

Modèle Arrow-Debreu

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II



Modèle Arrow-Debreu

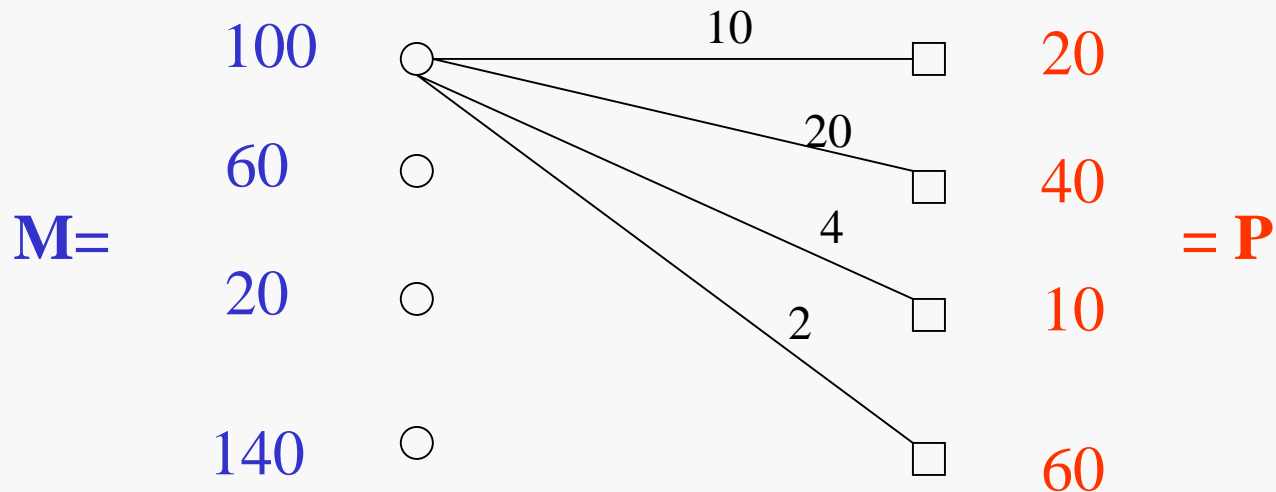
Entrée:

- A, ensemble de n produits
- B, ensemble de m consommateurs (Buyers)
- m_i , vecteur entier de ressources
- Utilités, matrice d'entiers $u_{i,j}$ du cons. i pour le produit j

Sortie:

- Vecteur de prix p_j
- Allocation $x_{i,j}$
- Marché s'équilibre: (tout est dépensé et tout est consommé)
- Chaque consommateur maximise son utilité.

Modèle Arrow-Debreu



B: Buyers

A : Products

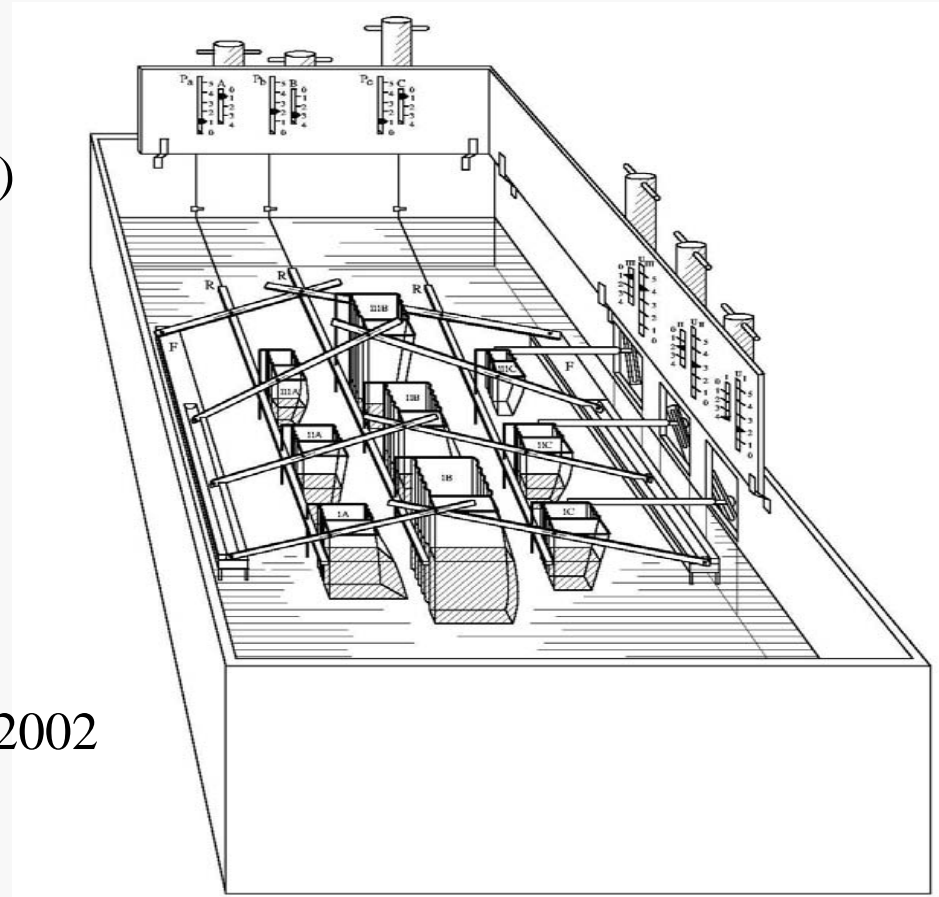
$$\text{Buyer } i : \left(\begin{array}{l} \text{Max } \sum x_{i,j} u_{i,j} \\ m_i = \sum_j x_{i,j} p_j \\ x_{i,j} \leq 1 \end{array} \right)$$

Il existe P, tel que l'allocation de chaque consommateur est optimum.

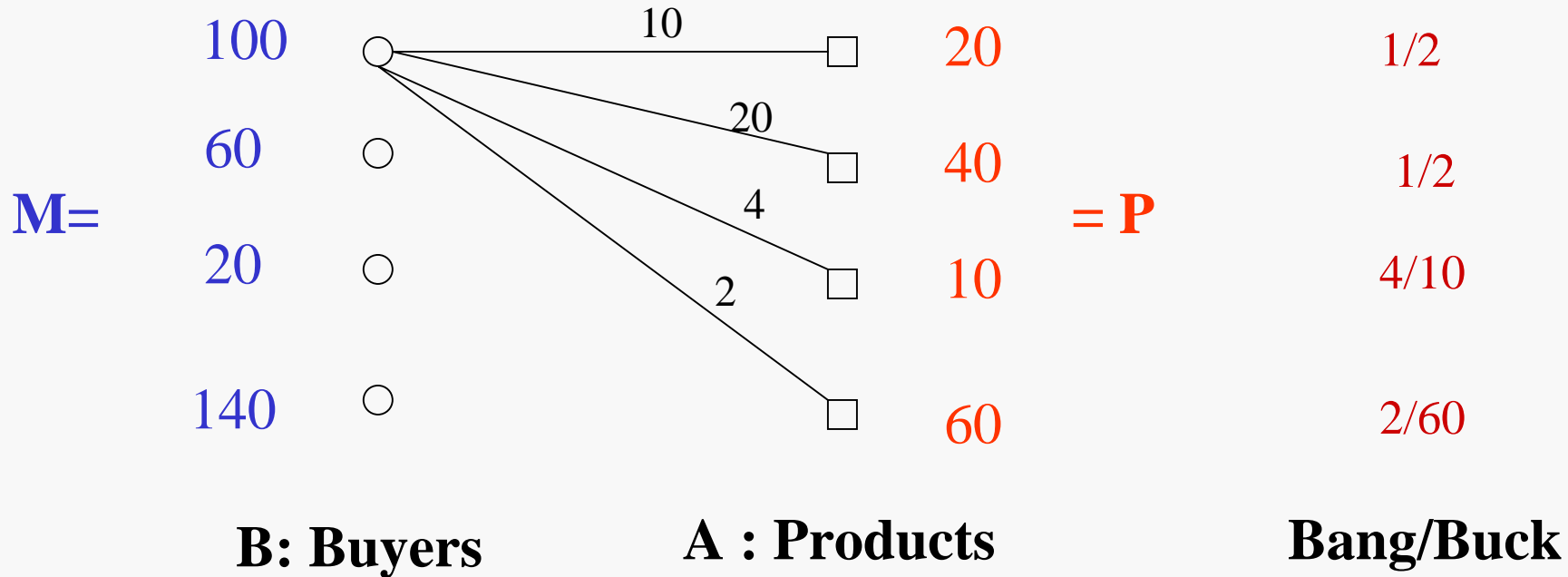
Arrow-Debreu

Historique:

- Irving Fisher 1891 (concave functions)
 - Hydraulic apparatus for calculating equilibrium
- Eisenberg & Gale 1959
 - (unique) equilibrium exists
- Devanur, Papadimitriou, Saberi & V. 2002
 - poly time alg for linear case
- V. 2002: alg for generalization of linear case



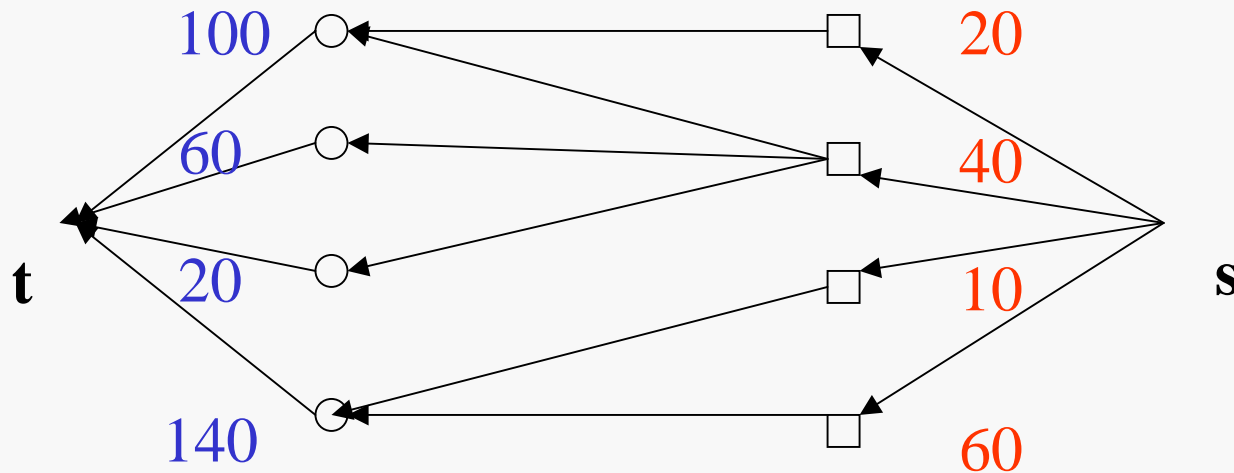
Modèle Arrow-Debreu



$$\text{Buyer } i : \left(\begin{array}{l} \text{Max } \sum x_{i,j} \cdot u_{i,j} \\ m_i = \sum_j x_{i,j} \cdot p_j \\ x_{i,j} \leq 1 \end{array} \right)$$

Approche DPSV : Devanur, Papadimitriou, Daberi, Vazirani

BB : Bang per buck of Buyer i : $\alpha_i = \max_j \frac{u_{i,j}}{p_j}$



Sous-graphe BB : (i,j) existe si BB maximum.

Algorithme DPSV pour Arrow-Debreu

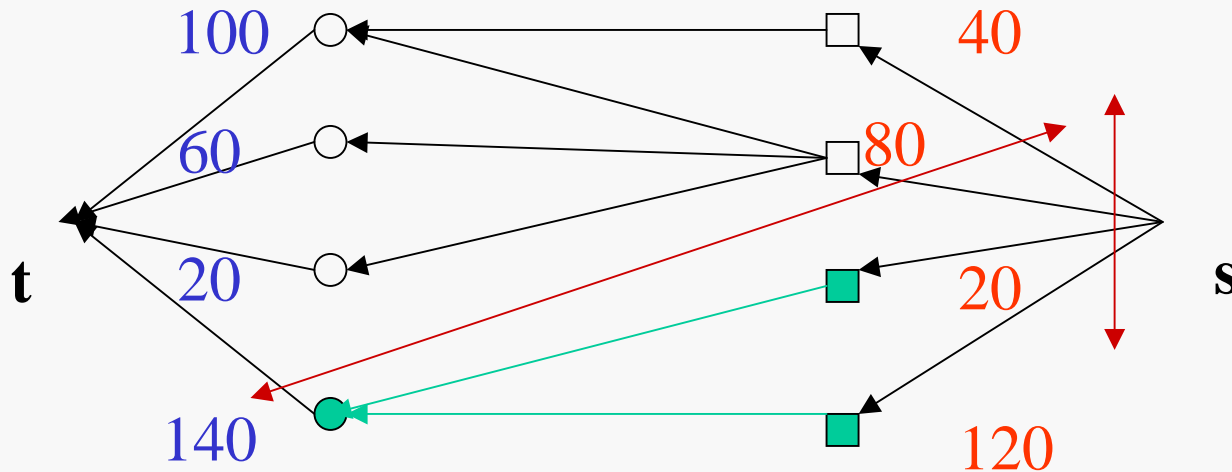
Initialisation des prix: $p_j = \frac{1}{n}$

- Tester si tous les produits sont connectés à un acheteur.
- Si non, baisser les prix correspondants.

Augmentation des prix jusqu'à atteindre l'équilibre:

- Maintenir s comme coupe minimum (tout est consommé)
- Tester si t est une coupe minimum (tout est dépensé).
 - Trouver l'augmentation des prix
 - Déterminer une partie du sous-graphe qui réalise un sous-équilibre

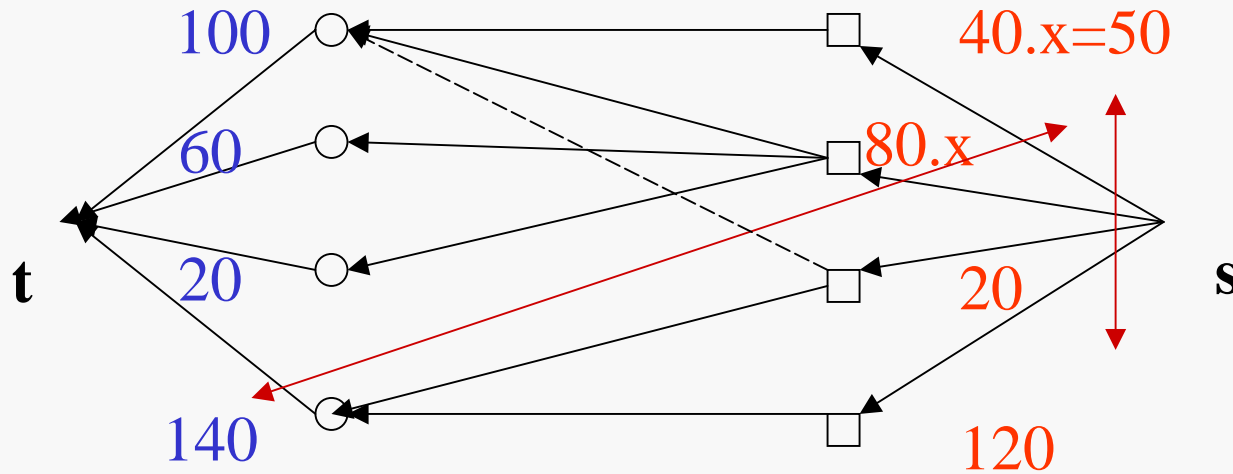
Flot Maximum dans le graphe DPSV



Augmenter les prix pour le graphe non-figé:

- **Maintenir $(t+A+B, s)$ comme coupe minimum**
 - **Une autre coupe fige un sous- graphe (Event 1)**
- **Si une nouvelle arête apparaît défiger la composante (Event 2).**

Flot Maximum dans le graphe DPSV



$$S \subseteq A, \quad p(S) = \sum_{i \in S} p_i$$

$$\Gamma(S) = \{i \in B : \exists j \in A, (i, j) \in E\}, \quad m(\Gamma(S)) = \sum_{i \in \Gamma(S)} m_i$$

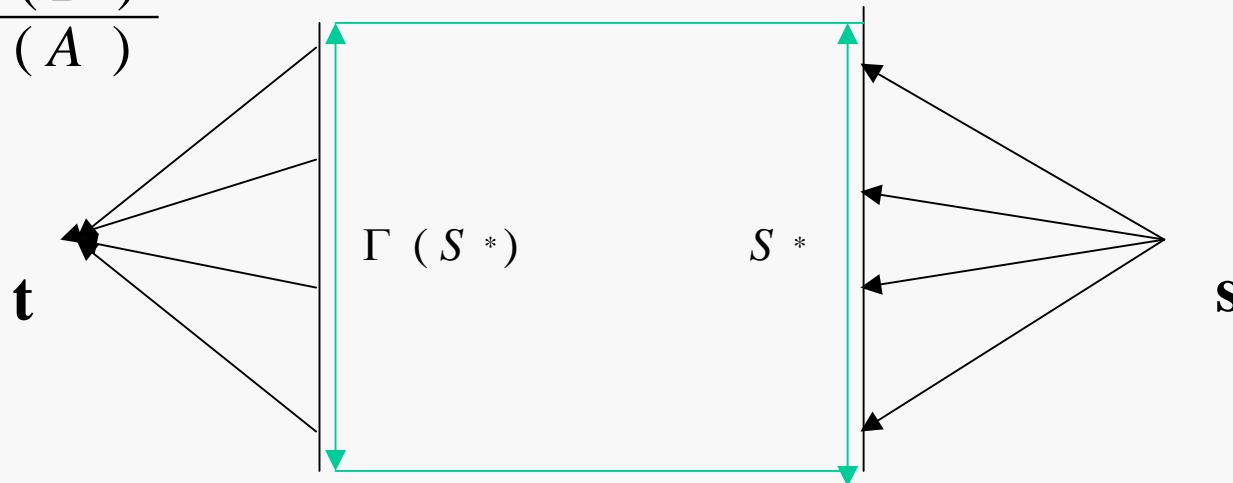
Lemme 1 : s est une coupe minimum ssi

$$\forall S \subseteq A, \quad p(S) \leq m(\Gamma(S))$$

Itérations dans le graphe DPSV

Lemme2 : on peut déterminer x^* avec n Max-Flot itérations .
 $x^* = \min_{S \subseteq A} \frac{m(\Gamma(S))}{p(S)}$ pour S^*

$$x = \frac{m(B)}{p(A)}$$

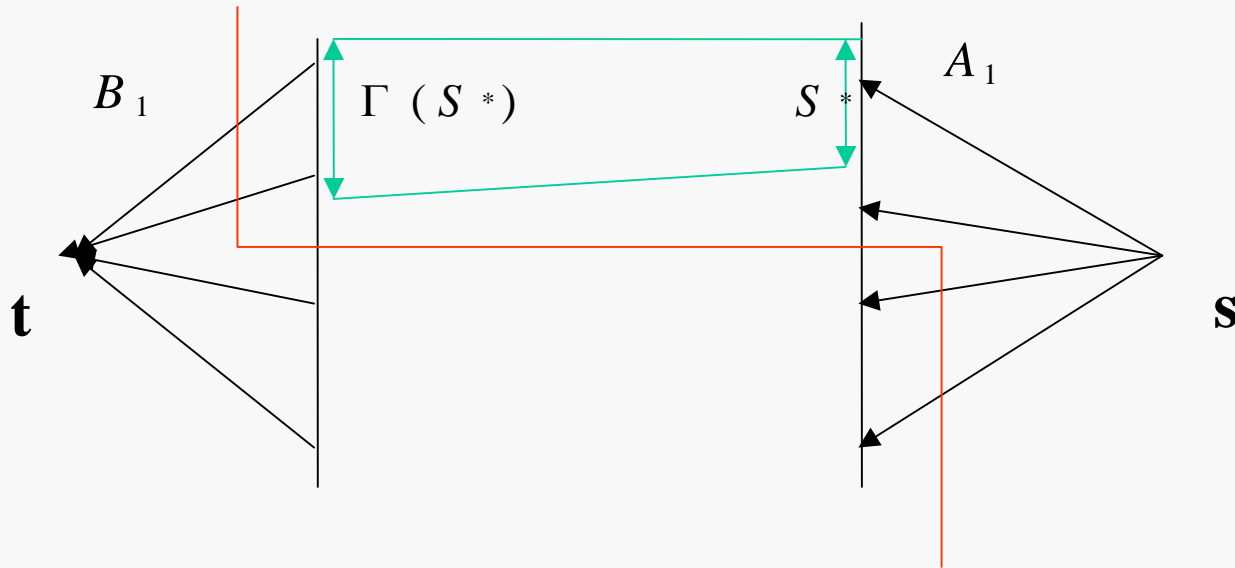


Si $\{s\}$ est une coupe minimum, alors $x=x^*$.

Réursion DPSV avec Max-Flot

Lemme 3: si $\{s\}$ n'est pas une coupe minimum, mais $\{s+A_1+B_1\}$ alors :

$$S^* \subseteq A_1$$



**Réappliquer le raisonnement sur (A_1, B_1) .
Au plus n itérations.**

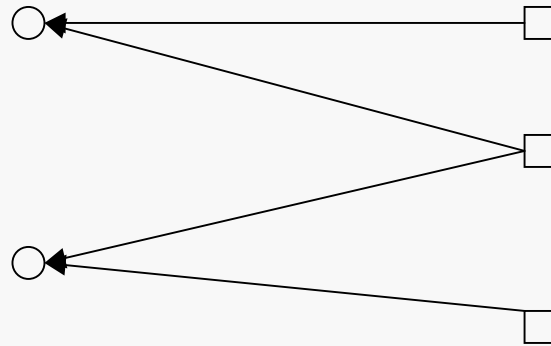
Nombre d'itérations de DPSV

Lemme 3: A chaque itération les prix sont de la forme a/b où

$$b \leq \Delta = n \cdot U^n \quad \text{où} \quad U = \text{Max}_{i,j} u_{i,j}$$

$$\frac{u_{1,1}}{p_1} = \frac{u_{1,2}}{p_2}$$

$$\frac{u_{2,1}}{p_2} = \frac{u_{2,3}}{p_3}$$



$$p_3 = \frac{u_{2,3}}{u_{2,2}} \cdot \frac{u_{1,2}}{u_{1,1}} \cdot p_1$$

$$m(\Gamma(S)) = p(S) = \sum_{j \in S} p_j = p_j \cdot \sum_{k \in S} \frac{a_k}{b_k}$$

$$p_j = \frac{a_j}{b_j} = \frac{m(\Gamma(S))}{\sum_{k \in S} \frac{a_k}{b_k}} \quad \text{et} \quad b \leq \Delta$$

Analyse de DPSV

Lemme 4: Au plus $m(B) \cdot n^2 \cdot \Delta^2 \cdot T_{MaxFlot}$

$$p_j = \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ et } b, d \leq \Delta \text{ alors } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geq \frac{1}{\Delta^2}$$

Algorithme Pseudo-polynomial.

Version Polynomiale:

• Fixer ε tel que:

$$S^* \subseteq S \subseteq A, \quad p(S) + \varepsilon \leq m(\Gamma(S)) \leq p(S) + |S| \cdot \varepsilon$$

• Augmenter les prix de ε

• Surplus $\leq n \cdot \varepsilon$

Version polynomiale de DPSV

Version Polynomiale: $\varepsilon = \frac{m(B)}{2n}$

• DPSV implique le surplus est $\leq n \cdot \varepsilon = \frac{m(B)}{2}$

• Diviser ε par 2 et après i itérations le surplus est $\leq \frac{m(B)}{2^i}$

• Après $O(\log(m(B) \cdot \Delta^2))$ surplus $\frac{m(B)}{2^i} \leq \frac{1}{\Delta^2}$

• Appliquer DPSV avec $\varepsilon = 0$