Modèle des jeux et des mécanismes

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II

Jeux et Mécanismes

1. Modèle de calculs, adapté à un nombre important d’agents, suivant une fonction d’utilité. WEB.
2. Jeux: N joueurs suivant chacun un but. Quels sont les Equilibres?
3. Mécanismes: observons un équilibre, de quel jeu sommes nous l’équilibre?

Exemples de Jeux

1. Dilemme des Prisonniers
   Deux décisions C (collaborer), T (Trahir)

$$\begin{pmatrix} 2,2 & 1,4 \\ 4,1 & 3,3 \end{pmatrix}$$

1. Version répétée.

3. Jeux de vérification. Graphes d’accessibilité.

4. MaxSAT, MaxCUT: jeux à N joueurs

4. Jeux logiques: Nord-Est, dames, Echecs.

Mécanisme pour réduire le SPAM

1. Comment faire la différence entre un vrai mail et un SPAM?

2. Modifications au protocole de mail (pop, smtp)

3. Valeur d’un Email?

Valeur proportionnelle aux calculs demandés à A (Alice) par B (Bob)

Modifications au protocole de mail (pop, smtp)

1. **A prend un ticket sur la page Web de B. (Entrée x d'un problème)**
2. **A calcule f(x)=y**
3. **A envoie y et l'Email**
4. **B vérifie y**

A calcule une fonction polynomiale

A prend un ticket sur la page Web de B.

B : génère un polynôme aléatoire de degré n

$$P(x) = a_1.x + a_2x^2 + \ldots . a_nx^n$$

B: choisit n+1 valeurs aléatoires

$$y_1 = P(x_1), y_2 = P(x_2), \ldots, y_{n+1} = P(x_{n+1})$$

Ticket= $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$

A doit trouver P(x) à partir du ticket.

Interpolation ou Inversion matricielle

B vérifie le calcul

B garde P(x) lorsqu'il génère le ticket.

Vérifier consiste à comparer les coefficients de P(x) avec ceux envoyés par A.

$$P(x) = a_1.x + a_2 x^2 + \ldots . a_n x^n$$

On peut paramétrer:

le degré, la précision des valeurs aléatoires pour forcer A à calculer 10 minutes 30 minutes….

Interpolation est polynomiale

La vérification est triviale

Jeux à somme nulle

Deux joueurs I et II:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gain de II = **-** Gain de I

Jeu Morra: chaque joueur cache 1 ou 2 Euros et cherche à deviner le choix de l'autre joueur. Il gagne s'il devine correctement. Si 1 seul joueur gagne, son gain est le montant caché total, payé par l'autre joueur, sinon le gain est de 0

Gain du Jeu

Gain du jeu : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_i\, y_j$

Joueur I : $Min_y \quad x.A.y$

$$Min_y \quad x.A.y = Min_j \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i = t$$

Réponse de II peut être pure

$$x.A.y = \sum_{j=1}^{n} y_j \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i \Big) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j.t = t$$

$$\text{Donc}: Min_y \; x.A.y \geq t$$

Toute solution pure doit satisfaire

$$Min_y \quad x.A.y \leq \; Min_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i = t$$

Stratégie optimale

Conclusion

$$t \le Min_y \quad x.A.y \le \ t$$

$$Min_y \quad x.A.y = \mathrm{t}$$

Joueur II peut jouer une stratégie pure

$$Max \;\; Min_j \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$Max \qquad z$$

$$z - \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.x_i \le 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Stratégie optimale

Conclusion

$$
\begin{array}{llllll}
Max & & z & & & \\
z+ & & -2x_2 & +3x_3 & & \le 0 \\
z+ & 2x_1 & & & -3x_4 & \le 0 \\
z & -3x_1 & & & +4x_4 & \le 0 \\
z & & +3x_2 & -4x_3 & & \le 0 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1
\end{array}
$$

Solution x*= [0,3/5,2/5,0]

Résolution par simplex.

Trouver une solution initiale

Théorème Minimax

Situation pour le joueur II

$$Min \;\; Max_i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$Min \qquad w$$

$$w - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j \leq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Problème dual du précédent. Par dualité:

Théorème (Von Neuman) : Max Min = Min Max

Dualité: Simplex

Résolution d’un système linéaire de maximisation:

$$\text{Max}\ \ c^t.x$$

$$A.x \leq b$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$$

- Introduction de variables d’écart
- Solution initiale
- Itération pour augmenter la valeur de la solution.
- Terminaison

Bases de la Dualité

$$\begin{array}{llllll} \text{Max } 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\ 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Estimation de z > a

z>5 avec (0,0,1,0)

z>22 avec (3,0,2,0)

….

Estimation de z <b ?

Quel est le témoin?

Dualité : z < b

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max } 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & \\
x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Montrons que z <275/3

2nd contrainte . 5/3

$$25/3\, x_1 + 5/3\, x_2 + 5\, x_3 + 40/3\, x_4 \leq 275/3$$

$$4\, x_1 + x_2 + 5\, x_3 + 3\, x_4 \leq 25/3\, x_1 + 5/3\, x_2 + 5\, x_3 + 40/3\, x_4 \leq 275/3$$

Donc z <275/3

Dualité

$$\begin{aligned}
\text{Max } & 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \le 1 \\
& 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \le 55 \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \le 3 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

2nd contrainte +3ème contrainte

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \le 58$$

Donc $z < 58$

Méthode systématique.

Dualité : méthode

$$\begin{array}{llr}
 & \text{Max } 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & \\
y_1 & . \quad x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
y_2 & . \quad 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\
y_3 & . \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0
\end{array}$$

$$(y_1 + 5y_2 - y_3).\, x_1 + (-y_1 + y_2 + 2y_3).\, x_2 + (-y_1 + 3y_2 + 3y_3).\, x_3 +$$

$$(3y_1 + 8y_2 - 5y_3).\, x_4 \leq (y_1 + 55\, y_2 + 3y_3)$$

Conditions pour que le membre gauche >

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4$$

$$\begin{array}{r}
y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 4 \\
-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\
-y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 5 \\
3y_1 + 8y_2 - 5y_3 \geq 3
\end{array}$$

Dualité: exemple

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq z \leq y_1 + 55 \quad y_1 + 3y_3$$

On obtient donc le système dual:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Min} & y_1 & +55y_2 & +3y_3 & \\
 & y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq 4 \\
 & -y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq 1 \\
 & -y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq 5 \\
 & 3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq 3
\end{array}$$

Remarques générales

Problème Primal de Maximisation donne un problème Dual de minimisation.

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq z \leq y_1 + 55 \quad y_1 + 3y_3$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \right) x_j \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

A l'optimum:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i^*$$

Démonstration Minimax

Considérons la dernière ligne du dernier système du primal:

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c'_k . x_k$$

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j^*$$

Posons:

$$y_i^* = -c'_{i+n} \;\; pour \;\; i = 1 \ldots m$$

Vérifions que y* satisfait :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j . x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i . y_i^*$$

Démonstration Minimax

Les variables d'écart sont définies comme:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c'_k.x_k$$

$$y_i^* = -c'_{i+n} \ pour \ i = 1 \ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n} c'_k.x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^*.x_{n+i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n} c'_k.x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^*.\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(c'_k + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j^*\right) x_k$$

Comparant les coefficients de xj

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i$$

Et on conclut:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i.y_i^*$$

Complémentarité

Contraintes saturées du dual (m=3)
et variables nulles du primal (n=2)

$x_3^* = x_4^* = 0$ $\qquad$ $x_1^* = 2, x_2^* = 2,\ x_5^* = 1$

$y_1^* = 2\ , y_3^* = 1\ ,\quad y_2^* = 0\ , y_4^* = 0\ , y_5^* = 0$

$x_1^* = 2$
$x_2^* = 2$

$$\begin{array}{l} Min\ \ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \\ y_1 + y_2 \qquad \geq 2 \\ \quad -y_2 + y_3 \ \geq 1 \end{array}$$

Soit xi=0 soit contrainte duale est saturée

Complémentarité

Contraintes saturées du primal (n=2)
et variables nulles du dual (m=3)

$x_3^* = x_4^* = 0$ $\quad$ $x_1^* = 2, x_2^* = 2,\ x_5^* = 1$

$$y_1^* = 2\ ,\ y_3^* = 1\ ,\quad y_2^* = 0\ ,\ y_4^* = 0\ ,\ y_5^* = 0$$

$$\begin{aligned} y_1^* &= 2 \\ y_2^* &= 0 \\ y_3^* &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} & Max\ \ 2x_1 + x_2 & \\ x_1 & & \leq 2 \\ x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_2 & \leq 2 \end{array}$$

Soit yi=0 soit contrainte primale est saturée

Théorème : Ces deux conditions caractérisent
une solution x*,y* optimum.

Interprétation économique

Exemple de fabrication de produits
en quantité $x1, x2, x3$.

Chaque produit utilise des composants
$e1,e2,e3,e4$ et contribue à un profit
ci ($ par unité de xi)

Contraintes du primal : $Ax < b$

Contraintes du dual $A' y > c$
yj = $ par unité de composant ej

Min $y.b$: coût minimum des composants

Exemple simple

Exemple: Matrice

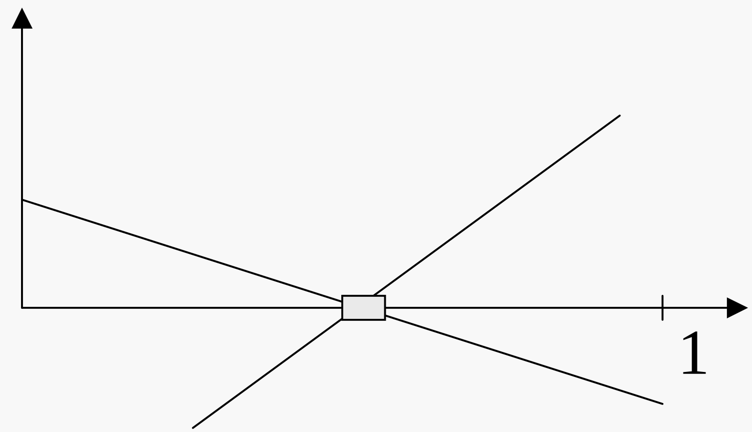
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Programme linéaire

$$\begin{aligned} &Max \quad z \\ &z - 3x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ &z + x_1 - x_2 \leq 0 \\ &x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

Solution $x^* = [1/2, 1/2]$

Interprétation graphique: Sommet de l'enveloppe inférieure



Jeux matriciels

Deux joueurs: les gains des I et II sont définies par deux matrices A,B de même dimension. Pour n joueurs, n hypercubes.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Max \;\; x^T.A.y \qquad\qquad Min \;\; e^T.u$$

$$E.x = \;\; e \qquad\qquad E^T.u \geq A.y$$

Solution possible:
x*= [2/3,1/3] , y*= [1/3,2/3]

Solution (x*,y*) est un équilibre de Nash

Jeux matriciels

Par dualité:

$$x^T.A.y = e^T.u \qquad \text{Primal} = \text{Dual}$$

$$E.x = e \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\mathrm{t}} = x^t.E^t$$

$$x^T.A.y = x^t.E^t.u$$

$$x^T.(E^t.u - A.y) = 0$$

$$E^t.u - A.y \geq 0$$

Pour le joueur II:

$$Max\ x^T.B.y$$

$$F.x = f$$

$$y^T.(F^t.v - B^t.x) = 0$$

$$(F^t.v - B^t.x) \geq 0 \qquad \text{par} \quad \text{dualité}$$

C.N.S. pour être un équilibre de Nash

Un couple (x,y) est un équilibre de Nash ssi il existe u,v tel que:

$$E\,.x = e$$

$$F.y = f$$

$$E^t.u - A\,.y \geq 0$$

$$F^t.v - B^t.x \geq 0$$

$$x^T.(E^t.u - A\,.y) = 0$$

$$y^T.(F^t.v - B^t.x) = 0$$

Programme linéaire + contraintes quadratiques de complémentarité.

Simplex + complémentarité= Lemke-Howson

Algorithmique des Jeux

1. Etant donné deux matrices A,B, trouver un équilibre.

2. Généralisation à N joueurs: représentation compacte de l'hypercube.

3. Approximation.

4. Vérification approchée.