

Modèle des jeux et des mécanismes

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II



Jeux matriciels

Deux joueurs: les gains des I et II sont définis par deux matrices A,B de même dimension. Pour n joueurs, n hypercubes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Max } x^T \cdot A \cdot y$$

$$\text{Min } e^T \cdot u$$

$$E \cdot x = e$$

$$E^T \cdot u \geq A \cdot y$$

Solution possible:

$$x^* = [1, 0], \quad y^* = [0, 0, 1]$$

Solution (x^*, y^*) est un équilibre de Nash.

Jeux matriciels

Par dualité:

$$x^T \cdot A \cdot y = e^T \cdot u \quad \text{Primal} = \text{Dual}$$

$$E \cdot x = e \quad \Rightarrow \quad e^t = x^t \cdot E^t$$

$$x^T \cdot A \cdot y = x^t \cdot E^t \cdot u$$

$$x^T \cdot (E^t \cdot u - A \cdot y) = 0$$

$$E^t \cdot u - A \cdot y \geq 0$$

Pour le joueur II:

$$\text{Max } x^T \cdot B \cdot y$$

$$F \cdot x = f$$

$$y^T \cdot (F^t \cdot v - B^t \cdot x) = 0$$

$$(F^t \cdot v - B^t \cdot x) \geq 0 \quad \text{par dualité}$$

C.N.S. pour être un équilibre de Nash

Un couple (x,y) est un équilibre de Nash ssi il existe u,v tel que:

$$E \cdot x = e$$

$$F \cdot y = f$$

$$E^t \cdot u - A \cdot y \geq 0$$

$$F^t \cdot v - B^t \cdot x \geq 0$$

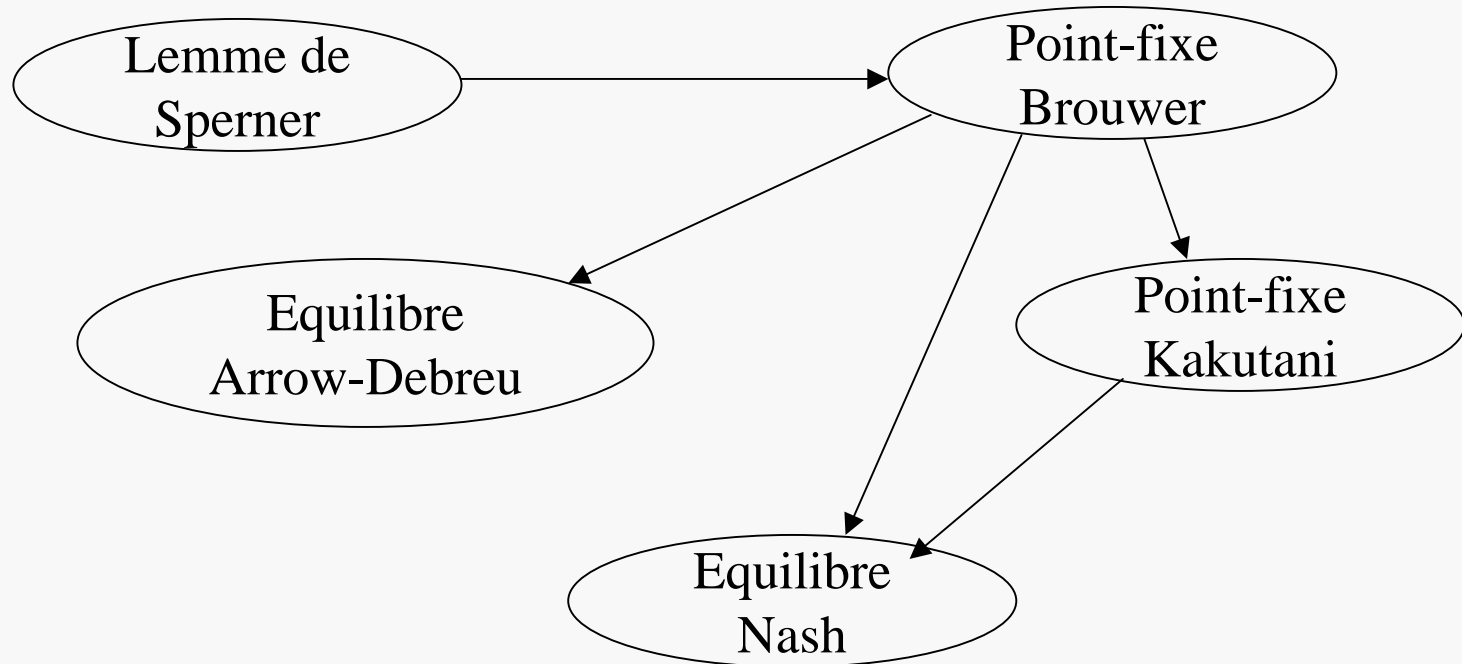
$$x^T \cdot (E^t \cdot u - A \cdot y) = 0$$

$$y^T \cdot (F^t \cdot v - B^t \cdot x) = 0$$

Programme linéaire + contraintes quadratiques de complémentarité.

Simplex + complémentarité = Lemke-Howson

Existence d'Equilibres

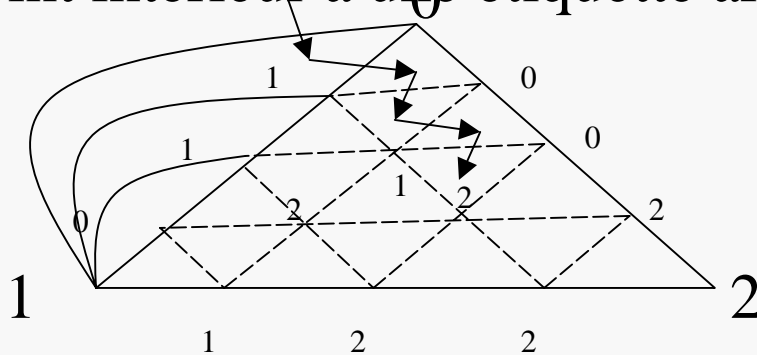


Preuves non-constructives.

Lemme de Sperner

Etiqueter un simplex:

- Chaque point frontière ne peut pas avoir l'étiquette du sommet opposé.
- Chaque point intérieur a une étiquette arbitraire.

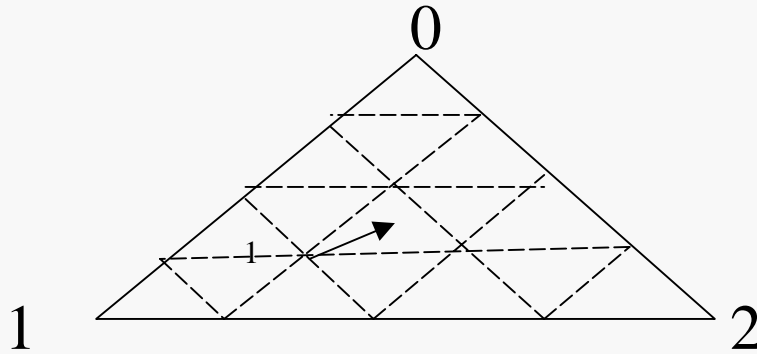


Sperner : il existe un triangle 0-1-2

Commencer sur le côté gauche avec une arête 0-1 qui détermine un triangle qui admet une autre autre arête 0-1. On parcourt ainsi des triangles 1 seule fois. Il existe un nombre fini de triangles et on doit terminer sur 0-1-2.

Point fixe de Brouwer

Brouwer: Soit Φ une fonction continue sur un n -simplex.
Il existe x tel que $\Phi(x) = x$.



Soit $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ un découpage en triangles de plus en plus fins.

Déterminer un coloriage en détectant le côté traversé par $\Phi(x)$.
C'est un étiquetage de Sperner. Il existe un triangle t_i 0-1-2 de centre m_i . Pour une séquence de m_i il existe une sous-séquence x_i qui converge vers x , point fixe.

Point fixe de Kakutani

Soit: $\Phi : S \rightarrow 2^S$

Fonction à valeur convexe.

Graphe continué

Pour toute suite (x_i, y_i) qui converge vers (x, y) ,
si $\forall i, y_i \in \Phi(x_i)$ alors $y \in \Phi(x)$

Kakutani : il existe x^* tel que $x^* \in \Phi(x^*)$

Preuve: réduire le problème à l'existence d'un point fixe de Brouwer.

Définir à l'étape i de la triangulation $\Phi_i(x) = y \in \Phi(x)$

Sur la triangulation. Ensuite par interpolation linéaire. La fonction est continue et a un point fixe en x_i . La séquence des x_i Admet une sous-séquence qui converge vers x^* .

Existence de Nash

Soit:

$$\Phi_1(y) = \{x \text{ meilleures réponses à } y \text{ pour } I\}$$

$$\Phi_2(x) = \{y \text{ meilleures réponses à } x \text{ pour } II\}$$

$$\Phi(x,y) = \Phi_1(y) \times \Phi_2(x)$$

Nash : il existe (x^*, y^*) tel que $x^*, y^* \in \Phi(x^*, y^*)$

Preuve: montrer que la fonction Φ est à valeurs convexes et continue comme graphe.

On applique Kakutani et on obtient un équilibre de Nash.

Existence de Nash avec Brouwer

Soit s une stratégie pure du joueur j :

$$d_{j,s} = A_j(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, s, p_{i+1}, \dots, p_n) - A_j(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

$$f(p_1, p_2, \dots, p_n) = (p_1', p_2', \dots, p_n')$$

Idée:
$$p_{j,s}' = p_{j,s} + d_{j,s}$$

Pour éviter valeur négative et maintenir une distribution:

$$p_{j,s}' = (p_{j,s} + \text{Max}(d_{j,s}, 0)) / \left(\sum_s p_{j,s} + \text{Max}(d_{j,s}, 0) \right)$$

Nash est le point-fixe de f .

Equilibre Arrow-Debreu

Entrée:

- Ensemble B d'acheteurs
- Ensemble A de biens divisibles
- Vecteur M de valeurs m_i entières pour chaque acheteur
- Matrice Utilité: $u_{i,j}$ donnant l'utilité du produit i pour l'acheteur j.

Sortie: vecteur de prix p_i pour chaque produit i

- Chaque acheteur maximise son utilité
- Tout est dépensé
- Tout est acheté

x_i est le vecteur de biens achetés par i

$$p \cdot x_i = m_i \quad \sum_i x_{i,j} = a_j$$

$$\text{Max} \quad x_{i,j} \cdot u_{i,j}$$

Equilibre Arrow-Debreu

Arrow-Debreu: il existe un vecteur p qui résout le marché.

Preuve: définir un potentiel pour p .

- Si la demande trop forte, augmenter p

$$\Phi(p_j) = \frac{p_j + (a_j - \sum_i p_j \cdot x_{i,j})}{C}$$

D'après Brouwer, il existe un point fixe qui résoud le marché.

Observations:

- L'équilibre peut-être non calculable au sens des réels (Richter et Wong)
- Algorithme polynomial au sens BSS (Devanur, Papadimitriou, Saberi, Vazirani)

Classes PPA et PPAD

PPA : Polynomial Parity Argument

PPAD : Polynomial Parity Argument in Directed graphs

A est dans PPA (PPAD) si:

Il existe une TM avec $2^{p(|x|)}$ états. Graphe d'états de degré au plus 2. Etat $(0,0,..0)$ est une feuille.

Problème: trouver une autre feuille.

(Papadimitriou, On the Complexity of the Parity argument, JCSS 1994)

Exemple: Sperner est dans PPAD

Algorithme de Lemke-Howson

Procédure algorithmique pour trouver des équilibres: Simplex+ complémentarité.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Algorithme LH

1. Déterminer les points frontières et le graphe LH dans chaque Simplex,
2. Colorier les simplex de I et II avec des couleurs représentant les stratégies pures de I et II,
3. Naviguer à partir de l'origine jusqu'à un couple (x,y) avec toutes les couleurs (Nash).

Coloriage Shapley dans Lemke-Howson

$M=\{1,2\}$ pour 2 stratégies pures de I

$N=\{3,4,5\}$ pour 3 stratégies pures de II

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Une stratégie x est coloriée par $(1,3)$ si $x=(0,1)$, i.e. I n'utilise pas la 1ère décision, et 3 est la meilleure réponse de II.

Théorème (Nash 1951): (x,y) est un équilibre pour (A,B) ssi

$$x_i > 0 \implies a_i \quad y = \text{Max}_{k \in M} a_k y$$

$$y_i > 0 \implies b_i \quad x = \text{Max}_{l \in N} b_l x$$

Théorème: (x,y) est un équilibre pour (A,B) ssi les couleurs de x et de y couvrent $M+N$.

Algorithme de Lemke-Howson

LH Graphes dans les simplex de I et II

- Extrémités du simplex

- Points frontières

$$\sum_i x_{i,1} \cdot b_{i,1} = \sum_i x_{i,2} \cdot b_{i,2} \text{ ou } \sum_i x_{i,2} \cdot b_{i,2} = \sum_i x_{i,3} \cdot b_{i,3} \text{ ou}$$
$$\sum_i x_{i,1} \cdot b_{i,1} = \sum_i x_{i,3} \cdot b_{i,3}$$

Exemple :

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 1 - \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

Algorithme de Lemke-Howson

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Colonnes de B:

Colonnes 1, 2: $\lambda + 4(1 - \lambda) = 3\lambda + (1 - \lambda)$ d'où $\lambda = 3/5$

Pour $\lambda = 3/5$ valeur = 11/5 pour colonnes 1,2

Pour $\lambda = 3/5$ valeur = 12/5 pour colonne 3. Non point limite.

Colonnes 2, 3: $3\lambda + (1 - \lambda) = 2\lambda + 3(1 - \lambda)$ d'où $\lambda = 2/3$

Pour $\lambda = 2/3$ valeur = 7/3 pour colonnes 1,2

Pour $\lambda = 7/3$ valeur = 2 pour colonne 1. Point limite.

Colonnes 1, 3: $\lambda + 4(1 - \lambda) = 2\lambda + 3(1 - \lambda)$ d'où $\lambda = 1/2$

Pour $\lambda = 1/2$ valeur = 5/2 pour colonnes 1,3

Pour $\lambda = 1/2$ valeur = 2 pour colonne 2. Point limite.

Lignes de A:

Lignes 1,2 dans A

$$2. \lambda + \mu + 3(1 - \lambda - \mu) = 3. \lambda + 3\mu + (1 - \lambda - \mu)$$

$$2 = 3\lambda + 4\mu$$

Algorithme de Lemke-Howson

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Coloriage LH Graphes dans les simplex de I et II

5 couleurs: (1,2) pour I et (3,4,5) pour II.

Coloriage dans le simplex de I:

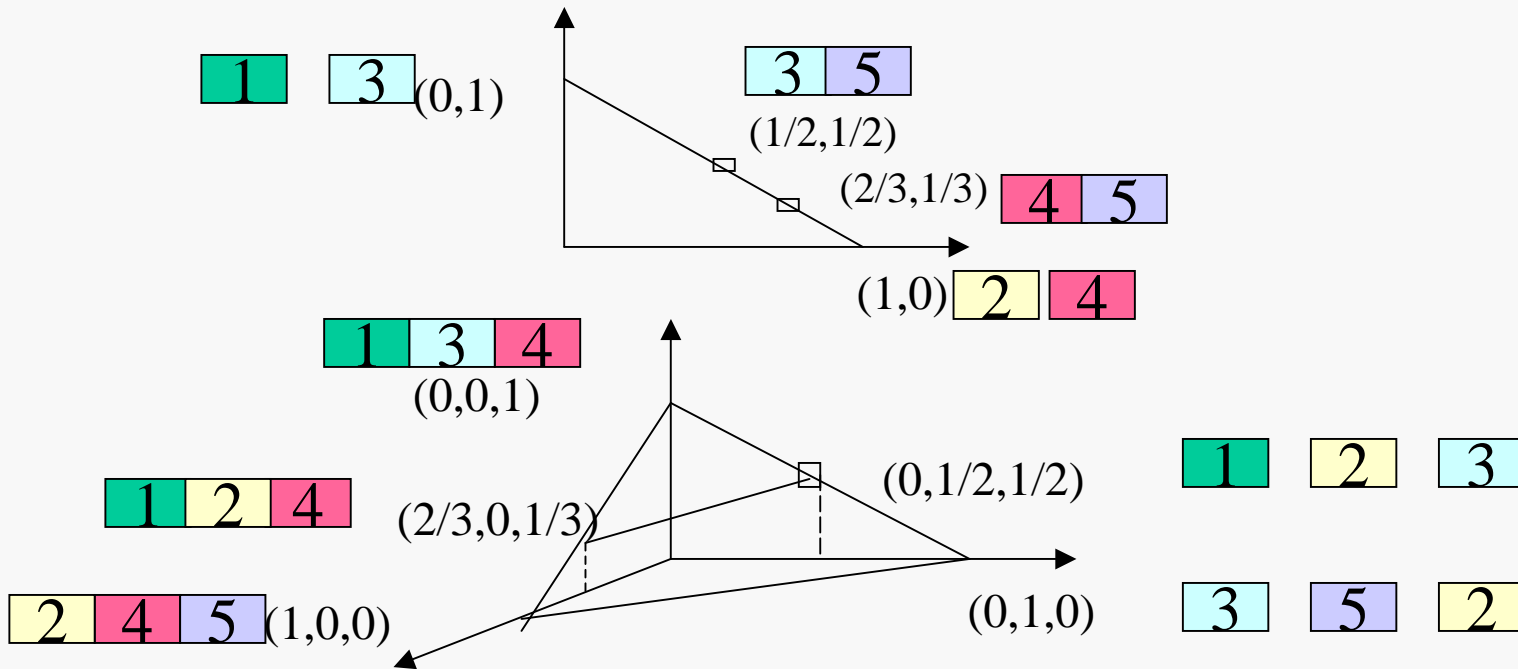
Si $x_i = 0$, point (x_1, x_2) colorié i pour $i = 1$ ou 2
 Pour un point x , si colonne j optimale (B),
 point x colorié j ($j = 3, 4, 5$)

Coloriage symétrique pour II

Si $y_i = 0$, point (y_1, y_2, y_3) colorié j pour $j = 3, 4, 5$
 Pour un point y , si ligne i optimale (A),
 point y colorié i ($i = 1, 2$)

Algorithme de Lemke-Howson

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



Couleurs Lemke-Howson



Algorithme de Lemke-Howson

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lemke-Howson:

Paire (x_1, x_2) (y_1, y_2, y_3) est un équilibre de Nash
ssi l'union de leurs couleurs = l'ensemble C des couleurs.

Exemple:

Paire $(0,1)$ $(1,0,0)$ est un équilibre de Nash
Paires $(2/3, 1/3)$, $(0, 1/2, 1/2)$ et $(1/2, 1/2)$, $(2/3, 0, 1/3)$
sont les 2 autres équilibres de Nash

Procédure algorithmique:

Commencer en $(0,0)$, $(0,0,0)$ et choisir une couleur à exclure pour x
puis pour y.

On termine sur un équilibre de Nash.

Exemple 2

D'après B. Von Stengel, Computing Equilibria for two-person games, Handbook of Game theory with Economic applications, 2002.

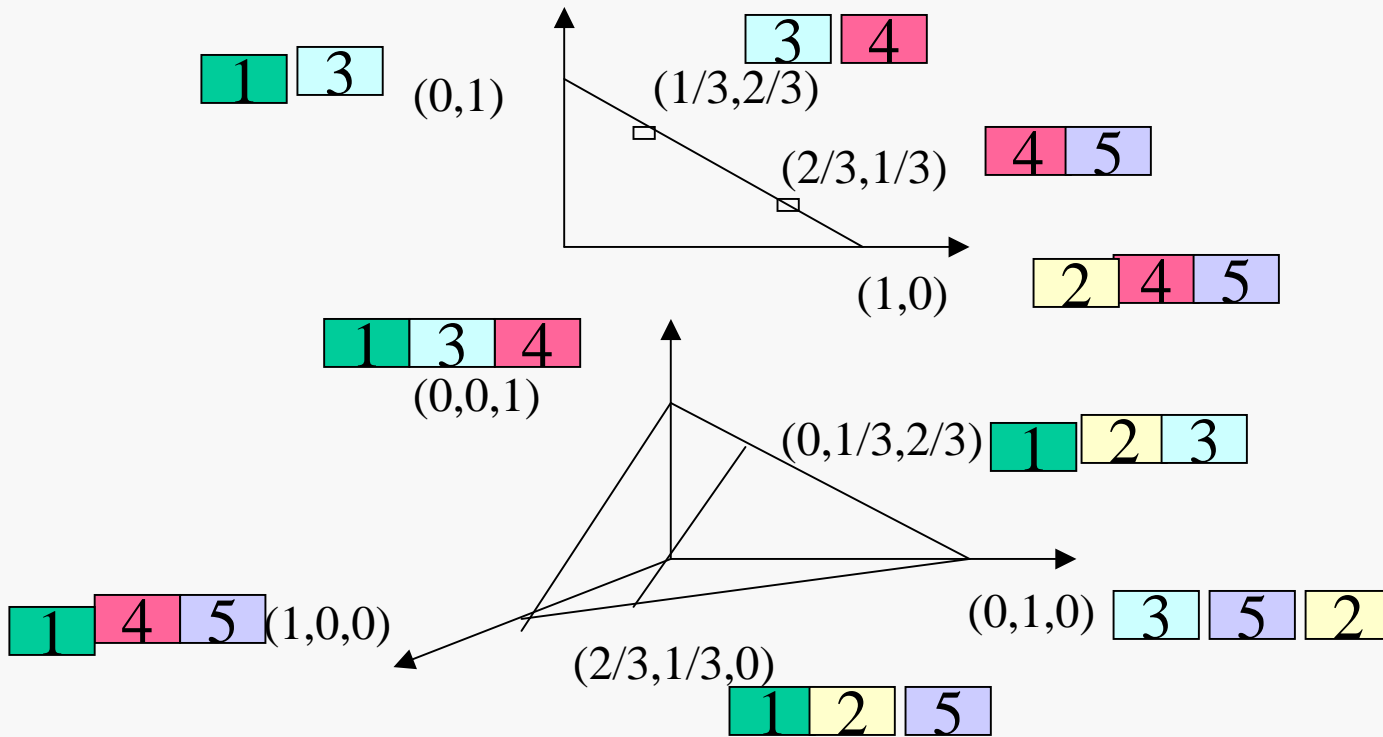
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Algorithme LH

1. Points frontières pour I: $(1/3, 2/3)$ et $(2/3, 1/3)$
pour II: $\mu = 1/3$
2. Coloriage des points:

Coloriage Lemke-Howson

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$



Couleurs Lemke-Howson



Equilibres de l'exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Equilibres de Nash

1. $(1,0)$ et $(0,0,1)$
2. $(1/3, 2/3)$ et $(2/3, 1/3, 0)$
3. $(2/3, 1/3)$ et $(0, 1/3, 2/3)$