

Jeux sous forme extensive

Michel de Rougemont,
University Paris II & LRI

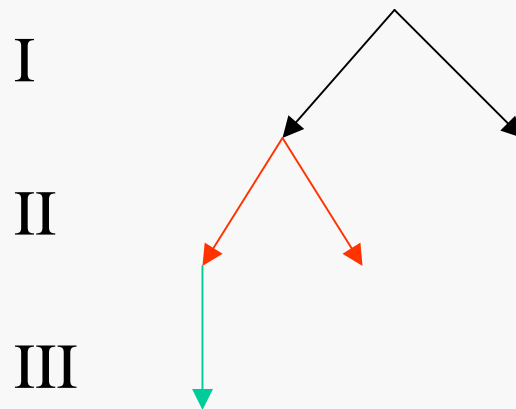


Jeux sous forme extensive

Définition: un jeu extensif à information parfaite

$$(N, H, P, U_i)$$

- N joueurs et $(a_{i,j})$ joueur i et action j
- H ensemble de séquences d'actions des joueurs
- P (play) fonction de H vers un joueur
- Utilités $U_i : H \rightarrow \text{Nat}$ (Entiers Naturels)



Stratégies et Equilibres

Définition: une stratégie du joueur i dans

$$(N, H, P, U_i)$$

$$S : H \rightarrow \{a_{i,j}\}$$

définie pour tout h tel que $P(h) = i$

Définition: (S_i^*) est un équilibre de Nash dans

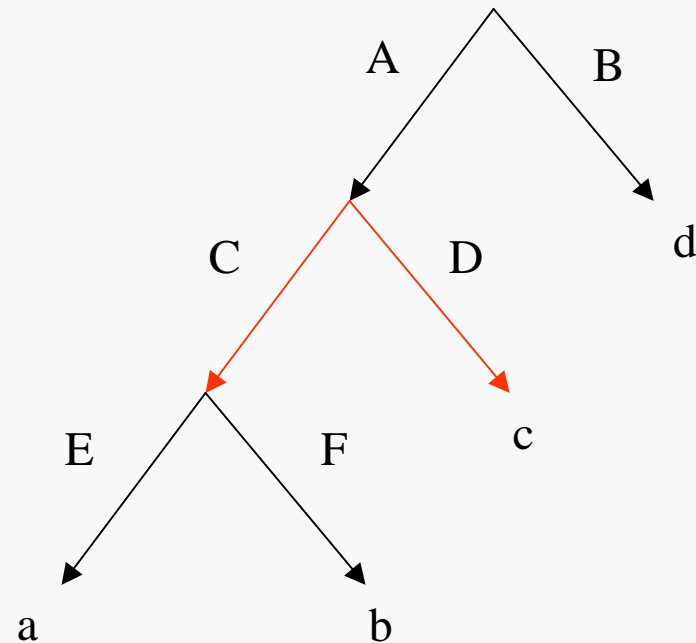
$$(N, H, P, U_i)$$

$$si \quad \forall i, S_i \quad U_i(S_i^*) \geq U_i(S_i)$$

Jeux sous forme extensive

Forme stratégique:

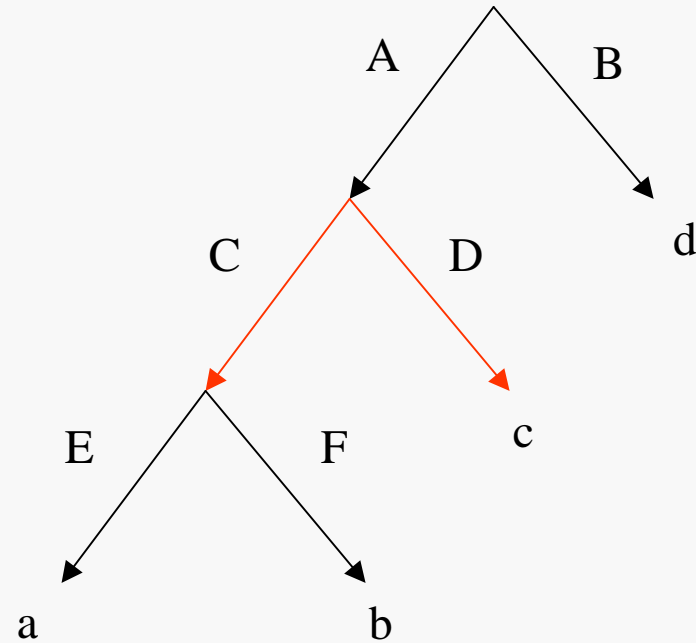
	C	D
AE	a	c
AF	b	c
BE	d	d
BF	d	d



Jeux sous forme extensive

Forme stratégique réduite:

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
B	d	d

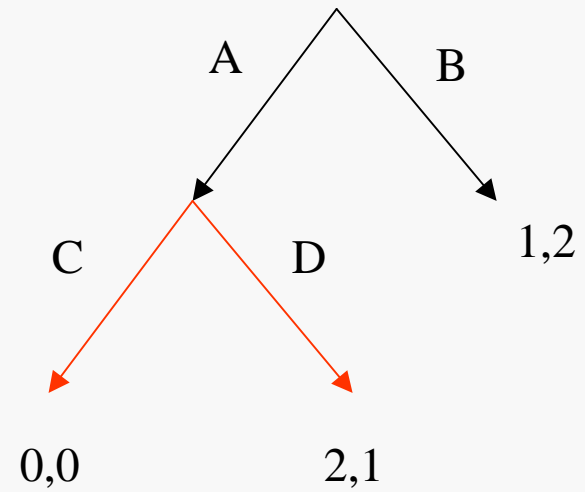


Exemple

Deux équilibres:

(A,D) gain (2,1)

(B,C) gain (1,2)



Comment caractériser (A,D) ?

Equilibre de sous-jeu parfait

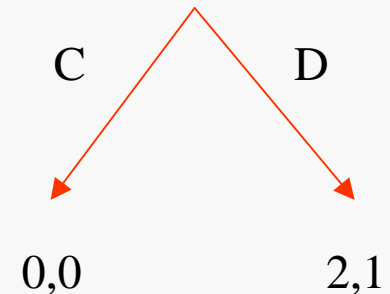
Définition : un sous-jeu limité à h du jeu $\Gamma = (N, H, P, U_i)$ est $\Gamma(h) = (N, H \uparrow h, P \uparrow h, U_i \uparrow h)$ où:

• $H|h$ est l'ensemble des séquences h' telles que (h, h') est dans H .

Définition : Un équilibre de sous-jeu parfait est S_i^* si $\forall i, \forall h, \forall S_i$ de $\Gamma(h) \quad U_i(S_i^* \uparrow h) \geq U_i(S_i)$

Exemple: dans le sous-jeu C n'est pas optimal pour II.

Un seul équilibre en sous-jeu parfait.



Existence d'un équilibre de sous-jeu parfait

Lemme : S_i^* est un équilibre de sous-jeu parfait dans

$$\Gamma = (N, H, P, U_i)$$

si $\forall i, \forall h, \forall S_i$ de $\Gamma(h)$

où $S_i \neq S_i^*$ au point h *uniquement* .

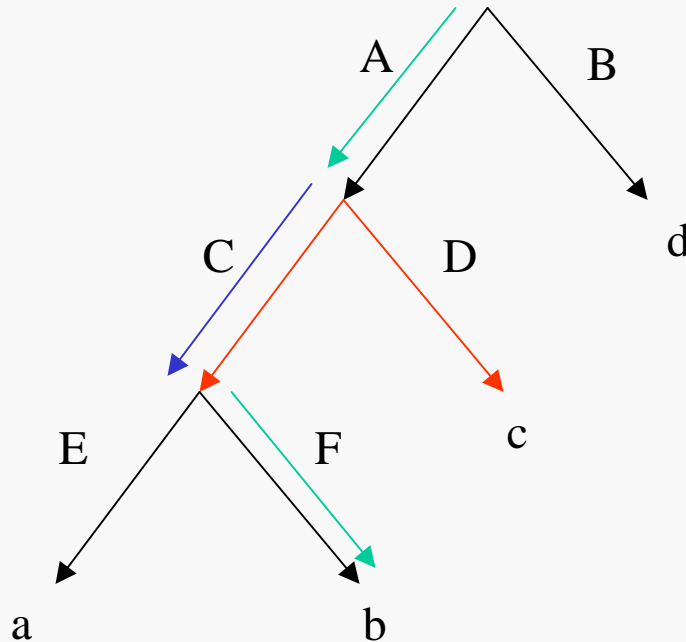
$$U_i(S_i^* \uparrow h) \geq U_i(S_i)$$

One deviation property: considérer le point le plus profond dans l'arbre. Si on peut changer de stratégie et obtenir un meilleur gain, alors la stratégie initiale n'est pas optimale.

Existence d'un équilibre de sous-jeu parfait

Lemme : tout jeu sous forme extensive admet un équilibre de sous-jeu parfait dans $\Gamma = (N, H, P, U_i)$

Backwards induction: considérer le point le plus profond dans l'arbre. Déterminer la situation optimale pour chacun des joueurs.



Exemple: Jeu Nord-Est (Gale)

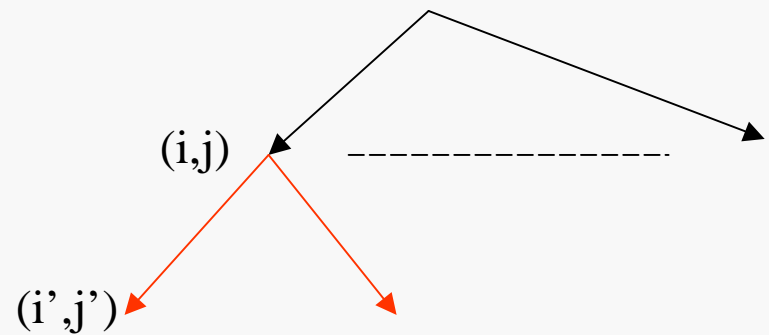
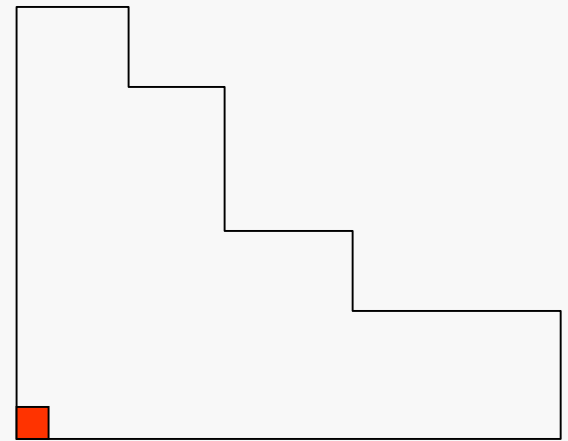
$$\Gamma = (N, H, P, U_i)$$

Entrée: n,m

Etat du jeu:

$$(i_1, j_1), (i_2, j_2) \dots (i_k, j_k)$$

Gain: 1 ou -1 si le joueur choisit (1,1) et perd.



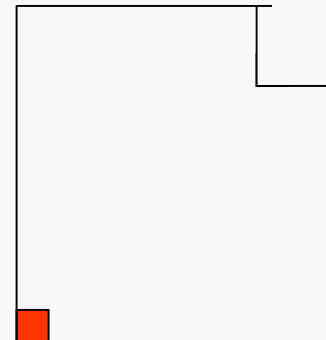
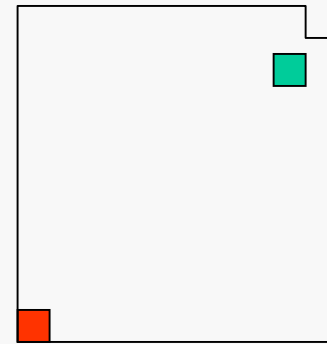
Stratégie gagnante de Nord-Est

Le jeu est fini $O(n.m)$.

Soit I soit II gagne.

Supposons que II gagne. Si I joue (n,m) , II joue sa stratégie gagnante et la première action est (i,j) . Alors I gagne en jouant (i,j) directement, contradiction.

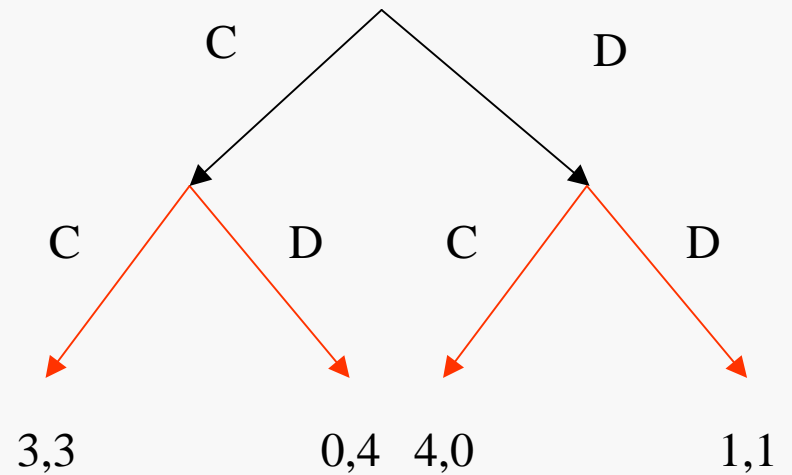
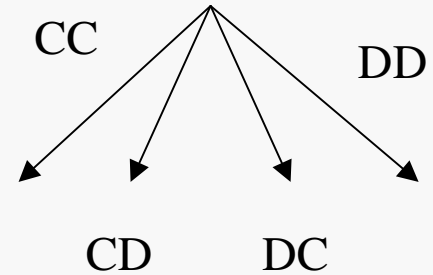
Stratégie gagnante de I inconnue.



Jeux répétés

Dilemme des prisonniers:

	C	D
C	(3,3)	(0,4)
D	(4,0)	(1,1)



Jeux répétés

Définition: un jeu répété à information parfaite (A, H, U_i)

- A matrice du jeu simple, N joueurs et

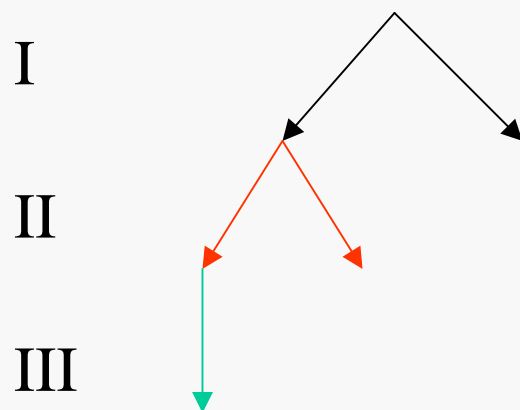
- $(a_{i,j})$ joueur i et action j

- H ensemble de séquences finies de vecteurs

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,k} \\ a_{3,l} \end{pmatrix}$$

- Utilités : $U_i : H \rightarrow \mathbb{N}$

Somme des utilités du jeu simple.



Stratégies et Equilibres

Définition: une stratégie du joueur i dans (A, H, U_i)

$$S : H \rightarrow \{ a_{i,j} \}$$

définie pour tout $h \in H$

Définition: (S_i^*) est un équilibre de Nash dans (A, H, U_i)

$$si \quad \forall i, S_i \quad U_i(S_i^*) \geq U_i(S_i)$$

Existence d'un équilibre

Lemme : Dans le D.P. S_i^* est un équilibre de sous-jeu parfait dans (A, H, U_i) si chaque joueur joue un N.E .

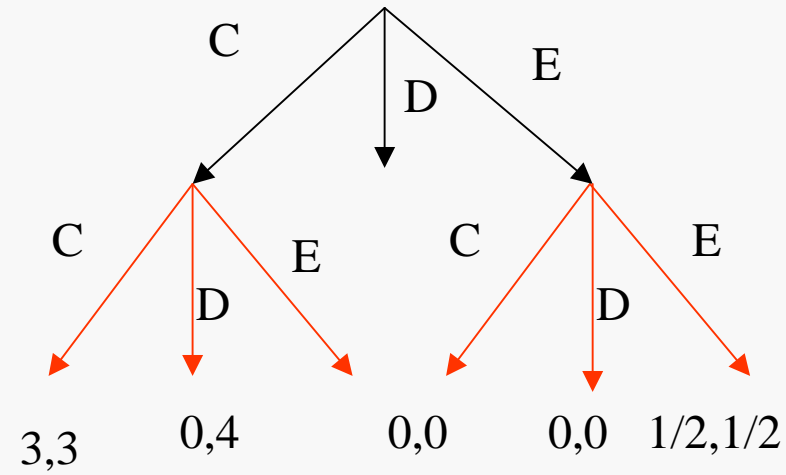
Backwards induction.

A partir des feuilles, on définit les stratégies.

Dilemme répété

Dilemme modifié des prisonniers:

	C	D	E
C	(3,3)	(0,4)	(0,0)
D	(4,0)	(1,1)	(0,0)
E	(0,0)	(0,0)	(1/2,1/2)



Equilibre ?

Dilemme répété modifié

Représentation extensive:

Lemme: pour un horizon T , il existe un équilibre de sous-jeu parfait (C,C) sauf pour les 3 dernières étapes (D,D).

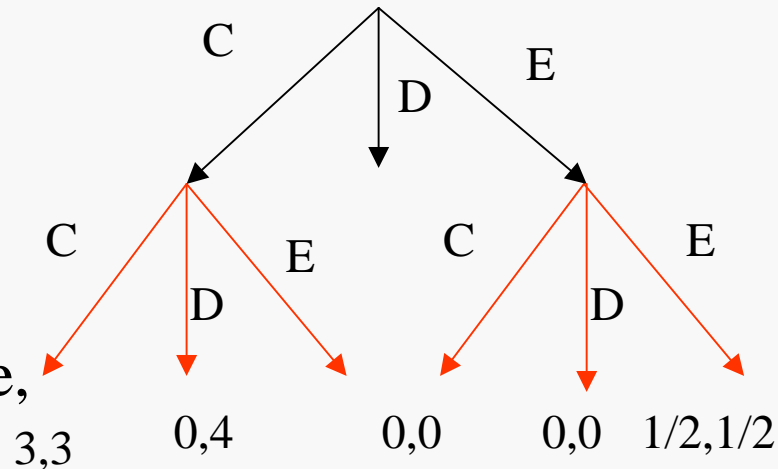
Si l'autre joueur ne joue pas cette stratégie, on joue E.

H1: (C,C), (D,D), (D,D), (D,D) \rightarrow Gain=6

Non-coopération:

H2: (C,D), (E,E), (E,E), (E,E) \rightarrow Gain=5.5

Gain moyen = $3(T-3) + 3/T = 3 - 6/T$



Rationalité limitée

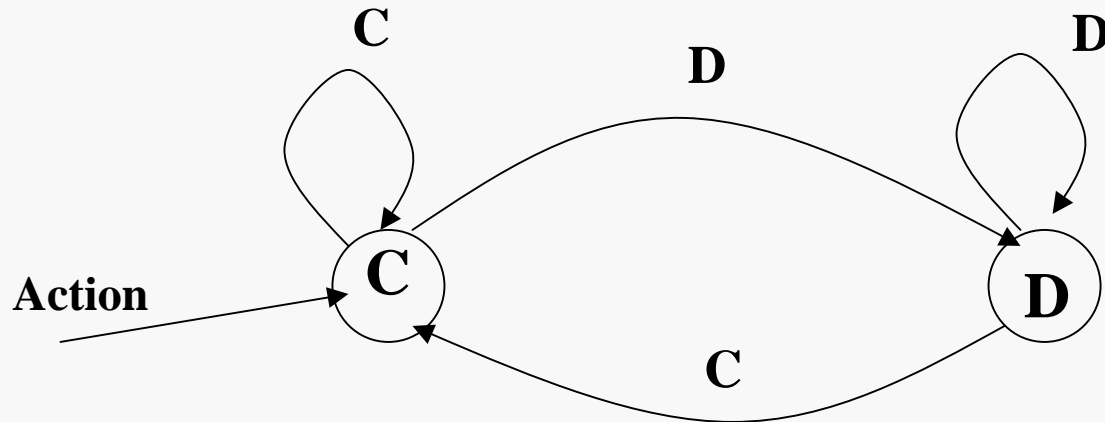
Définition: un joueur à rationalité limitée pour

$$(N, H, P, U_i)$$

est un automate:

- S ensemble des états
- S_0 l'état initial
- A actions
- $\delta : S \cdot A \rightarrow S$

Tit for Tat



Interprétation: on commence dans l'état C et on duplique la décision de l'autre joueur à l'instant précédent.

Lemme: TfT est optimal si l'adversaire a au plus $N-1$ états pour un horizon N .

Si l'adversaire dévie et joue k fois D \rightarrow Gain: $4 + 1(k-1) + 0 \cdot d$
Où $d=0$ si on est à la fin.

Tit for Tat

Optimalité: Au milieu du jeu:

Coopération $\rightarrow 3k+3$

Non-coopération $\rightarrow 3+k$

Si $k=1$, il vaut mieux trahir (D).

Si l'automate a $N-1$ états, on boucle avant d'atteindre l'horizon N . Donc on applique C.

Dilemme borné du prisonnier

Lemme: Pour un horizon N , si les joueurs ont un automate de taille 2^{N-1} alors le seul équilibre est (D) itéré.

Lemme: Pour un horizon N , si les joueurs ont un automate de taille $2^{\varepsilon \cdot N}$ alors il existe un équilibre approx. (C) itéré, de gain $3 - \varepsilon'$.

Jeux extensif à information incomplète

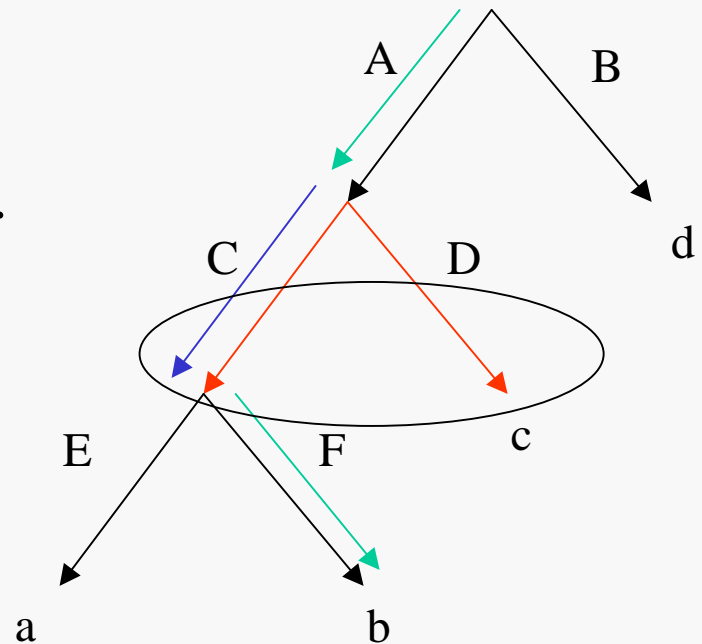
H est partiellement connu.

Définition: Un jeu extensif à information incomplète est tel que

$$(N, H, P, U_i)$$

- N joueurs
- H est une séquence d'actions et d'informations
- P et U_i sont comme précédemment.

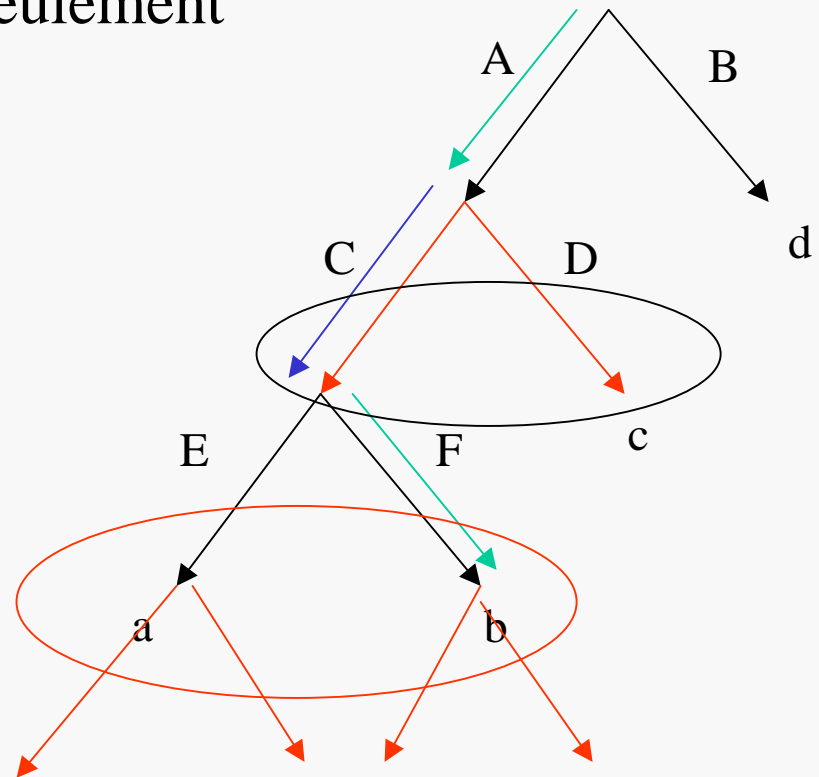
Exemple: C ou D n'est pas connu de I. Les nœuds sont dans le même ensemble d'information.



Jeux extensif à information incomplète

Perfect recall: tout l'historique est connu.

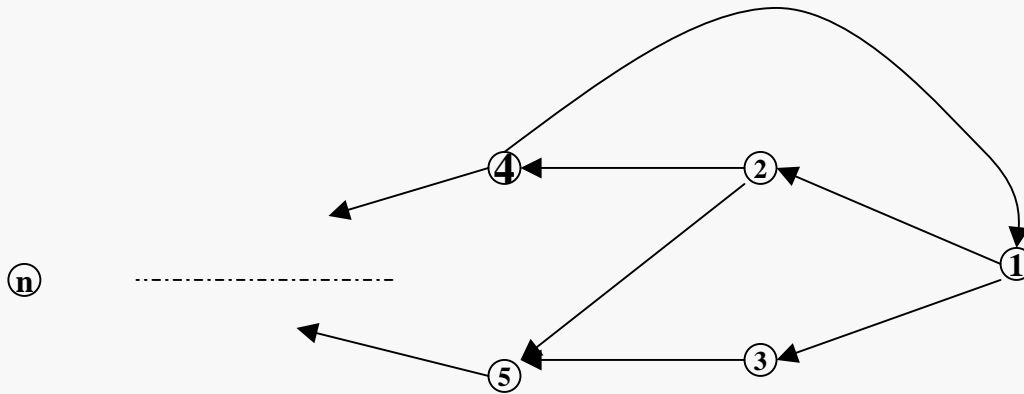
Imperfect recall: une partie seulement de l'historique est connue.



Cas classiques

Problème: comment traverser un graphe?

- Déterministe
- Probabiliste
- Non-déterministe
- Information complète ou incomplète



Cas classiques

Problème: comment traverser un graphe à information incomplète?

- Déterministe
- Probabiliste
- Non-déterministe

