Modèle des jeux et des mécanismes

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II

Approximer des équilibres

1. Equilibres approchés
2. Approximation de Nash
3. Existence

Equilibres approchés

Une paire (x’,y’) est un équilibre approché si:

$$\forall\ x,\quad x.A.y' \le x'.A.y' + \varepsilon$$
$$\forall\ y,\quad x'.B.y \le x'.B.y' + \varepsilon$$

Lipton, Markakis, Mehta 2003: Pour tout équilibre de Nash (x*,y*) il existe un équilibre approché qui l’approxime, de support:

$$k = (Log\ n)/\ \varepsilon^2$$

On a:

$$|\ x'.A.y' - x^*.A.y^*\ | \le \varepsilon$$

$$|\ x'.B.y' - x^*.B.y^*\ | \le \varepsilon$$

Référence: Playing large games using simple strategies, R. Lipton, E. Markakis, A. Mehta, ECOM 03

Equilibres approchés

Existence d'équilibres approchés démontrée par la méthode probabiliste.

Prob [il existe un tel (x',y')] >0

Exemple : (3/5,2/5) (0,1/2,1/2) est Nash

(1,0) (0,1/3,2/3) est-il ε - Nash ?

Preuve: Soit k tirages de stratégies pures selon x*.
Soit x' la stratégie mixte uniforme obtenue.

$$\Phi_1 : \{ | x'.A.y' - x^*.A.y^* | \leq \varepsilon/2 \}$$

$$\Phi_2 : \{ | x'.B.y' - x^*.B.y^* | \leq \varepsilon/2 \}$$

$$\pi_{1,i} : \{ x^i.A.y' \leq x'.A.y' + \varepsilon \} \text{ pour } i = 1,\ldots,n$$

$$\pi_{2,j} : \{ x'.B.y^j \leq x'.B.y' + \varepsilon \} \text{ pour } j = 1,\ldots,n$$

$$\text{Good} = \Phi_1 \cap \Phi_2 \bigcap \pi_{1,i} \bigcap \pi_{2,j}$$

Equilibres approchés

$$\text{On veut montrer : } \Pr[\text{Good}] > 0$$

$$\Pr[\neg \text{Good}] \le \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

Borner chaque probabilité:

$$\text{Pour } \Phi_1 : \left\{ \left| x'.A.y' - x^*.A.y^* \right| \le \varepsilon / 2 \right\}$$

$$\Phi_{1,a} : \left\{ \left| x'.A.y^* - x^*.A.y^* \right| \le \varepsilon / 4 \right\}$$

$$\Phi_{1,b} : \left\{ \left| x'.A.y' - x'.A.y^* \right| \le \varepsilon / 4 \right\}$$

$$\Phi_{1,b} \cap \Phi_{1,b} \subseteq \Phi_1$$

$x'.A.y^*$ est la somme de k variables indépendantes de moyenne $x^*.A.y^*$

Equilibres approchés

$$\Phi_{1,a} : \{ | x'.A.y^* - x^*.A.y^* | \leq \varepsilon / 4 \}$$

$$\mathrm{Prob}[\neg \Phi_{1,a}] \leq 2.e^{-k\varepsilon^2/8}$$

Par Chernoff-Hoeffding:

Similairement pour

$\neg \Phi_{1,b}$ et donc $\mathrm{Prob}[\neg \Phi_1] \leq 4.e^{-k\varepsilon^2/8}$

$$\Pr[\neg \mathrm{Good}] \leq \Pr[\neg \Phi_1] + \Pr[\neg \Phi_2] + \sum_{i=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{1,i}] + \sum_{j=1}^{n} \Pr[\neg \pi_{2,j}]$$

$$\Pr[\neg \mathrm{Good}] \leq 8.e^{-k\varepsilon^2/8} + 8.n.(.e^{-k\varepsilon^2/8}) < 1$$

pour $k = (Log\, n)/\varepsilon^2$

Equilibre approché pour un jeu à 2 joueurs

Lipton 2003: il existe un algorithme quasi-polynomial pour trouver tous les équilibres approchés de support:

$$k = (Log\, n)/\varepsilon^2$$

Enumérer toutes possibilités et vérifier que c'est un équilibre approché.

Les stratégies pures peuvent être substituées aux (x*,y*).

Algorithme en : $O(n^{Log\, n})$

Questions:

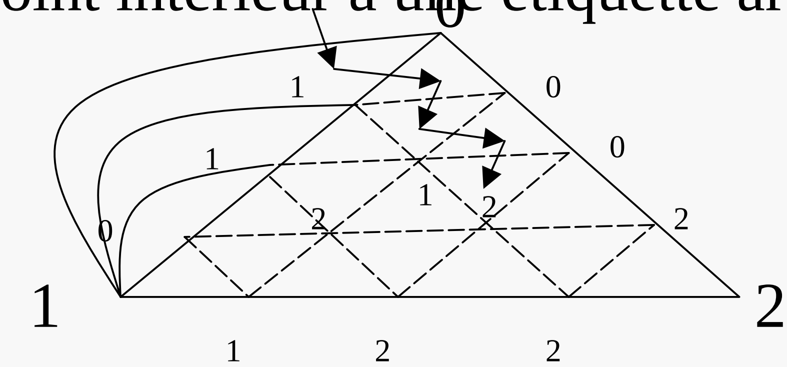
- Peut-on approximer Brouwer avec la même idée?
- Peut-on approximer Kakutani?

Sperner en dimension n

Etiquetter un simplex de dimension n?

•Chaque point frontière ne peut pas avoir l’étiquette du sommet opposé.

•Chaque point intérieur a une étiquette arbitraire.



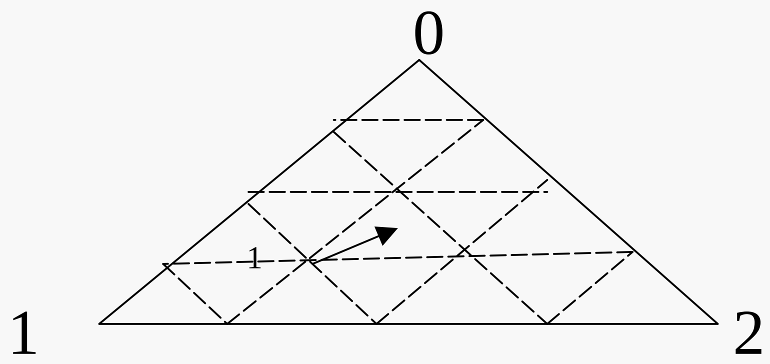
Sperner : il existe un triangle 0-1-2

Plusieurs solutions sont possibles.

(Papadimitriou 94)

Approximer Brouwer

Brouwer: peut-on échantillonner un simplex de dimension n, selon k dimensions tel qu'un point-fixe se trouve dans une des sous-régions?



Soit T_1 , T_2 ,..., T_i ,... un découpage de plus en plus fins. Il existe

k^k possibilités et l'une doit contenir l'approximation du point fixe.

Algorithme randomisé constructif?

Vérification approchée d'un équilibre

Il existe un algorithme quasi-polynomial pour trouver tous les équilibres approchés d'un équilibre connu.

Problème: l'équilibre n'est pas connu. Peut-on vérifier que l'équilibre satisfait une propriété simple?

Exemple: Existe-t-il un équilibre tel que $x_1 = 0.5$?

Problème NP-complet.
Peut-on le vérifier approximativement?

Approche des $\in\!-\textit{testeurs}$