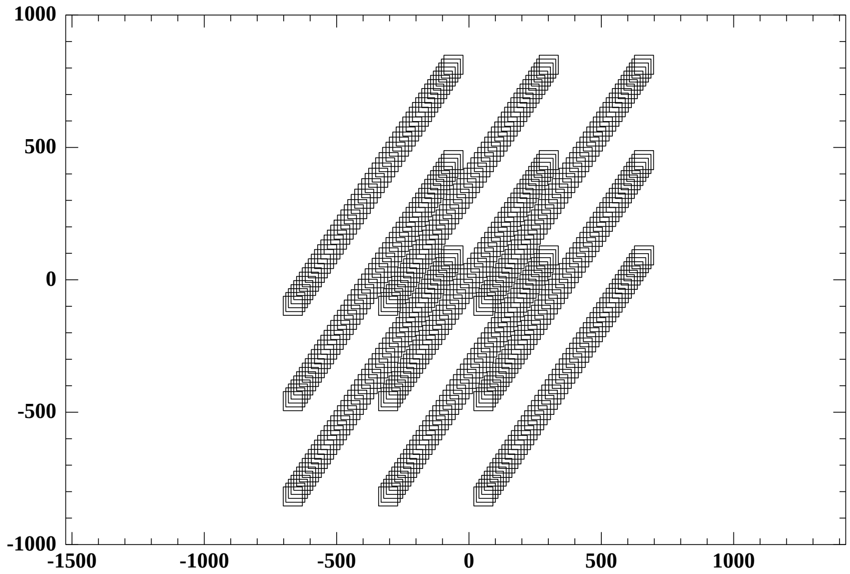


Figure 3.11 $-45 \leq \theta \leq 45, \quad \delta\phi = 36$

4 Obtention de plusieurs optima

Comme il a été montré au chapitre 1 section 3 les algorithmes génétiques ont la faculté de permettre l'obtention de plusieurs maxima globaux ou locaux. Ceci est particulièrement intéressant dans le cadre industriel car bien souvent la fonctionnelle à optimiser ne prend pas en compte toutes les variables du problème. La phase d'optimisation numérique a donc généralement pour objectif l'obtention d'un famille de solutions qui sera par la suite traitée en prenant en compte d'autres paramètres.

La Figure 3.12 est une "photographie" de la convergence vers 5 maxima globaux par application de la méthode de partage décrite chapitre 1 (section 3.2) dans le cas d'un interféromètre à trois antennes. La taille de la population est de 200 individus.

Le tableau (Figure 3.13) donne les valeurs de différents maxima globaux et locaux dans le cas d'un interféromètre à 4 antennes après application de l'algorithme "Énergie" décrit chapitre 1 section 3.4.

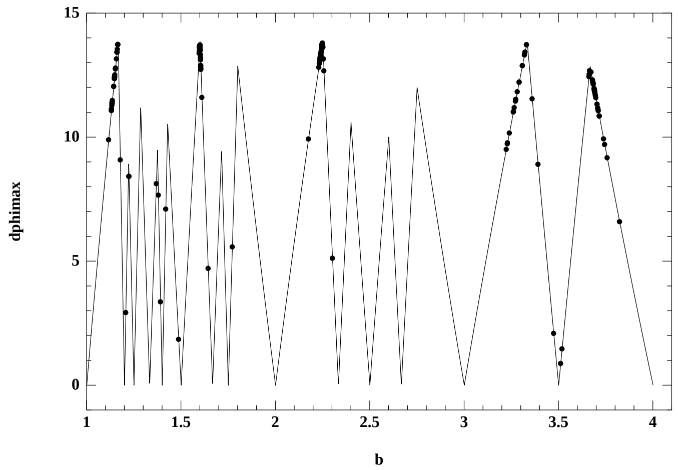


Figure 3.12 *Convergence vers plusieurs optima globaux, D=100mm, N=3,* $b = \frac{d_1}{d_2}$

120 mm			240 mm			360 mm		
b1=2.25	b2=3	δφ =41.538	b1=5	b2=6.237	δφ =29.999	b1=6.027	b2=7.12	δφ =24.835
b1=1.168	b2=3.55	δφ =41.18	b1=2.428	b2=2.829	δφ =29.998	b1=2.741	b2=6	δφ =24.775
b1=3.537	b2=5.466	δφ =39.668	b1=1.35	b2=4.981	δφ =29.486	b1=2.533	b2=2.768	δφ =23.768
b1=3	b2=4	δφ =36	b1=3.212	b2=3.761	δφ =28.311	b1=1.04	b2=7.092	δφ =23.023
b1=1.378	b2=1.679	δφ =35.125	b1=5.753	b2=7.78	δφ =26.693	b1=3.23	b2=3.585	δφ =22.924

Figure 3.13 *Résultats obtenus par l'algorithme "Énergie"*

Comparée au Sharing cette méthode présente principalement l'avantage d'être moins "gourmande" en taille de population. Le nombre de fois où la fonctionnelle doit être calculée est donc beaucoup moins grand ce qui est appréciable lorsque son temps de calcul est important.
Dans le cas N=3, le Sharing a montré la présence de plusieurs maxima globaux. Le chapitre suivant constitue une étude plus détaillée de ces optima à partir d'un certain nombre de résultats expérimentaux qui mèneront à une série d'équations permettant de les déterminer analytiquement.

Chapitre 4

Résultats analytiques pour N=3

Après avoir obtenu des résultats numériques pour différentes configurations du problème, il est intéressant de revenir sur le cas de l'interféromètre à trois antennes pour étudier les relations entre les optima lorsque la distance D varie.
Un certain nombre de résultats seront donc présentés lorsque la distance entre les deux antennes extrémales est de la forme $D = 2^a D_I,\ a \in \mathbb{N}$, D_I distance initiale fixée. Nous verrons alors que certains liens entre les différents optima apparaissent. A partir de ces liens, des relations analytiques pourront être établies pour trouver les optima directement en fonction des données.
À la fin de ce chapitre nous verrons quelques exemples d'applications de ces relations avant de présenter quelques graphiques pour conclure ce cas particulier de 3 antennes alignées.

1 Résultats expérimentaux

Dans toute la suite de ce chapitre les notations sont celles du chapitre 2; b est le rapport d_1/d_2. L'application de la méthode de partage pour $N = 3$ au chapitre précédent a montré qu'il peut exister plusieurs optima pour des données identiques. Cependant l'utilisation de cette méthode ne permet pas de garantir que tous les optima sont trouvés. En effet cela dépend fortement de la taille de la population ainsi que du facteur de partage σ. Afin d' éviter la perte de d'optima , il est donc préférable d'appliquer un algorithme génétique sur différents intervalles $[b_{min}, b_{max}]$, avec $\triangle = b_{max} - b_{min}$ suffisamment petit pour que l'on ne perde aucune valeur. La recherche ce ces optima pour différentes valeurs de D telles que $D = 2^a D_I,\ D_I = 12.5\ mm,\ a \leq 5$ a finalement eu pour conséquence la mise à jour d'une structure arborescente. Les optima représentés pour une distance D sont ceux présentant un lien avec les valeurs trouvées pour la distance $\frac{D}{2}$, puisque la première étape consistait à trouver des relations entre ces optima; les autres n'ont pas été représentés.

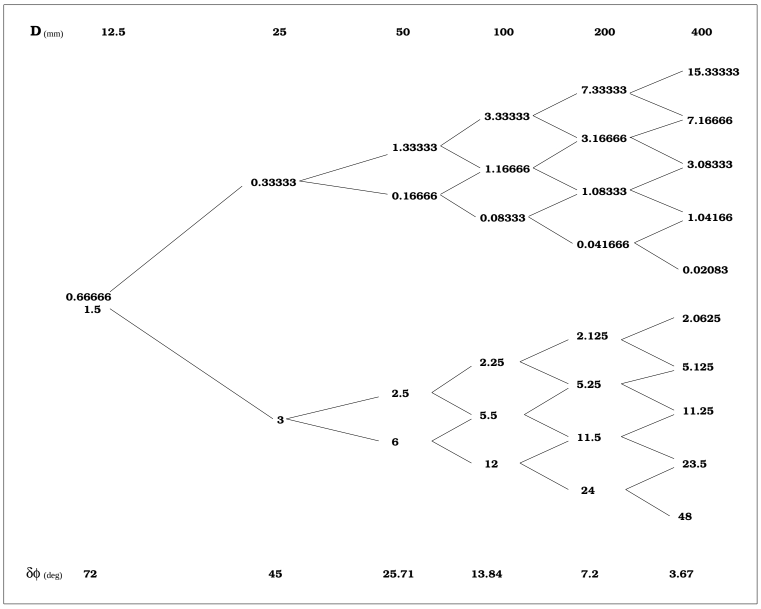


Figure 4.1 *Liens entre optima*

L'observation de cette structure arborescente montre qu'entre les valeurs optimales de b, il existe trois types de liens.
Si l'on note b^D la valeur de l'optimum b pour une distance D, et que on la décompose en partie entière b_N^D, et en partie réelle b_R^D, $b^D = b_N^D + b_R^D$:

L'on a les relations suivantes:

$$\begin{cases} b^D = b_N^{\frac{D}{2}} + \frac{b_R^{\frac{D}{2}}}{2} \\ b^D = 2b_N^{\frac{D}{2}} + 1 + b_R^{\frac{D}{2}} \\ b^D = 2b_N^{\frac{D}{2}} \end{cases}$$

Or $b^{\frac{D}{2}} = b_N^{\frac{D}{2}} + b_R^{\frac{D}{2}} \Rightarrow b_R^{\frac{D}{2}} = b^{\frac{D}{2}} - b_N^{\frac{D}{2}}$

Les relations sont alors de la forme:

$$\begin{cases} b^D = \frac{1}{2}(b^{\frac{D}{2}} + b_N^{\frac{D}{2}}) \\ b^D = b^{\frac{D}{2}} + b_N^{\frac{D}{2}} + 1 \\ b^D = 2b_N^{\frac{D}{2}} \end{cases}$$

Les relations précédentes lient les optima entre les différentes distances mais elles ne permettent pas de les déduire directement en fonction des données. En d'autres termes les optima pour une distance D ne peuvent être trouvés que si les optima pour la distance $\frac{D}{2}$ l'ont déjà été. L'idéal est donc de mettre à jour des relations entre les valeurs des optima et les données.
La première étape est de voir si il existe des relations entre les optima et les nombres de tours maximums k_{1max}, k_{2max} (dans le cas symétrique). Plusieurs observations expérimentales peuvent être faites:

- Pour chaque distance D la somme $k_{1max} + k_{2max}$ est constante.

- Quand la distance double la somme $k_{1max} + k_{2max}$ double également.

- L'erreur de phase maximale admissible est un diviseur de π: $\delta\phi = \frac{\pi}{a}$, $a \in \mathbb{N}$.

- L'erreur de phase maximale admissible $\delta\phi$ est une fonction de $k_{1max} + k_{2max}$, quand $k_{1max} + k_{2max} \geq 3$:

$$\delta\phi = \frac{\pi}{2(k_{1max} + k_{2max}) + 1}$$

- Les valeurs de b correspondant aux optima sont des rationnels, $b \in Q$.
  En fait les optima sont fonction de k_{1max} et k_{2max} (Cf Figure 4.2):

$$\begin{cases} b = \frac{2k_{1max}+1}{2k_{2max}}, & k_{2max} \neq 0 \\ b = 2k_{1max}, & k_{2max} = 0 \end{cases}$$

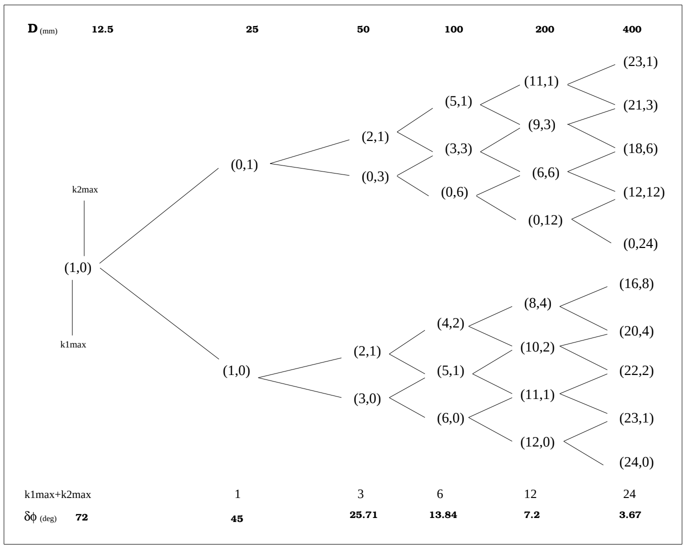


Figure 4.2 *Arborescence des nombres de tours maximums*

Dans le cas où l'on travaille avec une fréquence maximale de 18 GHz et une couverture angulaire telle que $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$, pour une distance $D > 25$, il existe donc plusieurs maxima globaux. Les valeurs de b correspondant à ces optima donnent naissance à un certain nombre de faisceaux. Les figures 4.3, 4.4, 4.5 représentent des faisceaux optimaux dans le cas D=100 mm, ceux des valeurs trouvées numériquement et représentées sur l'arbre de la Figure 4.1. En fait la valeur b=12 n'est pas un optimum global au sens mathématique. En effet on a en réalité non pas $b = 12$ et $\delta\phi = \frac{\pi}{13}$ mais $b \to 12$ par valeurs supérieures et $\delta\phi \to \frac{\pi}{13}$ par valeurs inférieures (Cf Résultats théoriques section 2.1, cas où $k_{2max} = 0$).

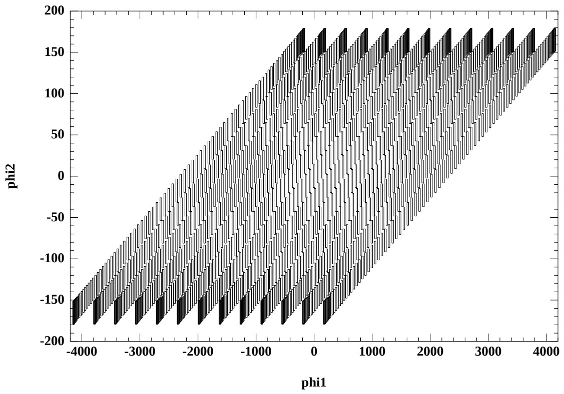


Figure 4.3 *faisceau pour $b \to 12$*

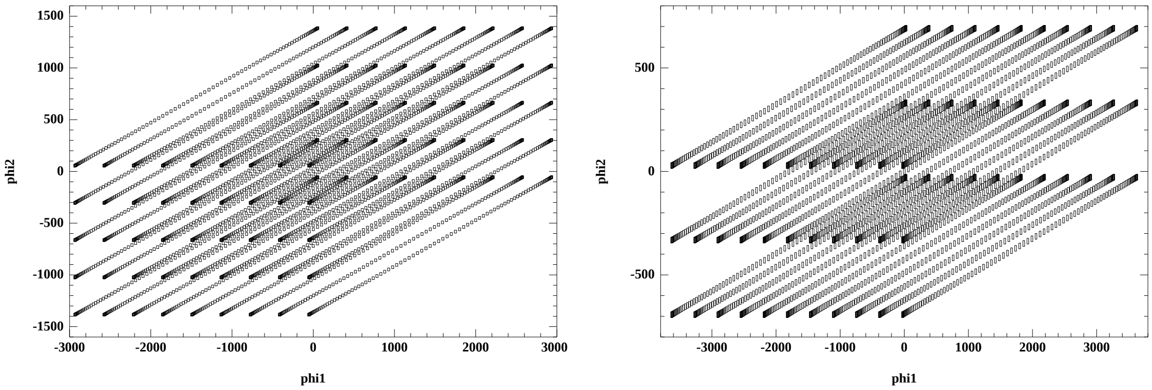


Figure 4.4 *faisceaux pour* $b = 2.25$ *et* $b = 5.5$

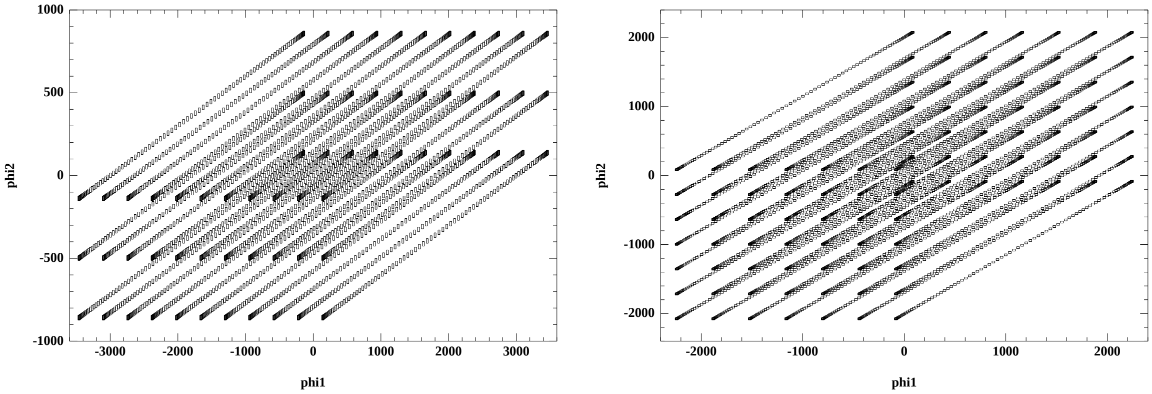


Figure 4.5 *faisceaux pour* $b = 3.33333$ *et* $b = 1.16666$

2 Résultats théoriques

À partir des observations qui ont été faites il a paru possible dans le cas symétrique d'aborder la résolution du problème théoriquement. Cette approche a finalement aboutie a un théorème qui permet d'exprimer les valeurs b des différents maxima globaux et la valeur de la fonctionnelle en ces points, directement en fonction des données D, λ_{min}, θ_{max}.

<u>Théorème</u>:

Soit $D,\ \lambda_{min},\ \theta_{max} \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} > 1$

Soit le problème d'optimisation suivant:

Trouver b tel que $\delta\phi$ soit maximal, où $\delta\phi$ est défini par:

$$\delta\phi = \pi \inf_{|\triangle k_i| \leq 2k_{imax}} \frac{|\triangle k_1 - b\triangle k_2|}{1+b}$$

$$k_{1max} = E[\frac{b}{b+1}\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi})]$$

$$k_{2max} = E[\frac{1}{b+1}\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi})]$$

Alors $\exists\ k_{1max}^{min},\ k_{1max}^{max}\ \in \mathbb{N}$ tels que les solutions sont de la forme:

$k_{1max}^{min} \leq k_{1max} \leq k_{1max}^{max}$

$$b = \frac{2k_{1max}+1}{E[2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}] - 2k_{1max}}$$

b=N/N' est une fraction irréductible.

Les valeurs 1/b étant également solutions. De plus la valeur de $\delta\phi$ est donnée par:

$$\delta\phi = \frac{\pi}{1+E[2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}]}$$

<u>Remarque</u>:

Pour certaines distances D, b et $\delta\phi$ ne peuvent être obtenus par application du théorème car le fait que b soit un rationnel n'est plus garanti. Il est toutefois à noter que ces intervalles de valeurs sont très petits.

2.1 Démonstration

- Cas 1: $k_{2max} = 0$

$$\delta\phi = \pi \inf_{0<|\triangle k_1|\leq 2k_{1max}} \frac{|\triangle k_1|}{1+b}$$

$\delta\phi$ est minimal lorsque $\triangle k_1 = 1 \Rightarrow \delta\phi = \frac{\pi}{1+b}$.

Pour maximiser $\delta\phi$ il faut minimiser b mais en respectant la condition $k_{2max} = 0$
Cette condition implique:

$$E[\frac{1}{b+1}\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi})] = 0$$

et donc:

$$\frac{1}{b+1}\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi}) < 1$$

En remplacent $\delta\phi$ par $\frac{\pi}{1+b}$ on trouve:

$$\frac{1}{b+1}\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{b+1}) < 1 \Rightarrow \frac{1}{b+1}(\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max} + \frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$$

Il vient:

$$b+1 > 2\frac{D}{\lambda min}\sin\theta_{max} + 1 \Rightarrow b > 2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}$$

Finalement:

$$b \to (2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max})_{+} \quad , \quad \delta\phi \to (\frac{\pi}{1+2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}})_{-}$$

- Cas 2: $k_{2max} \neq 0$

Cherchons b tel que $b = a_1 R_b$, $a_1 \in N$, $R_b \in Q$ et vérifiant pour $a_2 \in N^+$

$$(2k_{2max} - a_2)R_b = 1 - R_b \tag{4.1}$$

$$(2k_{2max} - a_2 + 1)a_1 R_b \geq 2k_{1max} + R_b \tag{4.2}$$

il vient:

$$R_b = \frac{1}{2k_{2max} + 1 - a_2} \Rightarrow \delta\phi = \frac{\pi R_b}{a_1 R_b + 1} = \frac{\pi}{2k_{2max} + 1 + a_1 - a_2}$$

Utilisant (4.2):

$$a_1 \geq 2k_{1max} + \frac{1}{2k_{2max} + 1 - a_2}$$

Avec $a_1 \in \mathbb{N}$, on trouve

$$a_1 = 2k_{1max} + 1$$

Ce qui implique:

$$b = \frac{2k_{1max} + 1}{2k_{2max} + 1 - a_2} \quad , \quad \delta\phi = \frac{\pi}{2(k_{1max} + k_{2max} + 1) - a_2}$$

Pour maximiser $\delta\phi$, a_2 doit être maximiser mais respectant les valeurs de k_{1max} et k_{2max}. Quand a_2 augmente, b augmente aussi, et donc k_{1max}.

a_2 doit donc vérifier:

$$\frac{bD \sin\theta_{max}}{\lambda_{min}(b+1)} + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi}) < k_{1max} + 1$$

et donc:

$$a_2 < 2(k_{1max} + k_{2max} + 1) - 2\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} - \frac{1}{2k_{1max} + 1}$$

$$\Rightarrow a_2 = 2(k_{1max} + k_{2max}) + 1 - E[2\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max} + \frac{1}{2k_{1max} + 1}]$$

Finalement:

$$k_{1max}^{min} \leq k_{1max} \leq k_{1max}^{max}$$

$$b = \frac{2k_{1max} + 1}{E[2\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max}] - 2k_{1max}} \quad , \quad \delta\phi = \frac{\pi}{1 + E[2\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max}]}$$

Remarque: Le rapport N/N' d'un optimum est irréductible:

Si N/N' est une fraction réductible c'est qu'il existe $N_1 \leq 2k_{1max}$, $N_2 \leq 2k_{2max} - 1$ tel que $b = \frac{N_1}{N_2}$. Or le numérateur de $\delta\phi$ est $|\triangle k_1 - b\triangle k_2|$. Si $b = \frac{N_1}{N_2}$ cela implique que $|\triangle k_1 - b\triangle k_2| = |\triangle k_1 - \frac{N_1}{N_2}\triangle k_2|$. Donc il existe une valeur $\triangle k_1 = N_1$, $\triangle k_2 = N_2$ tel que $|\triangle k_1 - b\triangle k_2| = 0$. Et donc si b est une fraction réductible $\delta\phi = 0$. En fait c'est que cette valeur est un optimum pour une distance $D^{'} < D$.

Remarque: Si b est un optimum alors 1/b est également un optimum.

On peut également exprimer b et $\delta\phi$ en fonction de k_{2max}. En effet en prenant la valeur inverse de b on ne fait que permuter les phases ϕ_1 et ϕ_2, mais comme c'est leur positions relatives qui rentre en compte, on se trouve toujours au niveau d'un optimum. On a alors:

$$k_{2max}^{min} \leq k_{2max} \leq k_{2max}^{max}$$

$$b = \frac{E[2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}] - 2k_{2max}}{2k_{2max}+1}, \quad \delta\phi = \frac{\pi}{1 + E[2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}]}$$

Concernant les valeurs k_{1max}^{min} et k_{1max}^{max} représentant les bornes supérieures et inférieurs de l'intervalle des k_{1max} qui donnent les différentes solutions b, elles proviennent des conditions suivantes, en posant $A = 2\frac{D}{\lambda_{min}}\sin\theta_{max}$:

$E[A + \frac{1}{2k_{1max}+1}] = E[A]$ et $b > 0$

La première condition donne la borne inférieure k_{1max}^{min} de l'intervalle:

$$k_{1max}^{min} = 1 + E[\frac{1}{2}(\frac{A - E[A]}{1 + E[A] - A})]$$

La seconde donne la borne supérieure k_{1max}^{max} de l'intervalle:

$$k_{1max}^{max} = E[\frac{1}{2}(E[A] - 1)]$$

3 Application du modèle

Les solutions du problème d'optimisation s'expriment donc en fonction des données:

Notant $A = 2\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max}$,

$$1 + E[\frac{1}{2}(\frac{A - E[A]}{1 + E[A] - A})] \leq \alpha \leq E[\frac{1}{2}(E[A] - 1)]$$

b=$\frac{2\alpha+1}{E[A]-2\alpha}$, b=N/N' fraction irréductible.

La valeur de la fonctionnelle en ces points est donnée par:

$$\delta\phi = \frac{\pi}{1 + E[A]}$$

Lorsque une valeur b est optimale pour une certaine distance D, elle le reste jusqu'à une distance D_{max} telle que:

$$D_{max} = \frac{\lambda_{min}}{2\sin\theta_{max}}(E[A] + 1 - \frac{1}{2\alpha + 1})$$

Application 1: $D = 500\ mm,\ Fre = 13\ Ghz,\ \theta_{max} = 60^o$

De ces données, on déduit $\lambda_{min} = 23,0769\ mm,\ A = 37,5278,\ E[A] = 37,\ \delta\phi = \frac{\pi}{38}$

$b^1 = \frac{19}{19}$ fraction réductible $\delta\phi = 0$

$b^2 = \frac{21}{17} = 1.2352941$ $D^2_{max} = 505.65733$

$b^3 = \frac{23}{15} = 1.5333333$ $D^3_{max} = 505.7125$

$b^4 = \frac{25}{13} = 1.9230769$ $D^4_{max} = 505.75885$

$b^5 = \frac{27}{11} = 2.4545455$ $D^5_{max} = 505.79832$

$b^6 = \frac{29}{9} = 3.2222222$ $D^6_{max} = 505.83235$

$b^7 = \frac{31}{7} = 4.4285714$ $D^7_{max} = 505.86199$

$b^8 = \frac{33}{5} = 6.6000000$ $D^8_{max} = 505.88804$

$b^9 = \frac{37}{1} = 37.000000$ $D^9_{max} = 505.93169$

Application 2: $D = 300\ mm,\ Fre = 18\ Ghz,\ \theta_{max} = 90^o$

De ces données, on déduit $\lambda_{min} = 16,6667\ mm,\ A = 36, E[A] = 36,\ \delta\phi = \frac{\pi}{37}$

$b^1 = \frac{36}{1} \to 36 \quad D^1_{max} \to 300$ $\quad b^{10} = \frac{19}{18} = 1.0555000 \quad D^{10}_{max} = 307.89474$

$b^2 = \frac{34}{3} = 11.333333 \quad D^2_{max} = 305.55555 \quad b^{11} = \frac{21}{16} = 1.3125000 \quad D^{11}_{max} = 307.93651$

$b^3 = \frac{32}{5} = 6.4000000 \quad D^3_{max} = 306.66667 \quad b^{12} = \frac{23}{14} = 1.6428571 \quad D^{12}_{max} = 307.97101$

$b^4 = \frac{30}{7} = 4.2857143 \quad D^4_{max} = 307.14286 \quad b^{13} = \frac{25}{12} = 2.0833333 \quad D^{13}_{max} = 308.00000$

$b^5 = \frac{28}{9} = 3.1111111 \quad D^5_{max} = 307.40741 \quad b^{14} = \frac{27}{10} = 2.7000000 \quad D^{14}_{max} = 308.02469$

$b^6 = \frac{26}{11} = 2.3636360 \quad D^6_{max} = 307.57576 \quad b^{15} = \frac{29}{8} = 3.6250000 \quad D^{15}_{max} = 308.04598$

$b^7 = \frac{24}{13} = 1.8461538 \quad D^7_{max} = 307.69231 \quad b^{16} = \frac{31}{6} = 5.1666666 \quad D^{16}_{max} = 308.06451$

$b^8 = \frac{22}{15} = 1.4666667 \quad D^8_{max} = 307.77777 \quad b^{17} = \frac{33}{4} = 8.2500000 \quad D^{17}_{max} = 308.08081$

$b^9 = \frac{20}{17} = 1.1764706 \quad D^9_{max} = 307.84314 \quad b^{18} = \frac{35}{2} = 17.500000 \quad D^{18}_{max} = 308.09524$

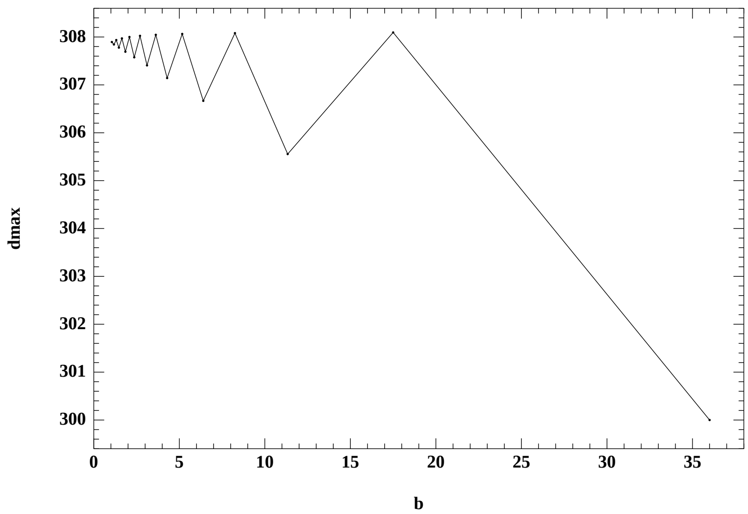


Figure 4.6 $\quad D^i_{max}$ *en fonction de* b^i, *application 2*

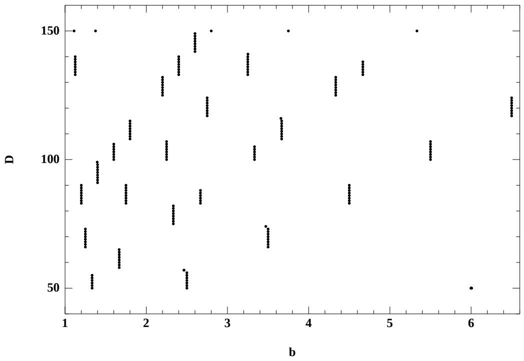


Figure 4.7 *Optima pour* $50 \leq D \leq 150$

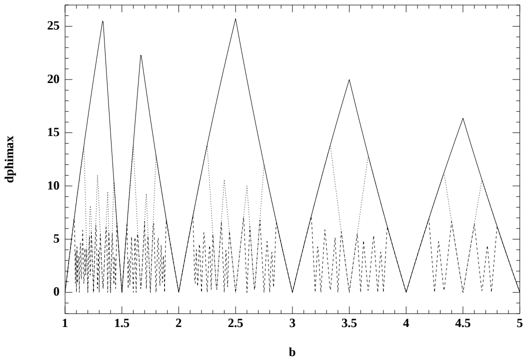


Figure 4.8 $\delta\phi = f(b), D = 50, 100, 200$

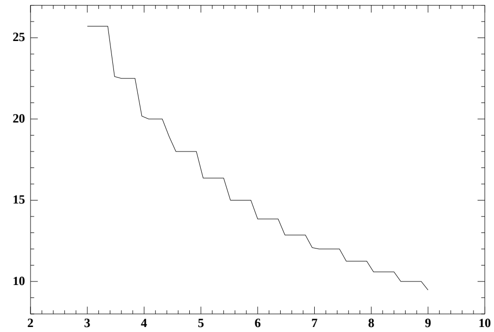


Figure 4.9 $\delta\phi = f(\frac{D}{\lambda_{min}} \sin\theta_{max})$ *à l'optimum*

Chapitre 5

L'interféromètre plan

L'étude d'interféromètres constitués d'antennes situées dans le plan de gisement a un intérêt pratique. En effet il n'est pas toujours facile de trouver un emplacement sur un porteur (avion par exemple) où le support soit rectiligne, surtout lorsque l'on travaille avec des appareils de haute précision comportant une grande distance entre les antennes extrêmales. Ce type d'interféromètre pose néanmoins des problèmes nouveaux liés à plusieurs facteurs. Tout d'abord la relation entre les phases n'est plus indépendante de l'angle de site comme c'était le cas précédemment. D'autre part l'erreur de phase maximale admissible n'est plus indépendante de l'angle de gisement. Elle ne peut plus être exprimée seulement en fonction de la position des antennes et des valeurs k_i^α. Ceci aura pour conséquence une augmentation significative des temps de calcul de la fonctionnelle. La représentation dans le diagramme des phases n'est plus un faisceau de droites mais de courbes. Dans la section 1 l'expression de l'erreur de phase maximale admissible est établie. La section 2 présente l'algorithme de calcul de $\delta\phi$ et les principales difficultés rencontrées. La section 3 montre l'influence de différents paramètres du problème sur la valeur du $\delta\phi$. Nous verrons que comme dans le cas où les antennes sont alignés il est possible de ne calculer que le cas où la valeur de l'angle de site est nulle qui représente en fait la situation la plus contraignante. Enfin une étude comparative entre différentes courbures sera faite permettant de mettre à jour les situations les plus favorables.
Dans toute la suite de ce chapitre le support de l'interféromètre est une courbe dans le plan du gisement d'équation:

$$y = \sqrt{(\frac{D}{2})^2 - (x - \frac{D}{2})^2}/PX$$

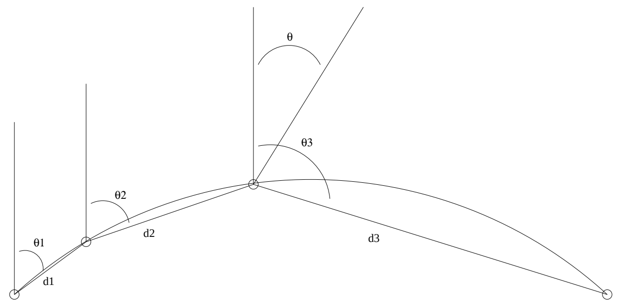


Figure 5.1 *interféromètre sur un support elliptique*

1 Modélisation du problème

Les déphasages théoriques ont pour expression:

$$\phi_i = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos s \cos(\theta - \theta_i)$$

Les déphasages mesurés:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos s \cos(\theta - \theta_i) - 2k_i\pi + \delta\phi_i$$

Les tours minimums et maximums permettant de passer des déphasages mesurés aux déphasages théoriques s'expriment par:

$$k_{imin} = E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \inf_{\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]} \cos(\theta - \theta_i) - \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})]$$
$$k_{imax} = E[\frac{d_i}{\lambda_{min}} \sup_{\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]} \cos(\theta - \theta_i) + \frac{1}{2}(1 + \frac{\delta\phi}{\pi})]$$

Les différences de phases mesurées appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on ne prend en compte que les (N-1)-uplets tel que les couples de tours respectent les relations suivantes:

I fixé, $1 \leq j \leq N-1$

$$|\frac{d_j}{\lambda}\cos s\cos(\theta_I \pm \arccos(\frac{\lambda}{2\pi d_I \cos s}(2k_I\pi - (\pi+\delta\phi))) - k_j| \leq \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi})$$

ou

$$|\frac{d_j}{\lambda}\cos s\cos(\theta_I \pm \arccos(\frac{\lambda}{2\pi d_I \cos s}(2k_I\pi + (\pi+\delta\phi))) - k_j| \leq \frac{1}{2}(1+\frac{\delta\phi}{\pi})$$

<u>Expression de l'erreur de phase maximale admissible</u>:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^a - \theta_i) - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a$$

$$\phi_{im} = \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b$$

Pour qu'il n'y ait pas ambiguïté if faut que :

$\forall\ |\delta\phi_i^a|, |\delta\phi_i^b| < \delta\phi_i^{ab},\ \ \forall\ \theta_{min} \leq \theta^a, \theta^b \leq \theta_{max}$

$$\frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^a - \theta_i) - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a \neq \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b$$

Ce qui implique:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^a - \theta_i) - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a > \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b \\ ou \\ \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^a - \theta_i) - 2k_i^a\pi + \delta\phi_i^a < \frac{2\pi}{\lambda}d_i\cos s\cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_i^b\pi + \delta\phi_i^b \end{cases}$$

On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\phi_i^{ab} < \frac{\pi}{\lambda} d_i \cos s(\cos(\theta^a - \theta_i) - \cos(\theta^b - \theta_i)) - \pi(k_i^a - k_i^b) \\ \\ ou \\ \\ \delta\phi_i^{ab} < \frac{\pi}{\lambda} d_i \cos s(\cos(\theta^b - \theta_i) - \cos(\theta^a - \theta_i)) - \pi(k_i^b - k_i^a) \end{array}\right.$$

Finalement:

$$\delta\phi_i^{ab} = \pi | \frac{d_i}{\lambda} cos(s)(\cos(\theta^a - \theta_i) - \cos(\theta^b - \theta_i)) - (k_i^a - k_i^b)|$$

Avec

$$\delta\phi^{ab} = \sup_{1 \leq i \leq N-1} \delta\phi_i^{ab}$$

L'erreur de phase maximale admissible a pour expression:

$$\delta\phi = \inf_{a \neq b} \delta\phi^{ab}$$

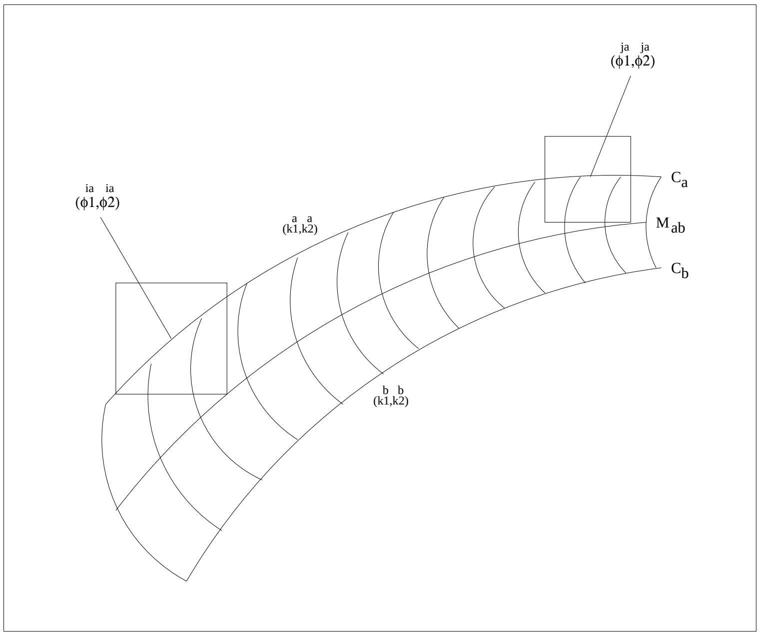


Figure 5.2 *Dépendance de $\delta\phi$ à l'égard de l'angle de gisement*

2 Calcul de $\delta\phi$

$$\delta\phi = \inf_{a \neq b} \delta\phi^{ab}$$

Les angles θ_i entre les antennes ont pour conséquence de rendre impossible l'élimination de l'angle de gisement dans l'expression du $\delta\phi$. Le calcul doit donc être fait en tenant compte de tous les couples possibles $(\theta^a, \theta^b) \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$. Cette approche qui serait la plus rigoureuse entraînerait des temps de calcul inadaptés pour l'application d'algorithmes génétiques. Au lieu de parcourir deux courbures paramétrées par K^a, K^b et de calculer le $\delta\phi^{ab}$ correspondant pour qu'il n'y ait aucune intersection entre les cubes erreurs, il est préférable de choisir un algorithme qui permet de n'en parcourir qu'une seule. La courbure paramétrée par K^a sera donc parcourue par un cube de demi-arête $2\delta\phi^{ab}$, sera diminué si celle paramétrée par K^b traverse le cube (coupe l'une des faces du cube), sera augmentée si cela n'est pas le cas. Cette approche permet en fait d'éliminer une variable ce qui a pour conséquence une diminution sensible des temps de calcul de la fitness (fonction performance). L'application sera faite pour le cas s=0 car nous verrons dans la section suivante que lorsque $|s| > 0$ alors $\delta\phi_{|s|>0} > \delta\phi_{s=0}$.

Numériquement les procédures à suivre sont les suivantes:

$$\phi_{im} = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos(\theta - \theta_i) - 2k_i^a \pm 2\delta\phi^{ab}$$

On pose

$$\phi_{im} = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_i^b = \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos(\theta - \theta_i) - 2k_i^a \pm 2\delta\phi^{ab}$$

Pour une valeur ϕ_{im} on déduit l'angle θ^b:

$$\theta^b = \theta_i \pm arccos(\cos(\theta - \theta_i) - \frac{\lambda}{d_i}((k_i^a - k_i^b) - \frac{\delta\phi^{ab}}{\pi}))$$

On calcul l'ensemble des déphasages correspondant à cet angle:

$$\phi_{jm} = \frac{2\pi}{\lambda} d_j \cos(\theta^b - \theta_i) - 2k_j^b$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos(\theta - \theta_i) - 2k_i^a - 2\delta\phi^{ab} \leq \phi_{im} \leq \frac{2\pi}{\lambda} d_i \cos(\theta - \theta_i) - 2k_i^a + 2\delta\phi^{ab}$$

Si il y a intersection $\rightarrow$ diminuer $\delta\phi^{ab}$.

Si il n'y a pas intersection $\rightarrow$ augmenter $\delta\phi^{ab}$.

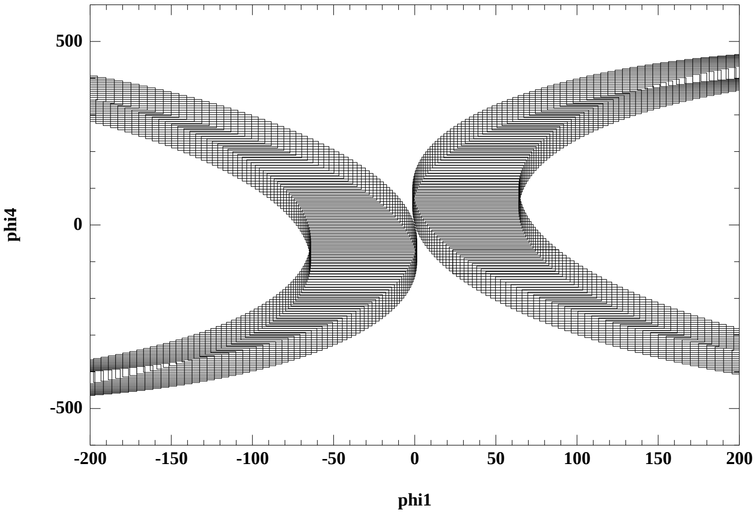


Figure 5.3 *$\delta\phi$ calculé par la méthode simplifiée*

La Figure 5.3 montre que cet algorithme donne une bonne approximation du $\delta\phi^{ab}$ réel. En effet on peut voir qu'il n'y a ni intersection entre les cubes ni espaces vides. C'est donc que la valeur $\delta\phi^{ab}$ représente bien l'erreur de phase maximale admissible pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté entre deux (N-1)-uplets (K^a, K^b).

3 Influence des paramètres

3.1 Influence de l'angle de site

L'on a vu que l'expression du $\delta\phi$ contient maintenant la valeur du site s. Il est donc important de se demander si le calcul doit être fait pour tous les sites $s \in [s_{min}, s_{max}]$ ou si il est possible de se limiter au cas où s=0. L'expérience numérique montre que le site nul est en fait la situation la plus pénalisante. En effet quand sa valeur s'éloigne de zéro la longueur de la courbure décroît ce qui est plus favorable pour les cubes erreurs. D'autre part c'est lorsque le site est nul que le nombre de (N-1)-uplets à identifier est le plus grand.

Le cas suivant (interféromètre à trois antennes) permet d'illustrer l'indépendance de $\delta\phi$ à l'égard de la couverture angulaire en site $s \in [s_{min}, s_{max}],\ s_{min} \leq 0 \leq s_{max}$.
Données du problème: $D = 50\ mm,\ d_{min} = 12.7\ mm,\ Fre = 12\ Ghz,\ |\theta| \leq 90,\ PX = 5$.

L'erreur maximale admissible pour le positionnement optimal est $\delta\phi = 6.51758$.

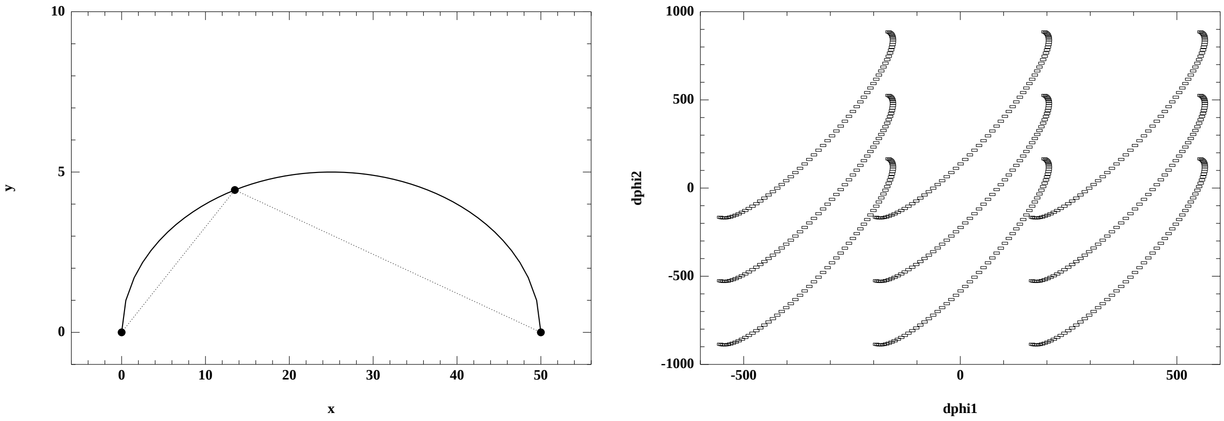


Figure 5.4 *Positionnement optimal des antennes et son faisceau dans le cas s=0*

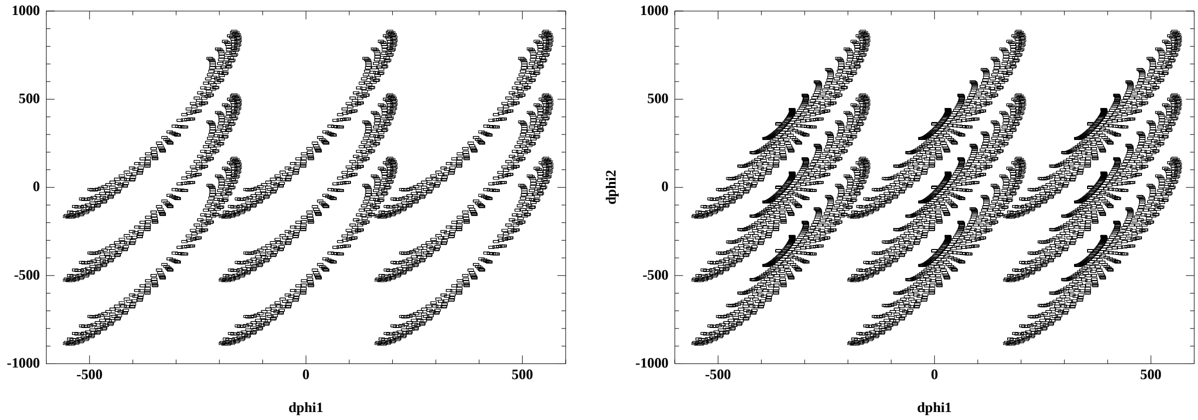


Figure 5.5 *Faisceaux dans les cas:* $|s| \leq 45$ *et* $|s| \leq 90$

3.2 Influence du nombre d'antennes

Comme dans le cas où le support est rectiligne l'augmentation du nombre d'antennes permet d'accroître l'erreur admissible. En effet le rapport entre la dimension de l'espace des phases et le nombre de courbures étant plus important, cela permet un espacement plus large. Les graphiques suivants montrent les positions optimales des antennes dans le cas d'un support de type "demi-cercle". Il est intéressant de noter la symétrie du positionnement des antennes dans le cas où leur nombre est paire.

Données: $D = 100\ mm,\ d_{min} = 12.7\ mm,\ Fre = 12\ Ghz,\ |\theta| \leq 90,\ PX = 1.$

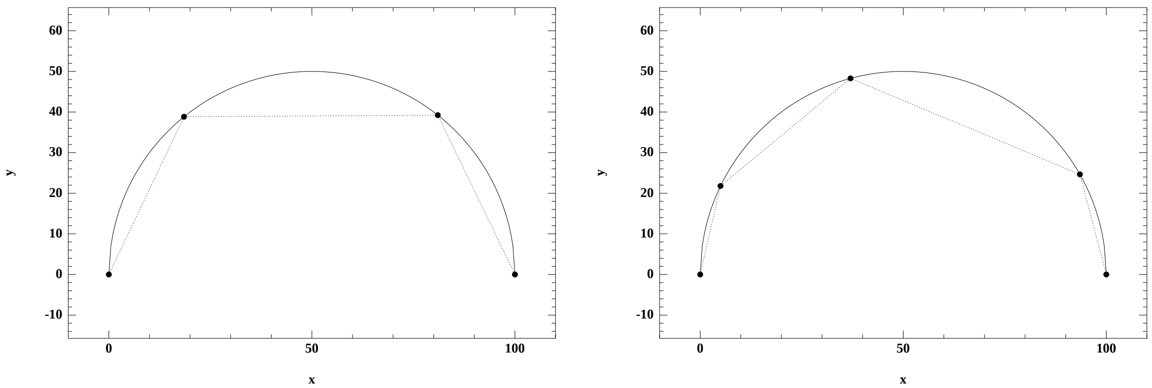


Figure 5.6 $N = 4,\ \delta\phi = 13.42$ *et* $N = 5,\ \delta\phi = 33.58$

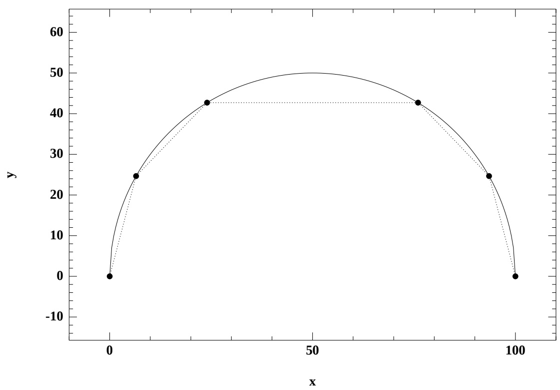


Figure 5.7 $N = 6,\ \delta\phi = 45.34$

3.3 Influence de la courbure du support

La courbure du support est contrairement au nombre d'antennes pénalisante pour l'erreur de phase maximale admissible. Plus le support a une courbure prononcée, plus grand devra être le nombre d'antennes pour atteindre une certaine valeur $\delta\phi$ fixée.
Pour une étude d'interféromètres sur un support circulaire on pourra consulter J.R.F Guy and D.E.N Davies [24].
La Figure 5.8 montre l'allure des valeurs de $\delta\phi$ en fonction de la courbure.

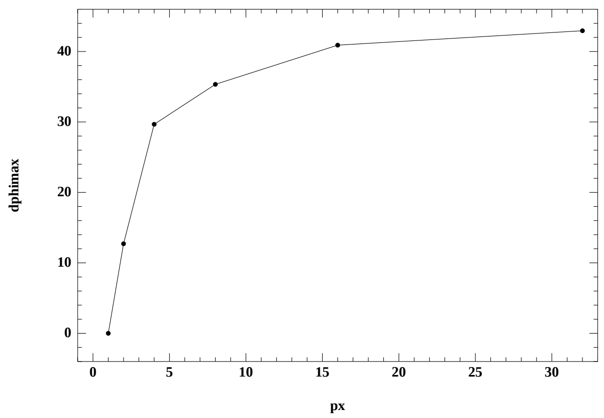


Figure 5.8 *Variation de $\delta\phi$ en fonction du facteur de courbure PX*

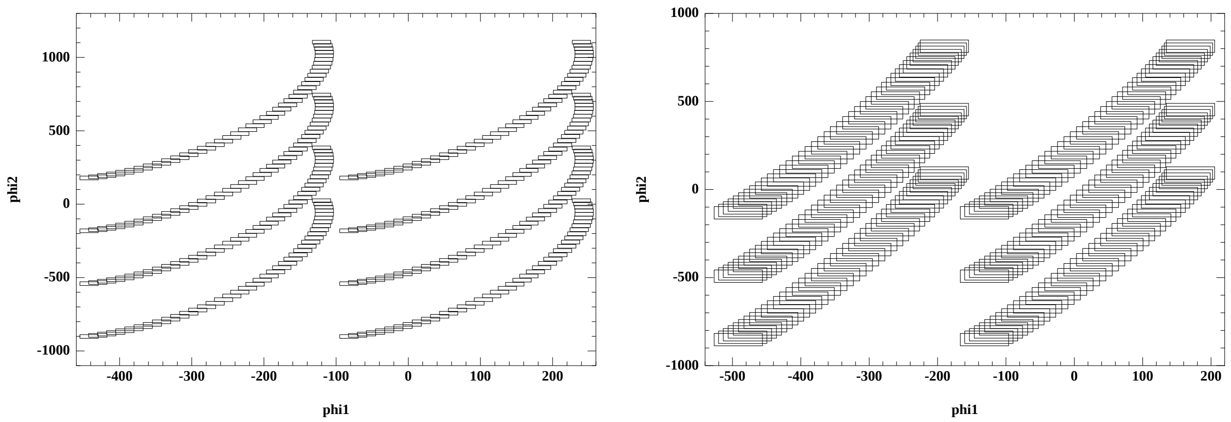


Figure 5.9 *Faisceaux optimaux pour PX=2 et PX=8*

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Les algorithmes génétiques peuvent donc être considérés comme une méthode intermédiaire entre une méthode “pas à pas” qui explore l'ensemble de l'espace de recherche et une méthode de gradient. Ce compromis entre deux approches extrêmes leur confère une robustesse toute particulière pour la résolution de problèmes d'optimisation relevant de certaines classes de fonctions notamment celles présentant de nombreux maxima locaux. Construits principalement autour de l'opérateur de Sélection, ces algorithmes font partis d'une famille au même titre que le recuit simulé et les algorithmes évolutionnistes. Ils ont tous comme point commun un processus stochastique pour la recherche de maxima. Les différences apparaîssent principalement à travers la structure des opérateurs et le nombre d'individus utilisés pour le parcourt de l'espace de recherche. Des comparaisons sont actuellement menées entre les différents représentants de ce groupe d'algorithmes pour mesurer leur efficacité respective ainsi que leur robustesse au regard des paramètres qui y sont associés. Les algorithmes génétiques sont donc caractéristiques d'une nouvelle approche pour la résolution de problèmes d'optimisation permettant aujourd'hui la recherche de maxima dans de nombreux cas considérés jusqu'alors comme hors d'atteinte.

Concernant l'application en interférométrie proprement dite, le cas du positionnement de N antennes dans l'espace est aujourd'hui en phase industrielle. L'intérêt de cette généralisation est de deux ordres. Cela permet de placer des interféromètres sur n'importe quel type de support facilitant l'embarcation d'appareils de contre-mesures même sur des structures avion complexes. Cela permet également de déterminer le couple (gisement, site), ce qui ne pouvait être fait avec précision dans le cas d'un positionnement coplanaire. La réalisation d'interféromètres dans l'espace peut se faire à partir de deux différentes approches. L'une consiste à positionner N antennes constituant un appareil unique permettant l'extraction du couple d'angles à partir de nappes dans le diagramme des phases. Le problème que pose ce type de réalisation est le temps nécessaire aux procédures de traitement. En effet pour déterminer le couple d'angles à partir des phases mesurées, il faut résoudre un système d'équations à deux inconnues, ce qui nécessite un grand nombre d'opérations et par conséquent un important temps de calcul. Afin de contourner cette difficulté majeure il est préférable de recourir à une seconde approche consistant à la réalisation de deux interféromètres à partir des N antennes disponibles. L'un a pour rôle la détermination de l'angle de site et à partir de cette information l'autre permet la détermination de l'angle de gisement. Pour connaître la valeur des angles avec un grande précision, l'interféromètre permettant de déterminer le site sera choisi avec une longue base verticale, celui permettant de connaître l'angle de gisement avec une longue base horizontale. Les antennes supplémentaires seront positionnées de manière optimale afin de maximiser l'erreur de phase admissible pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïtés dans la détermination des tours des deux appareils simultanément.

La généralisation de relations analytiques pour le cas où le nombre d'antennes est supérieur où égal à 4 n'a pu à ce jour donner lieu à des relations explicites. Les difficultés proviennent du fait que dans l'expression de la fonctionnelle les b_i apparaissent à travers des rapports $\frac{b_i}{b_j}$ ce qui ne permet pas de les traiter séparément. Les droites dans le diagramme des phases ne sont d'ailleurs pas équidistantes comme c'était le cas pour N=3. Si la mise en place ce ces équations a jusqu'à présent paru irréalisable il reste néanmoins quelques relations intéressantes pour le cas N=4. En effet il a été expérimentalement observé que pour certaines distances D les valeurs b_1, b_2 qui maximisent l'erreur de phase admissible correspondent à $b_1 \in \mathbb{N}, \quad b_2 \in \mathbb{R}$ et $\delta\phi = \frac{\pi}{1+b_1}$. D'autre part c'est pour ces distances que le nombre de maxima est le plus important. Il s'agit en fait d'intervalles car pour une valeur b_1 fixée il peut exister une infinité de valeurs $b_2 \in [b_{2min}, b_{2max}]$ qui maximisent $\delta\phi$. Les distances correspondant à ce cas de figure sont celles qui dans la pratique peuvent se révéler comme étant les plus intéressantes car elles offrent le plus grand choix de positionnements optimaux.

Plus généralement, les algorithmes génétiques sont particulièrement adaptés à de nombreuses applications liées à des problèmes d'optimisation dans le domaine de l'électromagnétisme. le partitionnement de réseaux en sous-réseaux dans le but d'optimiser l'efficacité de chaque partie en minimisant le nombre d'antennes utilisées est un cas intéressant d'optimisation multi-critères. La recherche des lois d'illumination (amplitudes,phases) pour l'optimisation de radars synthétiques, c'est à dire constitués à partir d'un réseau d'antennes, est aussi une application prometteuse pour les AG. En effet leur capacité de couplage avec des méthodes déterministes leur permettent de parcourir des espaces de recherche important tout en évitant une convergence prématurée vers un optimum local. Dans le cadre de cette application de “synthèse de diagrammes”, le problème revient plus précisément à optimiser la distribution d'amplitudes-phases pour que le système composé de N éléments rayonne une énergie déterminée dans une direction donnée. Il faut donc trouver la (ou les) meilleur(s) loi(s) d'illumination pour que le diagramme de l'énergie rayonnée soit compris dans un intervalle entre deux gabarits fixés, un délimitant une zone minimale, l'autre une zone maximale. L'utilisation directe des AG sur ce problème en prenant comme variables les amplitudes et les phases ne mènent pas à des résultats satisfaisant quand le nombre d'antennes est trop important ce qui est généralement le cas dans la pratique. Par contre son couplage avec une méthode déterministe appelée “méthode des projections” a donné lieu à des résultats bien meilleurs que l'utilisation de l'une ou l'autre méthode appliquée séparément. Ceci montre que loin d'être contraignant les AG ouvrent la voie à une grande diversité de combinaisons entre les méthodes déjà existantes et d'autres fondées sur une progression stochastique. Leur capacité à trouver plusieurs optima pas nécessairement absolus leur confère un plus non négligeable dans le cas où l'utilisation de méthodes mathématiques a un rôle de “première approche” pour un problème donné.

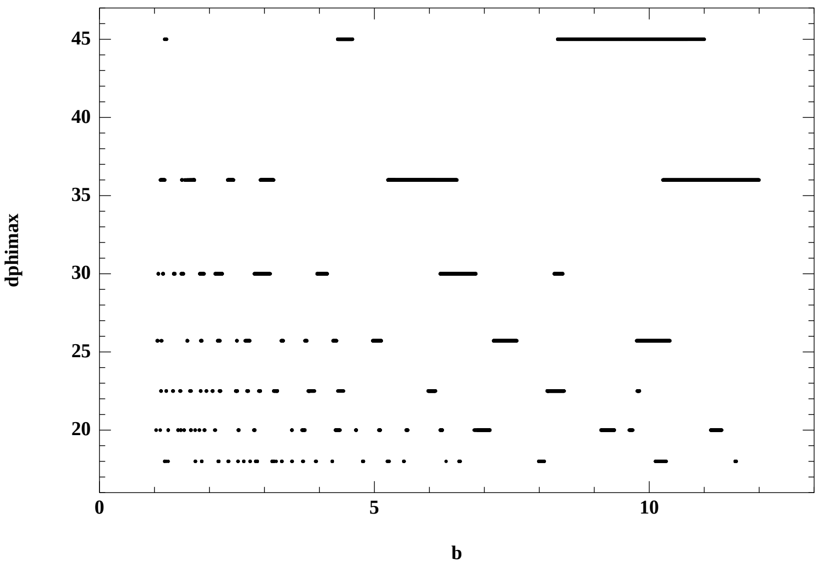
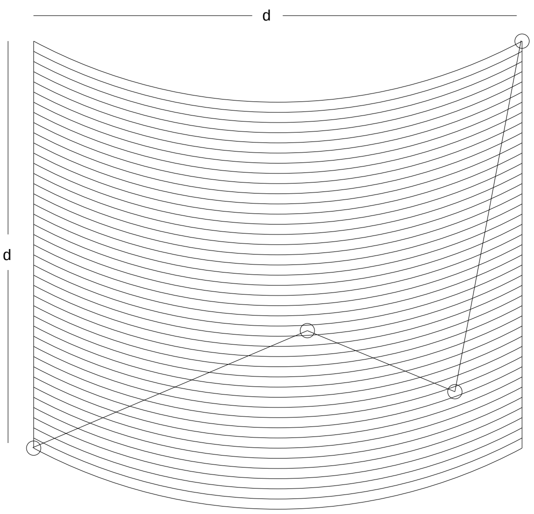


Figure 6.1 *optima pour b_1 fixé*



$$\varphi_i = 2\pi d_i/\lambda\,(\cos\delta_i \cos\delta \cos(\psi-\psi_i)+\sin\delta_i \sin\delta)$$

Figure 6.2 *Interféromètre dans l'espace*

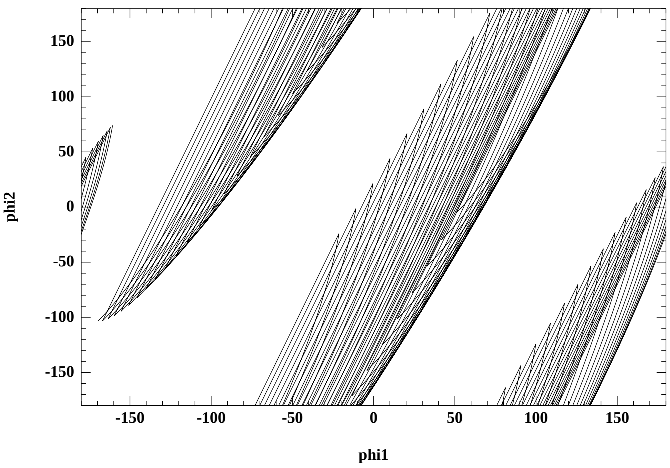


Figure 6.3 *diagramme de phases pour un positionnement spatial optimal*

Bibliographie

[1] T. Bäck, M. Schütz, and S. Khuri. A comparative study of a penalty function, a repair heuristic and stochastic operators with set covering problem. In J.-M. Alliot, E. Lutton, E. Ronald, M. Schoenauer, and D. Snyers, editors, *EA95*. Springer Verlag, 1995.

[2] J. E. Baker. Reducing biass and inefficiency in the selection algorithm. In J. J. Grefenstette, editor, *Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms*, pages 14–21. Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[3] D. Beasley, D.R. Bull, and R.R.Martin. An overview of genetic algorithms. 1: foundamentals. *Universally Computing*, 2, 1993.

[4] D.R & R.R Martin Beasley, D. Bull. A sequential niche technique for multimodal function optimisation. In *Evolutionary Computation*, pages 101–125, 1993.

[5] R. Cerf. *Une théorie asymptotique des algorithmes génétiques.* PhD thesis, Université de Montpellier II, March 1994.

[6] R. Cerf. An asymptotic theory of genetic algorithms. In J.-M. Alliot, E. Lutton, E. Ronald, M. Schoenauer, and D. Snyers, editors, *Artificial Evolution – EA95*, LNCS. Springer Verlag, 1996.

[7] A.R Cusdin. Performance of an interferometer angle-measuring receiver against non line-of-sight transmitters. In IEE, editor, *IEE proceedings*, pages 695–700, December 1983.

[8] L. Davis. Adapting operator probabilities in genetic algorithms. In J. D. Schaffer, editor, *Proceedings of the 3^{rd} International Conference on Genetic Algorithms*, pages 61–69, 1989.

[9] Lawrence Davis. *Handbook of Genetic Algorithms.* Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.

[10] W. Atmar D.B Fogel, L.J Fogel and G.B Fogel. Hierarchic methods of evolutionary programming. In L.J Fogel and Atmar, editors, *Poceedings of the* 1^{st} *Annual Conference on Evolutionary Programming*, pages 175–182, La Jolla, CA, 1992. Evolutionary Programming Society.

[11] K. A. DeJong and J. Sarma. On decentralizing selection algorithms. In L. J. Eshelman, editor, *Proceedings of the* 6^{th} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 17–23. Morgan Kaufmann, 1995.

[12] R.B Dybdal. Monopulse resolution of interferometric ambiguities. In IEEE, editor, *Transactions on Aerospace and Electronic Systems,AES-22*, pages 177–183, March 1986.

[13] L.J. Eshelman, R. Caruna, and J.D. Schaffer. Bias in crossover landscape. In J.D. Schaffer, editor, *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, pages 10–19, San Mateo, CA, 1989. Morgan Kaufmann.

[14] C.A. Foudas and P.M. Paradalos. *A Collection of Test Problems for Constrainted Global Optimization*, volume 455 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1987.

[15] D. E. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[16] D. E. Goldberg. Zen and the art of genetic algorithms. In J. D. Schaffer, editor, *Proceedings of the* 3^{rd} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 80–85, 1989.

[17] D. E. Goldberg. A theory of virtual alphabets. In Hans-Paul Schwefel and Reinhard Männer, editors, *Proceedings of the* 1^{st} *Parallel Problem Solving from Nature*, pages 13–22, 1990.

[18] D. E. Goldberg and J. Richardson. Genetic algorithms with sharing for multi-modal function optimization. In J. J. Grefenstette, editor, *Proceedings of the* 2^{nd} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 41–49. Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[19] David E. Goldberg, Kalyanmoy Deb, and Jeffrey Horn. Massive multimodality, deception, and genetic algorithms. Technical Report IlliGAL Report No 92005, University of Illinois, Urbana, 1992.

[20] D.E. Goldberg and K. Deb. A compararive analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In G.J.E. Rawlins, editor, *Foundations of Genetic Algorithms*, pages 69–93, San Mateo, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[21] J. J. Grefenstette. Optimization of control parameters for genetic algorithms. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-16, 1986.

[22] J. J. Grefenstette. Incorporating problem specific knowledge in genetic algorithms. In Davis L., editor, *Genetic Algorithms and Simulated Annealing*, pages 42–60. Morgan Kaufmann, 1987.

[23] J. J. Grefenstette. Virtual genetic algorithms: First results. Technical Report AIC-95-013, Navy Center for Applied Research in Artificial Intelligence, February 1995.

[24] J.R.F Guy and D.E.N Davies. Studies of the adcock direction finder in terms of phase-mode exitations around circular array. In *The radio and Electronic Engineer*, January 1983.

[25] J. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems.* University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.

[26] G. Liepins J. T. Richardson, M. R. Palmer and M. Hilliard. Some guidelines for genetic algorithms with penalty functions. In J. D. Schaffer, editor, *Proceedings of the* 3^{rd} *International Conference on Genetic Algorithms*, pages 191–197. Morgan Kaufmann, 1989.

[27] E. Jacobs and E.W Ralston. Ambiguity resolution in interferometry. In IEEE, editor, *Transactions on Aerospace and Electronic Systems,AES-17*, pages 766–780, November 1981.

[28] C. Z. Janikow and Z. Michalewicz. An experimental comparison of binary and floating point representations in genetic algorithms. In R. K. Belew and L. B. Booker, editors, *Proceedings of 4th International Conference on Genetic Algorithms*, pages 31–36. Morgan Kaufmann, July 1991.

[29] K.A De Jong. *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptative systems.* University of Michigan, Michigan, 1975.

[30] John R. Koza. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Natural Selection.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1992.

[31] John R. Koza. *Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs.* MIT Press, Cambridge Massachusetts, May 1994.

[32] W.H Kummer. Broad-band microwave electronically scanned direction finder. In IEEE, editor, *Transactions on Antennas Propagation,AP-31*, pages 18–26, January 1983.

[33] G.R Oeh L.B Bullock and J.J Sparagna. An anlysis of wiveband microwave monopulse direction-finding techniques. In IEEE, editor, *Transactions on Aerospace and Electronic Systems,AES-7*, pages 188–202, January 1971.

[34] S.W Mahfoud. Crowding and preselection revisited. In R. Männer & B. Manderick, editor, *Parrallel problem solving from nature*, pages 27–36, Elsevier, 1992.

[35] Z. Michalewicz. *Genetic algorithms + data structures = evolution programs.* Artificial Intelligence. Springer-Verlag, New York, 1992.

[36] Z. Michalewicz. Genetic algorithms, numerical optimization, and constraints handling. In L. Eshelman, editor, *Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms (ICGA95)*, San Francisco, CA., USA, jul 1995. Morgan Kaufmann.

[37] Z. Michalewicz. A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods. In R. K. Belew and L. B. Booker, editors, Proceedings of the 4th Annual Conference on Evolutionary Programming, Cambridge, MA, 1995. MIT Press.

[38] Z. Michalewicz and C. Z. Janikov. Handling constraints in genetic algorithms. In R. K. Belew and L. B. Booker, editors, *Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 151–157, San Mateo, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[39] N. J. Radcliffe and P. D. Surry. Fitness variance of formae and performance prediction. In D. Whitley and M. Vose, editors, *Foundations of Genetic Algorithms 3*, pages 51–72. Morgan Kaufmann, 1994.

[40] Nicolas J. Radcliffe. Formae analysis and random respectful recombination. In R. K. Belew and L.B. Booker, editors, *Proceedings of the Forth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 222–229, San Mateo, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[41] Nicolas J. Radcliffe. The algebra of genetic algorithms. Technical Report TR-9211, University of Edinburgh, Edinburgh Parallel Computing Center, 1992.

[42] Nicolas J. Radcliffe. Non-linear genetic representations. In R. Männer and B. Manderick, editors, *Parallel Problem Solving form Nature*, pages 259–268, North Holland(Amesterdam), 1992. Elsevier Science Publishers.

[43] I. Rechenberg. *Evolutionstrategie: Optimierung Technisher Systeme nach Prinzipien des Biologischen Evolution*. Fromman-Holzboog, Stuttgart, 1973.

[44] G. Rudolph. Convergence analysis of canonical genetic algorithm. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(1):96–101, 1994.

[45] G. Rudolph. Convergence of non-elitit strategies. In Z. Michalewicz, J. D. Schaffer, H.-P. Schwefel, D. B. Fogel, and H. Kitano, editors, *First IEEE International Conference on Evolutionary Computation*, pages 63–66. IEEE Press, 1994.

[46] C. D. Gelatt S. Kirkpatrick and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680, 1983.

[47] M. Schoenauer. Representations for evolutionary optimization and identification in structural mechanics. In J. Périaux and G. Winter, editors, *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences*. John Wiley, 1995.

[48] M. Schoenauer and S. Xanthakis. Constrained ga optimization. In S. Forrest, editor, *Prodeedings of Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 573–580, San Diego, California, 1993. Morgan Kaufmann.

[49] H.-P. Schwefel. *Numerical Optimization of Computer Models*. John Wiley & Sons, New-York, 1981 – 1995 (2nd ed.).

[50] M. Sebag and M. Schoenauer. Controling crossover through inductive learning. In Y. Davidor, H.-P. Schwefel, and R. Manner, editors, *Proceedings of the 3^{rd} Conference on Parallel Problems Solving from Nature*, pages 209–218. Springer-Verlag, LNCS 866, October 1994.

[51] W. M. Spears. Adapting crossover in evolutionary algorithms. In J. R. McDonnell, R. G. Reynolds, and D. B. Fogel, editors, *Proceedings of the 4^{th} Annual Conference on Evolutionary Programming*, pages 367–384. MIT Press, March 1995.

[52] G. Syswerda. Uniform crossover in genetic algorithms. In J.D. Schaffer, editor, *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, pages 2–9, San Mateo, CA, 1989. Morgan Kaufmann.

[53] D. Vanderbilt and S. G. Louie. A monte carlo simulated annealing approach to optimization over continuous variables. *Journal of Computational Physics*, 56:259–271, 1984.

[54] E.J Vertatschitsch. Impact of linear array geometry on direction-of-arrival estimation for a single source. In IEEE, editor, *Transactions on Antennas Propagation,vol 39*, pages 576–584, May 1991.

[55] M.D. Vose. Generalizing the notion of schema in genetic algorithms. *Artificial Intelligence*, 50(3):385–396, Aug 1991.

[56] L. Darrell Whitley. The genitor algorithm and selective pressure. In J.D. Schaffer, editor, *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, pages 434–439. Morgan Kaufmann, 1989.

[57] L. Darrell Whitley. An executable model of a simple genetic algorithm. In L. Darrell Whitley, editor, *Foundations of Genetic Algorithms,* 2, pages 45–62. Morgan Kaufmann, 1993.

[58] L. Darrell Whitley. A genetic algorithm tutorial. Technical Report TR CS-93-103, Colorado Stat University, Departement of Computer Science, 1993.

[59] W.M.Spears and K. DeJong. An analysis of multi-point crossover. In G.J.E. Rawlins, editor, *Foundations of Genetic Algorithms*, pages 301–315, San Mateo, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[60] W.M.Spears and K. DeJong. On the virtus of parametrical uniform crossover. In R. K. Belew and L.B. Booker, editors, *Proceedings of the Forth International Conference on Genetic Algorithms*, pages 230–236, San Mateo, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[61] W.M.Spears and K. DeJong. Crossover or mutation? In L. Darrell Whitley, editor, *Foundations of Genetic Algorithms,* 2, pages 221–237, San Mateo, CA, 1993. Morgan Kaufmann.

[62] A.H. Wright. Genetic algorithmes for real pararmeter optimization. In G. Rawlins, editor, *Fondations of Genetic Algorithmes*, pages 205–218, Los Altos, CA, 1991. Morgan Kaufmann.

[63] A. A. Zhigljavski, editor. *Theory of global random search.* Chap. 5, Kluwer Academic, 1991.

Annexe

Propriétés et calcul de $\delta\phi$ dans le cas symétrique $\theta_{max} = -\theta_{min}$.

Rappel des notations:

S_1 l'ensemble des (N-1)-uplets $(k_1^a, k_2^a, ..., k_{N-1}^a)$
S_2 l'ensemble des (N-1)-uplets $(-k_1^a, -k_2^a, ..., -k_{N-1}^a)$
$S = S_1 \cup S_2 \cup \{0\}$
$K^a = (k_1^a, k_2^a, ..., k_{N-1}^a)$

$$\delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b - k_i^a) - (k_j^b - k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\delta\phi^{0b} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}k_i^b - k_j^b|}{1 + \frac{d_j}{d_i}} \ , \ \delta\phi_+^{ab} = \pi \sup_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^b + k_i^a) - (k_j^b + k_j^a)|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\delta\phi = \inf_{\substack{K^a \in S \\ K^b \in S \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab}$$

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_2}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^a \in S_1 \\ b \neq a}} , \ \inf_{\substack{K^b \in S \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b})$$

Montrons que:

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a > 0}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a > 0}} \delta\phi_+^{ab}, \ \inf_{K^b \in S_1} \delta\phi^{0b})$$

<u>propriété 1</u>:

$$\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(-K^a, -K^b)$$

Démonstration:

$$\text{Soit } k_j^{b'} = -k_j^b, \ k_j^{a'} = -k_j^a$$

Montrons que $\delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \delta\phi^{ab}$

$$\delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^{b^{'}} - k_i^{a^{'}}) - (k_j^{b^{'}} - k_j^{a^{'}})|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\Rightarrow \delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|-(\frac{d_j}{d_i}(k_i^{b^{'}} - k_i^{a^{'}}) - (k_j^{b^{'}} - k_j^{a^{'}}))|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\Rightarrow \delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(-k_i^{b^{'}} + k_i^{a^{'}}) - (-k_j^{b^{'}} + k_j^{a^{'}})|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\Rightarrow \delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^{b} - k_i^{a}) - (k_j^{b} - k_j^{a})|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

Et finalement:

$$\delta\phi^{a^{'}b^{'}} = \delta\phi^{ab}$$

<u>propriété 2</u>:

$$\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(K^b, K^a)$$

Démonstration:

$$\delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^{b} - k_i^{a}) - (k_j^{b} - k_j^{a})|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\Rightarrow \delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|-(\frac{d_j}{d_i}(k_i^{b} - k_i^{a}) - (k_j^{b} - k_j^{a}))|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

$$\Rightarrow \delta\phi^{ab} = \pi \sup_{1\leq i<j\leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i}(k_i^{a} - k_i^{b}) - (k_j^{a} - k_j^{b}))|}{1 + \frac{d_j}{d_i}}$$

L'on a donc:

$$\delta\phi^{ab} = \delta\phi^{ba}$$

Montrons maintenant que:

$$\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab} = \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^b \in S_2 \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab}$$

$\delta\phi^{ab} = \delta\phi(K^a, K^b), \;\; K^a \in S_1, \; K^b \in S_1$

Or d'après la propriété 1, $\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(-K^a, -K^b)$

Posons $K^{a'} = -K^a, \; K^{b'} = -K^b$

On a alors $\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(K^{a'}, K^{b'}), \;\; K^a, K^b \in S_1, \;\; K^{a'}, K^{b'} \in S_2$

Par le même raisonnement on trouve:

$$\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_2}} \delta\phi^{ab} = \inf_{\substack{K^a \in S_2 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi^{ab}$$

En effet $\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(-K^a, -K^b) = \delta\phi(K^{a'}, K^{b'})$

$K^a \in S_1, \; K^b \in S_2, \;\; K^{a'} \in S_2, \; K^{b'} \in S_1$

D'autre part, d'après la définition de $\delta\phi_+^{ab}$

$\delta\phi^{ab} = \delta\phi(K^a, K^b), \;\; K^a \in S_1, \; K^b \in S_2$

En posant $K^{b'} = -K^b, \; K^{b'} \in S_1$

$\delta\phi(K^a, K^b) = \delta\phi(K^a, -K^{b'}) = \delta\phi_+(K^a, K^{b'}), \;\; K^a \in S_1, \; K^{b'} \in S_1$

Ce qui implique:

$$\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_2}} \delta\phi^{ab} = \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi_+^{ab}$$

L'on a également:

$$\inf_{\substack{K^b \in S \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b} = \inf(\inf_{K^b \in S_1} \delta\phi^{0b}, \ \inf_{K^b \in S_2} \delta\phi^{0b})$$

D'après la propriété 1:

$$\delta\phi^{0b} = \delta\phi(0, K^b) = \delta\phi(0, -K^b) = \delta\phi(0, K^{b'})$$

$$K^{b'} = -K^b, \ K^b \in S_2, \ K^{b'} \in S_1$$

On peut donc calculer $\delta\phi$ a partir du faisceau de droites paramétrées par les $K^a \in S_1$

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b \neq a}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi_+^{ab}, \ \inf_{\substack{K^b \in S_1 \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b})$$

L'on a aussi:

$$\inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1}} \delta\phi_+^{ab}, \ \inf_{\substack{K^b \in S_1 \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b}) = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b \neq a}} \delta\phi_+^{ab}, \ \inf_{\substack{K^b \in S_1 \\ b \neq 0}} \delta\phi^{0b})$$

En effet si $b = a$,

$$\delta\phi_+^{ab} = \delta\phi_+^{bb} = 2\pi \sup_{1 < i < j \leq N-1} \frac{|\frac{d_j}{d_i} k_i^b - k_j^b|}{1 + \frac{d_j}{d_i}} = 2\delta\phi^{0b}$$

$$\delta\phi_+^{bb} = 2\delta\phi^{0b}$$

Enfin d'après la propriété 2:

$$\delta\phi^{ab} = \delta\phi^{ba} \text{ et } \delta\phi_+^{ab} = \delta\phi_+^{ba}$$

Il vient finalement :

$$\delta\phi = \inf(\inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a}} \delta\phi^{ab}, \ \inf_{\substack{K^a \in S_1 \\ K^b \in S_1 \\ b > a}} \delta\phi_+^{ab}, \ \inf_{K^b \in S_1} \delta\phi^{0b})$$

[1] [5] [6] [46] [8] [9] [15] [19] [26] [18] [17] [14] [25] [38] [37] [28] [35] [62] [48] [63] [30] [31] [36] [50] [47] [16] [2] [3] [52] [11] [13] [59] [60] [61] [51] [40] [42] [41] [39] [55] [23] [21] [22] [56] [57] [58] [20] [44] [45] [49] [53] [27] [12] [24] [32] [54] [7] [33]