Approximation d'Equilibres

Michel de Rougemont,
Université Paris II & LRI

Notions d'Approximation

1. Jeux matriciels

    - Nash approché,
    - Equilibres de faible support,

2. Jeux dynamiques

    - Jeu fictif
    - Rationalité limitée
    - Approximation de stratégies

Equilibres de Nash approchés

Une paire (x',y') est un équilibre approché si:

$$\forall x, \quad x.A.y' \leq x'.A.y' + \varepsilon$$

$$\forall y, \quad x'.B.y \leq x'.B.y' + \varepsilon$$

Lipton, Markakis, Mehta 2003: Pour tout équilibre de Nash (x*,y*) il existe un équilibre approché qui l'approxime, de support: $k = (Log\, n)/\varepsilon^2$

On a:

$$|x'.A.y' - x^*.A.y^*| \leq \varepsilon$$

$$|x'.B.y' - x^*.B.y^*| \leq \varepsilon$$

Référence: Playing large games using simple strategies, R. Lipton, E. Markakis, A. Mehta, ECOM 03

Existence d'Equilibres approchés

Existence d'équilibres approchés démontrée par la méthode probabiliste.

Prob [il existe un tel (x',y')] >0

Exemple : (3/5,2/5) (0,1/2,1/2) est Nash

(1,0) (0,1/3,2/3) est-il ε - Nash ?

Preuve: Soit k tirages de stratégies pures selon x*.
Soit x' la stratégie mixte uniforme obtenue.

$$\Phi_1 : \{ | x'.A.y' - x^*.A.y^* | \leq \varepsilon / 2 \}$$

$$\Phi_2 : \{ | x'.B.y' - x^*.B.y^* | \leq \varepsilon / 2 \}$$

$$\pi_{1,i} : \{ x^i.A.y' \leq x'.A.y' + \varepsilon \} \text{ pour } i = 1,\ldots,n$$

$$\pi_{2,j} : \{ x'.B.y^j \leq x'.B.y' + \varepsilon \} \text{ pour } j = 1,\ldots,n$$

$$\text{Good} = \Phi_1 \cap \Phi_2 \bigcap \pi_{1,i} \bigcap \pi_{2,j}$$

Existence d'Equilibres approchés

$$\text{On veut montrer : } \Pr[\text{Good}] > 0$$

$$\Pr[\neg \text{Good}] \leq \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

Borner chaque probabilité:

$$\text{Pour } \Phi_1 : \{ |x'.A.y' - x^*.A.y^*| \leq \varepsilon / 2 \}$$

$$\Phi_{1,a} : \{ |x'.A.y^* - x^*.A.y^*| \leq \varepsilon / 4 \}$$

$$\Phi_{1,b} : \{ |x'.A.y' - x'.A.y^*| \leq \varepsilon / 4 \}$$

$$\Phi_{1,b} \cap \Phi_{1,b} \subseteq \Phi_1$$

$x'.A.y^*$ est la somme de k variables

indépendantes de moyenne $x^*.A.y^*$

Equilibres approchés

$$\Phi_{1,a} : \left\{ \left| x'.A.y^* - x^*.A.y^* \right| \leq \varepsilon / 4 \right\}$$

$$\text{Prob}[\neg \Phi_{1,a}] \leq 2 . e^{-k \varepsilon^2 / 8}$$

Par Chernoff-Hoeffding:
Similairement pour

$\neg \Phi_{1,b}$ et donc $\text{Prob}[\neg \Phi_1] \leq 4 . e^{-k \varepsilon^2 / 8}$

$$\Pr[\neg \text{Good}] \leq \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

$$\Pr[\neg \text{Good}] \leq 8 . e^{-k \varepsilon^2 / 8} + 8 . n .(. e^{-k \varepsilon^2 / 8}) < 1$$

pour $k = (Log\, n) / \varepsilon^2$

Equilibre approché pour un jeu à 2 joueurs

Lipton 2003: il existe un algorithme quasi-polynomial pour trouver tous les équilibres approchés de support:

$$k = (Log\, n)/\varepsilon^2$$

Enumérer toutes possibilités et vérifier que c'est un équilibre approché.

Les stratégies pures peuvent être substituées aux (x*,y*).

Algorithme en : $O(n^{Log\, n})$

Questions:

- Peut-on approximer Brouwer avec la même idée?
- Peut-on approximer Kakutani?

Vérification approchée d'un équilibre

Il existe un algorithme quasi-polynomial pour trouver tous les équilibres approchés d'un équilibre connu.

Problème: l'équilibre n'est pas connu. Peut-on vérifier que l'équilibre satisfait une propriété simple?

Exemple: Existe-t-il un équilibre tel que $x_1 = 0.5$?

Problème NP-complet.
Peut-on le vérifier approximativement?

Approche des $\in\!-testeurs$

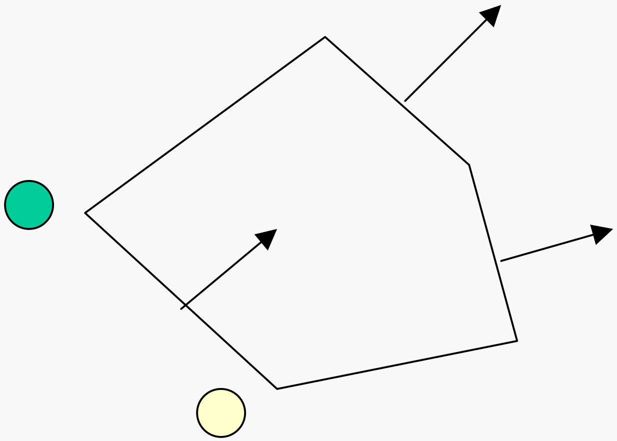
Equilibres de faible support
I. Barany, S. Vempala, A. Vetta, FOCS 2005

Pour des matrices aléatoires, il existe des équilibres de support 2.

Polytopes associés aux stratégies de support 2.

Concept: Face utile pour x

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



(x_2, y_2) est ε-Nash ssi ils sont utiles l'un pour l'autre

Jeux répétés et sous forme extensive

1. Jeux répétés
   - Gain=Somme des gains
   - Joueur fictif
   - Dynamique convergente ou divergente vers un NE.

2. Rationalité limitée
   - Apprentissage de stratégies
   - Test de Propriété

1. Joueur fictif associé à un jeu répété

	L	R
U	3,3	0,0
D	4,0	1,1

(D,R) est l'Equilibre de Nash.

Soit $\mu_1^i = (\#L, \#R), \mu_2^i = (\#U, \#D),$ i.e. des stats d'ordre 1, à l'étape i

$\mu_1^0 = (3,0),$ *i.e.* 3 L et 0 R, prédiction (1,0), action D

$\mu_2^0 = (1,2),,$ *i.e.* 1 U et 2 D, prédiction (1/3,2/3), action L

$$(1/3, 2/3)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 + 2/3.y_2$$

Maximum : $y_1 = 1$ et donc $\mu_1^1 = (4,0), \mu_2^1 = (1,3)$

Joueur fictif associé à un jeu répété (step 1)

	L	R
U	3,3	0,0
D	4,0	1,1

$\mu_1^1 = (4,0),\ i.e.$ 4 L et 0 R, prédiction (1,0), action D

$\mu_2^1 = (1,3),,\ i.e.$ 1 U et 3 D, prédiction (1/4,3/4), action L

$$(1/4, 3/4)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3/4 y_1 + 3/4.y_2$$

$Maximum : y_1 = 1$ (ou $y_2 = 1$) et donc $\mu_1^2 = (5,0), \mu_2^2 = (1,4)$

Joueur fictif associé à un jeu répété (step 2)

	L	R
U	3,3	0,0
D	4,0	1,1

$\mu_1^2 = (5,0),\ i.e.$ 5 L et 0 R, prédiction (1,0), action D

$\mu_2^2 = (1,4),,\ i.e.$ 1 U et 4 D, prédiction (1/5,4/5), action R

$$(1/5, 4/5)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3/5 y_1 + 4/5 . y_2$$

$Maximum : y_2 = 1$ et donc $\mu_1^3 = (5,1), \mu_2^3 = (1,5)$

Joueur fictif associé à un jeu répété (step 3)

	L	R
U	3,3	0,0
D	4,0	1,1

$\mu_1^3 = (5,1),\ i.e.$ 5 L et 1 R, prédiction (1,0), action D

$\mu_2^3 = (1,5),,\ i.e.$ 1 U et 5 D, prédiction (1/6,4/6), action R

$$(1/6, 4/6)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1/2y_1 + 2/3.y_2$$

$Maximum : y_2 = 1$ et donc $\mu_1^4 = (5,2), \mu_2^5 = (1,6),$ STABLE.

Joueur fictif dans le jeu RSP (Rock-Scissors-Paper)

	A	***B***	***C***
a	**0, 0**	1, 0	0, 1
b	**0, 1**	0, 0	1, 0
c	**1, 0**	0, 1	0, 0

Equilibre (1/3,1/3,1/3)
Shapley, 1964 montre que le joueur fictif ne converge pas!

Si (a,B) est la 1ère décision, alors on aura:
{(a,B)}, {(a,C)}, {(b,C)}, {(b,A)}, {(c,A)}, {(a,B)},..

Le nombre de répétitions augmente!

Dynamique FP

Convergence ou divergence?

J. Robinson, 1951: la dynamique converge pour les jeux à somme nulle.

Shamma, Arslan, 2004: convergence pour la version continue.

Rationalité limitée et Apprentissage

Chaque joueur a des ressources limitées pour définir sa stratégie:

Modèles principaux:

- Opposant suit une stratégie mixte (FP)
- Situation Bayésienne:

$$Stratégies: \pi_1, \ldots \pi_k.\ Belief\,(p_1 \ldots p_k)$$

3. Stratégie régulière déterministe
4. Stratégie régulière probabiliste

Approximation d'Automates

$A \equiv_{\varepsilon} B$ si tout mot $w \in L(A)$ (resp. $L(B)$) est ε-proche de $L(B)$ (resp. $L(A)$)

- Distance d'Edition: Insertions, Effacements, Modifications

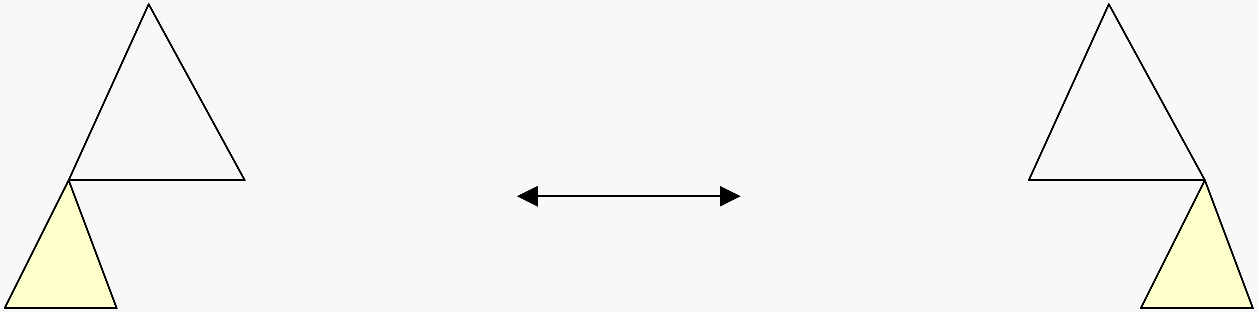
2. Distance Edition avec déplacements:

$$dist(W,W') \;\; ; \;\; dist(W,L) = Min_{W' \in L} \{dist(W,W')\}$$

011100001111001 1001

01110111100000011001

3. Distance Edition avec déplacements se généralise aux arbres ordonnés



Uniform Statistics

W=001010101110 longueur n, n-k+1 blocs de longueur k=1/ε

$$u.stat(W) = \begin{pmatrix} \#n_1 \\ .. \\ .. \\ \#n_{2^k} \end{pmatrix} . \frac{1}{n-k+1}$$

$\#n_1$ number of "00...0"
$\#n_2$ number of "00...1"
.. ..
.. ..
$\#n_{2^k}$ number of "11...1"

Pour k=2, n-k+1=11

$$u.stat(W) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} . \frac{1}{11} \approx u.stat(W+\varepsilon)$$

$$dist(W,W') \approx \left| u.stat(W) - u.stat(W') \right|,$$ lorsque les mots sont de longueur proche,

Distance de mots:

- NP-complet
- Testable, O(1): échantillonner N sous-mots de longueur k: Y(W) et Y(W')

Si |Y(w)-Y(w')| <ε. accepter, sinon rejeter

Tester for a regular language

Automate A définit L, et un polytope H dans l'espace des u.stats

$$u.stat(W) \approx \begin{pmatrix} 0.5-\varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 \\ 0.5-\varepsilon/2 \end{pmatrix} \approx u.stat(Z) \approx u.stat(Y)$$

$$\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \\ 0{,}25 \end{pmatrix} \approx u.stat(T)$$

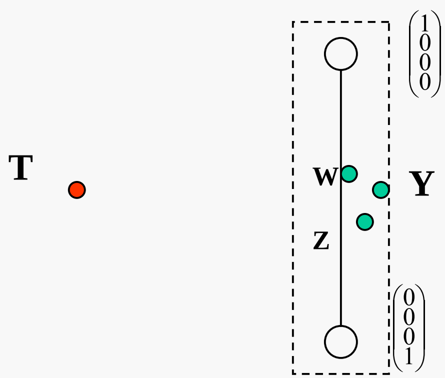
W: 0000000000111111111111

Y: 000001000011111101111

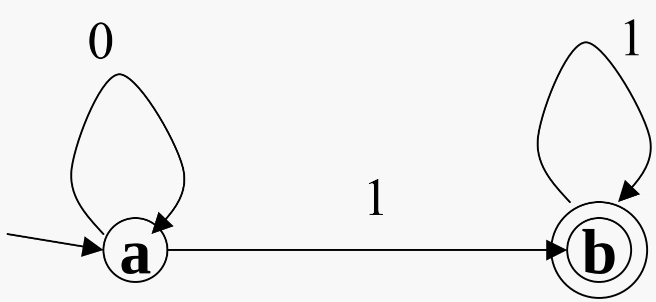
Z: 1111111111110000000000

T: 01001010001011000111010101

H



A



Testeur x dans L:

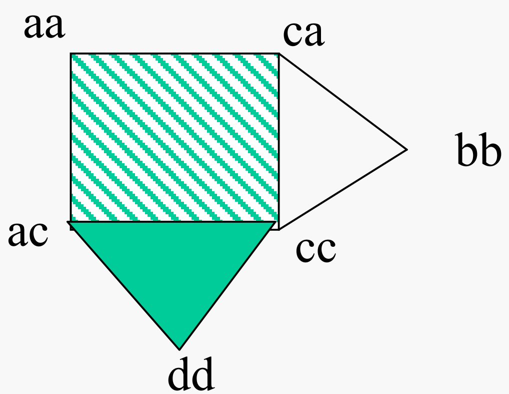
- Testable, O(1): calculer Y(W),
- Si dist(Y(w),H) <ε. accepter, sinon rejeter

Remarque: robustesse au bruit.

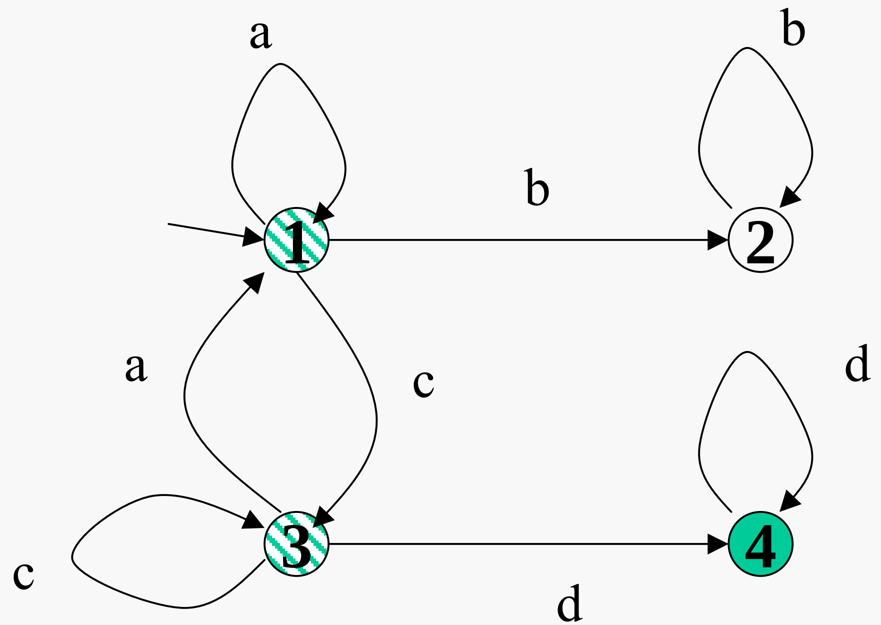
Pair (A,H)

Blocs, k=2, m=4, | Σ |=4, | Σ| ^{k} +1=17:

Boucles de taille 1 bloc: {(aa,ca:1),(bb,2),(cc,ac:3),(dd:4)}



H

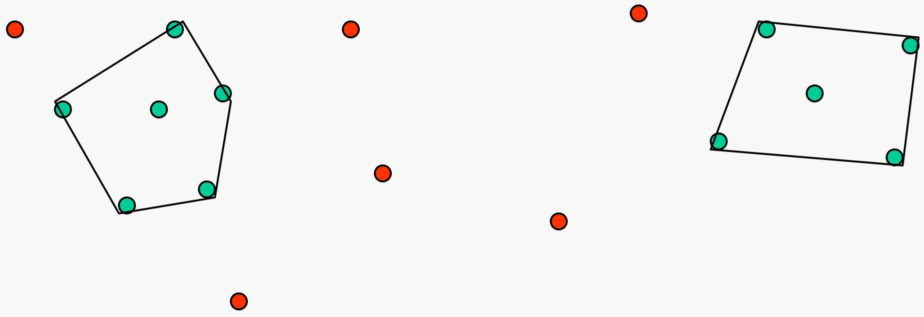


A

Apprentissage d’un automate

PAC Model: random words according to a distribution D:

U.stat representation:



Positive and Negative examples. (Valiant)

Learning algorithm: convex hulls of positive examples.

PAC learning

The regular language is a polytope for u.stat, i.e. a class of close automata.

Polytopes have a finite VC dimension. Hence they are PAC learnable.

For special distributions D, it may be ε-close.

Example: D is uniform and the polytopes are « large ».

Conclusion

1. Approximation pour jeux matriciels

2. Approximation pour jeux dynamiques

Recherche:

- Apprentissage PAC d'une FSM
- L'historique d'un jeu permet d'apprendre
- Meilleures réponses du joueur I à la prédiction
- Stabilité du jeu?