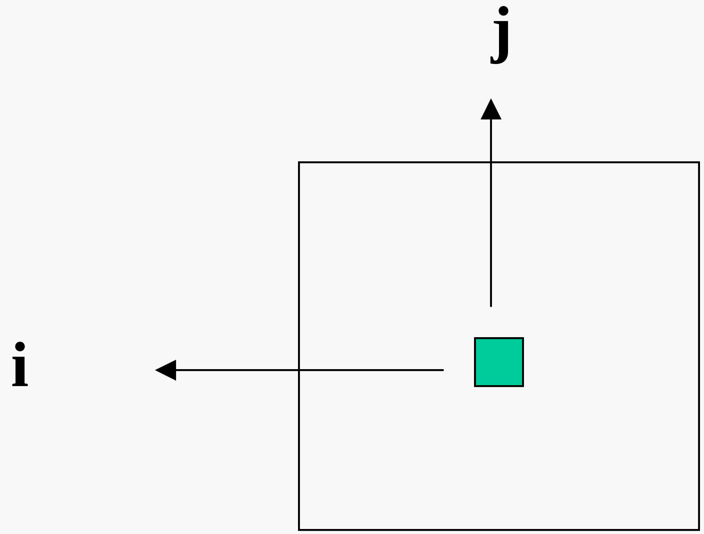
Autres équilibres

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II

Equilibres corrélés



Distribution sur les paires de stratégies pures:

On tire un (i,j) et donne i à I et j à II.

L’équilibre est corrélé lorsqu’ils n’ont pas intérêt à devier.

BoS : bataille des sexes

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

Deux équilibres de Nash:

(2,1) et (1,2)

Soit la distribution {0.5, 0.5} sur ces deux équilibres

Gain de I: 2.1/2 +1.1/2=3/2

Gain de II: 3/2

Distribution Ω sur (x,y)

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

On tire (i,j) avec proba. $x_{i,j}$ (loi Ω)

Conditionnellement sur le choix j,
L'espérance du choix i est maximum:

Soit $a_{i,j}$ le gain de I pour le choix (i,j).

$$\sum_j a_{i,j} x_{i,j} \geq \sum_j a_{k,j} x_{i,j}$$

Soit $b_{i,j}$ le gain de II pour le choix (i,j).

$$\sum_i b_{i,j} x_{i,j} \geq \sum_i b_{i,m} x_{i,j}$$

Equilibres corrélés sont faciles à calculer

La distribution {0.5, 0.5} sur les deux équilibres de Nash est un équilibre corrélé.

Remarque: tout équilibre de Nash est corrélé.

On peut trouver un équilibre corrélé par programmation linéaire. On peut aussi Maximiser

$$\sum_{i,j} a_{i,j} x_{i,j}$$

Jeux succincts

Dans un jeu à N joueurs, l'entrée est de taille k^N donc exponentielle.

Définition: un jeu succinct est : $G=(I,T,U)$

•Pour x dans I, T(x) est le type :

$(t_1, t_2, \ldots t_n)$ où t_i est le nombre de décisions de i

•Pour x dans I, $s=(s_1, s_2, \ldots s_n)$ où $t_i \geq s_i$

$$U(x,i,s)=u^i(s)$$

•T et U sont P calculables

Equilibres corrélés dans les jeux succincts

Si T(x) est borné dans |x|, alors G est de « type polynomial ».

Conjecture: les équilibres corrélés sont faciles à calculer pour les jeux succincts.

Théorème (Papadimitriou STOC 05): Si le jeu succinct admet *, alors il existe un schéma polynomial pour les équilibres corrélés.

*: il existe un algo. poly. qui calcule $E_\pi(u^p(s))$ pour une *distribution produit* π

Exemples de jeux succincts

Jeux symétriques: les décisions des joueurs sont identiques, l'utilité dépend du nombre de décisions similaires.

$$k^N \text{ remplacé par } N^k$$

$$\#C_1^{n_1}.C_2^{n_2}....C_k^{n_k} \leq N....N = N^k$$

Jeux de congestion/potentiel:

Jeux graphiques:

Exemples de jeux succincts

Jeux symétriques: les décisions des joueurs sont identiques, l'utilité dépend du nombre de décisions similaires.

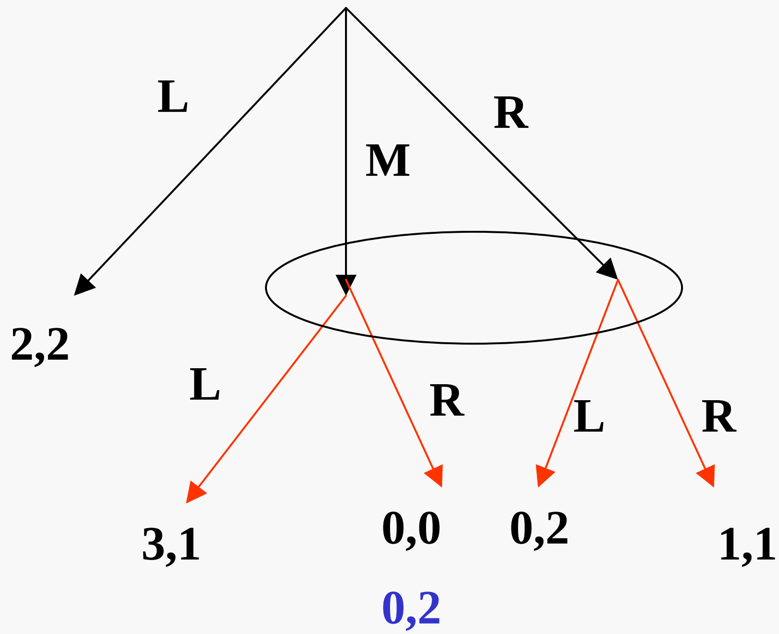
$$k^N \text{ remplacé par } N^k$$

$$\# C_1^{n_1} . C_2^{n_2} .... C_k^{n_k} \leq N....N = N^k$$

Jeux de congestion/potentiel:

Jeux graphiques:

Equilibres séquentiels



(L,R) Nash non parfait
(M,L) Nash parfait

B (Belief): distribution sur les historiques h conduisant à I.

Jeux extensifs à information incomplète

Définition: une situation (assesment) pour un jeu sous forme extensive à information incomplète est (S,B) :

S: stratégies des joueurs dans un jeu à information incomplète

B : distribution sur h pour chaque I, et h menant à I.

I: ensemble d'information

Définition: une situation est séquentiellement rationnelle si chaque joueur prend la décision qui maximise son espérance.

B (Belief): p pour M, 1-p sur R
Espérance de L pour II : 2p. +(1-p), versus p+2(1-p) pour R.

Jeux de Bayes (incomplets)

Définition: jeu extensif à information complète où chaque joueur a une information privée, son type:

$$\Theta_i = \{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k,\}$$

$$\Pr\left[\theta_{i,l} / \theta_{j,m}\right] \text{ connues}$$

Jeux de Bayes

Definition (Bayesian Game)

A **Bayesian game** is a strategic form game with incomplete information. It consists of:

- A set of players $N=\{1, \ldots, n\}$ for each $i \in N$
- An action set A_i, $(A = \times_{i \in N} A_i)$
- A type set Θ_i, $(\Theta = \times_{i \in N} \Theta_i)$
- A probability function, $p_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(\Theta_{-i})$
- A payoff function, $u_i : A \times \Theta \rightarrow \mathbf{R}$

- The function p_i is what player i believes about the types of the other players
- Payoff is determined by outcome A and type Θ

Stratégies

Definition

Bayesian game $(N, \{A_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ is **finite** if N, A_i, and Θ_i are all finite

Definition(pure strategy, mixed strategy)

Given a Bayesian Game $(N, \{A_i\}_{i\in N}, \{\Theta_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$,
A **pure strategy** for player i is a function which maps player i's type into its action set

$$a_i : \Theta_i \to A_i$$

A **mixed strategy** for player i is

$$\alpha_i : \Theta_i \to \Delta(A_i) : \theta_i \to \alpha_i(.\,|\,\theta_i)$$

Equilibres de Bayes

Definition(Bayesian Equilibrium)

A **Bayesian equilibrium** of a Bayesian game is a mixed strategy profile $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$, such that for every player i∈N and every type $\theta_i \in \Theta_i$, we have

$$\alpha_i(.|\theta_i) \in \arg\max_{\gamma \in \Delta(A_i)} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i} | \theta_i) \sum_{a \in A} \{ \prod_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_j(a_j | \theta_j) \} \gamma(a_i) u_i(a, \theta)$$

- Bayesian equilibrium is one of the mixed strategy profiles which maximize the each players' expected payoffs for each type.

Equilibres de Bayes

Remark

- This equilibrium is the solution of the Bayesian game. This equilibrium means the best response to each player's belief about the other player's mixed strategy.

-In the definition of Bayesian equilibrium, we need to specify strategies for each type of a player, even if in the actual game that is played all but one of these types are non-exist

Example — Battle of Sexes

Battle of Sexes with incomplete information

(1) N={1,2}: player1 and player2(wife and husband)
(2) $A_1=A_2=\{B,S\}$ (Ballet and Soccer)
(3) $\Theta_1 = \{x\}, \Theta_2 = \{l, h\}$
- Type x: player1 loves going out with player2
- Type l : player2 loves going out with player1
- Type h: player2 hates going out with player1

(4) $p_1(l|x)=p_1(h|x)=1/2, p_2(x|l)=p_2(x|h)=1$

(5)u_1 and u_2 are given in the game matrix on the next slide

Example — Battle of Sexes

Matrices pour BoS

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

type l

	B	S
B	2,0	0,2
S	0,1	1,0

type h

- Since player1 has only type x, we omit the parameter x in the payoff functions u_i, $i = 1,2$.
- These matrixes define the payoff functions: $u_1(B,B,l) = 2$, $u_2(B,B,l) = 1$, $u_1(B,B,h) = 2$, …and so on

Example — Battle of Sexes

Calculate the Bayesian Equilibrium

<u>Player 2 of type l</u>: Given player 1's strategy α_1

- Action B: $\alpha_2(B \mid l) = 1$

  EP = $p_2(x \mid l)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B \mid l)u_2(B,B,l) + \alpha_1(S)\alpha_2(B \mid l)u_2(S,B,l)\}$

  $= \alpha_1(B)$

- Action S: $\alpha_2(S \mid l) = 1$

  EP = $p_2(x \mid l)\{\alpha_1(B)\alpha_2(S \mid l)u_2(B,S,l) + \alpha_1(S)\alpha_2(S \mid l)u_2(S,S,l)\}$

  $= 2(1 - \alpha_1(B))$

Best response is B if $\alpha_1(B) > 2/3$, S if $\alpha_1(B) < 2/3$

Example — Battle of Sexes

<u>Player 2 of type h</u>: Given player 1's strategy α_1

- Action B: $\alpha_2(B \mid h) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x \mid h)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B \mid h)u_2(B,B,h) + \alpha_1(S)\alpha_2(B \mid h)u_2(S,B,h)\} \\ &= (1-\alpha_1(B)) \end{aligned}$$

- Action S: $\alpha_2(S \mid h) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x \mid h)\{\alpha_1(B)\alpha_2(S \mid h)u_2(B,S,h) + \alpha_1(S)\alpha_2(S \mid h)u_2(S,S,h)\} \\ &= 2\alpha_1(B) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Best response is B if } \alpha_1(B) < 1/3\text{, S if } \alpha_1(B) > 1/3}$

Example — Battle of Sexes

<u>Player 1</u>: Given player 2's strategy $\alpha_2(.|l)$ and $\alpha_2(.|h)$

-Action B: $\alpha_1(B)=1$

$$\begin{aligned}\text{EP} = & \ p_1(l\,|\,x)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B\,|\,l)u_1(B,B,l)+\alpha_1(B)\alpha_2(S\,|\,l)u_1(B,S,l)\} \\ & + p_1(h\,|\,x)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B\,|\,h)u_1(B,B,h)+\alpha_1(B)\alpha_2(S\,|\,h)u_1(B,S,h)\} \\ & = \alpha_2(B\,|\,l)+\alpha_2(B\,|\,h)\end{aligned}$$

-Action S: $\alpha_1(S)=1$

$$\begin{aligned}\text{EP} = & \ p_1(l\,|\,x)\{\alpha_1(S)\alpha_2(B\,|\,l)u_1(S,B,l)+\alpha_1(S)\alpha_2(S\,|\,l)u_1(S,S,l)\} \\ & + p_1(h\,|\,x)\{\alpha_1(S)\alpha_2(B\,|\,h)u_1(S,B,h)+\alpha_1(S)\alpha_2(S\,|\,h)u_1(S,S,h)\} \\ & =1-\frac{\alpha_2(B\,|\,l)+\alpha_2(B\,|\,h)}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Best response is B if } \alpha_2(B\,|\,l)+\alpha_2(B\,|\,h)>2/3 \\ \text{Best response is S if } \alpha_2(B\,|\,l)+\alpha_2(B\,|\,h)<2/3\end{array}}$$

Example - Battle of Sexes

Bayesian equilibrium for pure strategy

- Assume that both types of player 2's strategies are pure strategy, and check the all combination of strategies pair.

$$(\alpha_2(B \mid l), \alpha_2(B \mid h)) = (1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$$

- Condition of Bayesian equilibrium is not satisfied by:

$$(\alpha_2(B \mid l), \alpha_2(B \mid h)) = (1,1), (0,1), (0,0)$$

- Bayesian equilibrium for pure strategy is given by:

$$(\alpha_1(B \mid x), \alpha_2(B \mid l), \alpha_2(B \mid h)) = (1,1,0)$$

Example — Battle of Sexes

Bayesian equilibrium for mixed strategy

- There is no equilibrium in which both types of player 2 mixes. (Because, if both type of player 2 mixes, $\alpha_1(B)$ should be 2/3 and 1/3 in the equilibrium. This is contradiction!)

- Suppose only type l mixes. Then, $\alpha_1(B) = 2/3$. This implies that strategy of player 1 mixes, i.e. $\alpha_2(B \mid l) + \alpha_2(B \mid h) = 2/3$.

- Type h of player 2 does not mix and $\alpha_2(B \mid l) \geq 0$. $\alpha_2(B \mid h) = 0$.

- Bayesian equilibrium is given by:

$$(\alpha_1(B \mid x), \alpha_2(B \mid l), \alpha_2(B \mid h)) = (2/3, 2/3, 0)$$

- Similarly, Bayesian equilibrium when type h mixes is given by:

$$(\alpha_1(B \mid x), \alpha_2(B \mid l), \alpha_2(B \mid h)) = (1/3, 0, 2/3)$$