Tracé itératif de courbes cubiques

Soit une fonction *f* de degré 3, $f(t) = at^3+bt^2+ct+d$. On peut calculer efficacement les valeurs de $f(0)$, $f(\delta)$, ... $f(n\delta)$, en calculant les différences de premier, second et troisième ordre de *f* :

$$\Delta f(t) = f(t+\delta) - f(t) = 3a\delta t^2 + (3a\delta^2 + 2b\delta)\, t + a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta$$
$$\Delta^2 f(t) = \Delta f(t+\delta) - \Delta f(t) = 6a\delta^2\, t + 6a\delta^3 + 2b\delta^2$$
$$\Delta^3 f(t) = \Delta^2 f(t+\delta) - \Delta^2 f(t) = 6a\delta^3$$

Les différences de troisième ordre sont constantes pour une cubique, de telle sorte que le calcul peut se faire de façon itérative :

```
{ conditions initiales }
t = 0.0
f = d
Δf = aδ³ + bδ² + cδ
Δ²f = 6aδ³ + 2bδ²
Δ³f = 6aδ³
{ calcul itératif }
tantque t < 1.0
      t += δ; f += Δf; Δf += Δ²f; Δ²f += Δ³f
```

Mis à part les initialisations, la boucle principale ne fait que des additions.

On peut écrire les conditions initiales sous forme matricielle :

$$D = \begin{vmatrix} f_0 \\ \Delta f_0 \\ \Delta^2 f_0 \\ \Delta^3 f_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta^3 & \delta^2 & \delta & 0 \\ 6\delta^3 & 2\delta^2 & 0 & 0 \\ 6\delta^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = E(\delta)\, C$$

Pour le tracé de courbes, on a trois fonctions cubiques $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, et donc trois jeux de conditions intiales $D_x = E(\delta)\, C_x$, $D_y = E(\delta)\, C_y$, $D_z = E(\delta)\, C_z$, soit

$$D_x = \begin{vmatrix} x \\ \Delta x \\ \Delta^2 x \\ \Delta^3 x \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} y \\ \Delta y \\ \Delta^2 y \\ \Delta^3 y \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} z \\ \Delta z \\ \Delta^2 z \\ \Delta^3 z \end{vmatrix}$$

Le tracé de courbe se fait donc avec l'algorithme suivant :

```
P1 <- (x, y, z); δ = 1/n
pour i allant de 1 à n
      x += Δx; Δx += Δ²x; Δ²x += Δ³x
      y += Δy; Δy += Δ²y; Δ²y += Δ³y
      z += Δz; Δz += Δ²z; Δ²z += Δ³z
      P2 <- (x, y, z) ; line (P1, P2) ; P1 <- P2
```