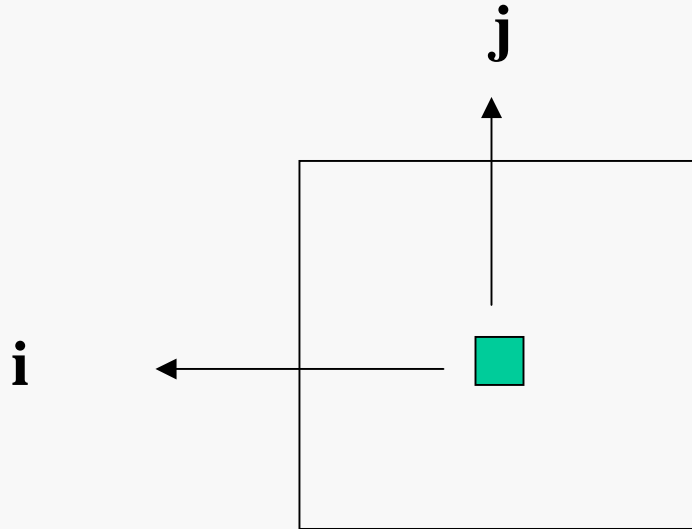


Autres équilibres

Michel de Rougemont, LRI , University Paris II



Equilibres corrélés



Distribution sur les paires de stratégies pures:

On tire un (i,j) et donne i à I et j à II.

L'équilibre est corrélé lorsqu'ils n'ont pas intérêt à devier.

BoS : bataille des sexes

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

Deux équilibres de Nash:

(2,1) et (1,2)

Soit la distribution {0.5, 0.5} sur ces deux équilibres

Gain de I: $2 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 3/2$

Gain de II: $3/2$

Distribution Ω sur (x,y)

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

On tire (i,j) avec proba. $x_{i,j}$ (loi Ω)

Conditionnellement sur le choix j ,
L'espérance du choix i est maximum:

Soit $a_{i,j}$ le gain de I pour le choix (i,j) .

$$\sum_j a_{i,j} x_{i,j} \geq \sum_j a_{k,j} x_{i,j}$$

Soit $b_{i,j}$ le gain de II pour le choix (i,j) .

$$\sum_i b_{i,j} x_{i,j} \geq \sum_i b_{i,m} x_{i,j}$$

Équilibres corrélés sont faciles à calculer

La distribution {0.5, 0.5} sur les deux équilibres de Nash est un équilibre corrélé.

Remarque: tout équilibre de Nash est corrélé.

On peut trouver un équilibre corrélé par programmation linéaire. On peut aussi Maximiser

$$\sum_{i,j} a_{i,j} x_{i,j}$$

Jeux succincts

Dans un jeu à N joueurs, l'entrée est de taille k^N donc exponentielle.

Définition: un jeu succinct est : $G=(I,T,U)$

• Pour x dans I , $T(x)$ est le type :

(t_1, t_2, \dots, t_n) où t_i est le nombre de décisions de i

• Pour x dans I , $s=(s_1, s_2, \dots, s_n)$ où $t_i \geq s_i$

$$U(x, i, s) = u^i(s)$$

• T et U sont P calculables

Equilibres corrélés dans les jeux succincts

Si $T(x)$ est borné dans $|x|$, alors G est de « type polynomial ».

Conjecture: les équilibres corrélés sont faciles à calculer pour les jeux succincts.

Théorème (Papadimitriou STOC 05): Si le jeu succinct admet $*$, alors il existe un schéma polynomial pour les équilibres corrélés.

$*$: il existe un algo. poly. qui calcule $E_{\pi}(u^P(s))$
pour une *distribution produit* π

Exemples de jeux succincts

Jeux symétriques: les décisions des joueurs sont identiques, l'utilité dépend du nombre de décisions similaires.

k^N remplacé par N^k

$$\#C_1^{n_1} \cdot C_2^{n_2} \dots C_k^{n_k} \leq N \dots N = N^k$$

Jeux de congestion/potentiel:

Jeux graphiques:

Exemples de jeux succincts

Jeux symétriques: les décisions des joueurs sont identiques, l'utilité dépend du nombre de décisions similaires.

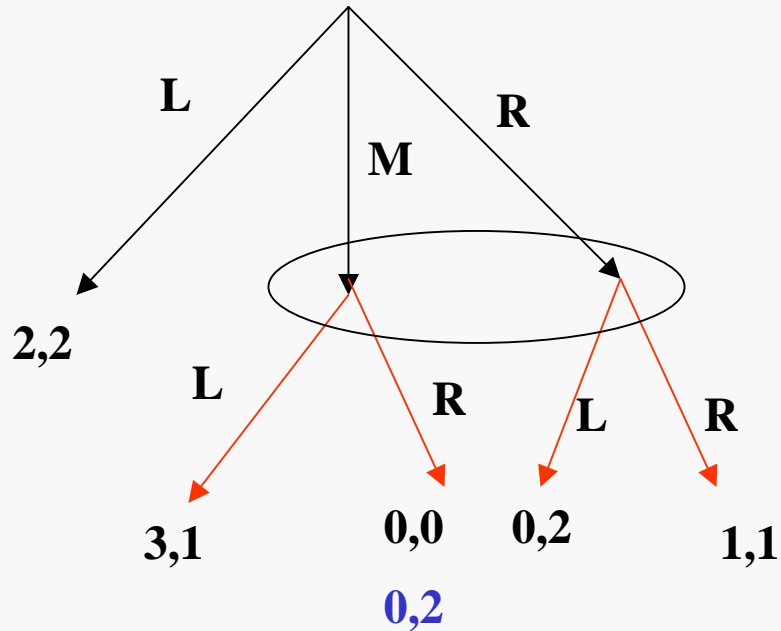
k^N remplacé par N^k

$$\#C_1^{n_1} \cdot C_2^{n_2} \dots C_k^{n_k} \leq N \dots N = N^k$$

Jeux de congestion/potentiel:

Jeux graphiques:

Equilibres séquentiels



(L,R) Nash non parfait

(M,L) Nash parfait

B (Belief): distribution sur les historiques h conduisant à I.

Jeux extensifs à information incomplète

Définition: une situation (assessment) pour un jeu sous forme extensive à information incomplète est (S, B) :

S : stratégies des joueurs dans un jeu à information incomplète

B : distribution sur h pour chaque I , et h menant à I .

I : ensemble d'information

Définition: une situation est séquentiellement rationnelle si chaque joueur prend la décision qui maximise son espérance.

B (Belief): p pour M , $1-p$ sur R

Espérance de L pour II : $2p \cdot +(1-p)$, versus $p+2(1-p)$ pour R .

Jeux de Bayes (incomplets)

Définition: jeu extensif à information complète où chaque joueur a une information privée, son type:

$$\Theta_i = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}$$

$$\Pr[\theta_{i,l} / \theta_{j,m}] \text{ connues}$$

Jeux de Bayes

Definition (Bayesian Game)

A **Bayesian game** is a strategic form game with incomplete information. It consists of:

- A set of players $N = \{1, \dots, n\}$ for each $i \in N$
 - An action set A_i , ($A = \times_{i \in N} A_i$)
 - A type set Θ_i , ($\Theta = \times_{i \in N} \Theta_i$)
 - A probability function, $p_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(\Theta_{-i})$
 - A payoff function, $u_i : A \times \Theta \rightarrow \mathbf{R}$
- The function p_i is what player i believes about the types of the other players
- Payoff is determined by outcome A and type Θ

Stratégies

Definition

Bayesian game $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{\Theta_i\}_{i \in N}, \{p_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ is **finite** if N , A_i , and Θ_i are all finite

Definition(pure strategy, mixed strategy)

Given a Bayesian Game $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{\Theta_i\}_{i \in N}, \{p_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$,
A **pure strategy** for player i is a function which maps player i 's type into its action set

$$a_i : \Theta_i \rightarrow A_i$$

A **mixed strategy** for player i is

$$\alpha_i : \Theta_i \rightarrow \Delta(A_i) : \theta_i \rightarrow \alpha_i(\cdot | \theta_i)$$

Equilibres de Bayes

Definition(Bayesian Equilibrium)

A **Bayesian equilibrium** of a Bayesian game is a mixed strategy profile $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$, such that for every player $i \in N$ and every type $\theta_i \in \Theta_i$, we have

$$\alpha_i(\cdot | \theta_i) \in \arg \max_{\gamma \in \Delta(A_i)} \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i} | \theta_i) \sum_{a \in A} \{ \prod_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_j(a_j | \theta_j) \} \gamma(a_i) u_i(a, \theta)$$

- Bayesian equilibrium is one of the mixed strategy profiles which maximize the each players' expected payoffs for each type.

Equilibres de Bayes

Remark

- This equilibrium is the solution of the Bayesian game. This equilibrium means the best response to each player's belief about the other player's mixed strategy.

-In the definition of Bayesian equilibrium, we need to specify strategies for each type of a player, even if in the actual game that is played all but one of these types are non-existent

Example — Battle of Sexes

Battle of Sexes with incomplete information

(1) $N = \{1, 2\}$: player1 and player2 (wife and husband)

(2) $A_1 = A_2 = \{B, S\}$ (Ballet and Soccer)

(3) $\Theta_1 = \{x\}$, $\Theta_2 = \{l, h\}$

- Type x: player1 loves going out with player2

- Type l: player2 loves going out with player1

- Type h: player2 hates going out with player1

(4) $p_1(l|x) = p_1(h|x) = 1/2$, $p_2(x|l) = p_2(x|h) = 1$

(5) u_1 and u_2 are given in the game matrix on the next slide

Example — Battle of Sexes

Matrices pour BoS

	B	S
B	2,1	0,0
S	0,0	1,2

type l

	B	S
B	2,0	0,2
S	0,1	1,0

type h

- Since player 1 has only type x , we omit the parameter x in the payoff functions u_i , $i = 1, 2$.
- These matrices define the payoff functions:
 $u_1(B, B, l) = 2$, $u_2(B, B, l) = 1$, $u_1(B, B, h) = 2$, ...and so on

Example — Battle of Sexes

Calculate the Bayesian Equilibrium

Player 2 of type 1: Given player 1's strategy α_1

- Action B: $\alpha_2(B | l) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x | l) \{ \alpha_1(B) \alpha_2(B | l) u_2(B, B, l) + \alpha_1(S) \alpha_2(B | l) u_2(S, B, l) \} \\ &= \alpha_1(B) \end{aligned}$$

- Action S: $\alpha_2(S | l) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x | l) \{ \alpha_1(B) \alpha_2(S | l) u_2(B, S, l) + \alpha_1(S) \alpha_2(S | l) u_2(S, S, l) \} \\ &= 2(1 - \alpha_1(B)) \end{aligned}$$

Best response is B if $\alpha_1(B) > 2/3$, S if $\alpha_1(B) < 2/3$
--

Example — Battle of Sexes

Player 2 of type h: Given player 1's strategy α_1

- Action B: $\alpha_2(B | h) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x | h) \{ \alpha_1(B) \alpha_2(B | h) u_2(B, B, h) + \alpha_1(S) \alpha_2(B | h) u_2(S, B, h) \} \\ &= (1 - \alpha_1(B)) \end{aligned}$$

- Action S: $\alpha_2(S | h) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_2(x | h) \{ \alpha_1(B) \alpha_2(S | h) u_2(B, S, h) + \alpha_1(S) \alpha_2(S | h) u_2(S, S, h) \} \\ &= 2\alpha_1(B) \end{aligned}$$

Best response is B if $\alpha_1(B) < 1/3$, S if $\alpha_1(B) > 1/3$
--

Example — Battle of Sexes

Player 1: Given player 2's strategy $\alpha_2(.|l)$ and $\alpha_2(.|h)$

-Action B: $\alpha_1(B) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_1(l|x)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B|l)u_1(B,B,l) + \alpha_1(B)\alpha_2(S|l)u_1(B,S,l)\} \\ &\quad + p_1(h|x)\{\alpha_1(B)\alpha_2(B|h)u_1(B,B,h) + \alpha_1(B)\alpha_2(S|h)u_1(B,S,h)\} \\ &= \alpha_2(B|l) + \alpha_2(B|h) \end{aligned}$$

-Action S: $\alpha_1(S) = 1$

$$\begin{aligned} \text{EP} &= p_1(l|x)\{\alpha_1(S)\alpha_2(B|l)u_1(S,B,l) + \alpha_1(S)\alpha_2(S|l)u_1(S,S,l)\} \\ &\quad + p_1(h|x)\{\alpha_1(S)\alpha_2(B|h)u_1(S,B,h) + \alpha_1(S)\alpha_2(S|h)u_1(S,S,h)\} \\ &= 1 - \frac{\alpha_2(B|l) + \alpha_2(B|h)}{2} \end{aligned}$$

Best response is B if $\alpha_2(B|l) + \alpha_2(B|h) > 2/3$

Best response is S if $\alpha_2(B|l) + \alpha_2(B|h) < 2/3$

Example - Battle of Sexes

Bayesian equilibrium for pure strategy

- Assume that both types of player 2's strategies are pure strategy, and check the all combination of strategies pair.

$$(\alpha_2(B | l), \alpha_2(B | h)) = (1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$$

- Condition of Bayesian equilibrium is not satisfied by:

$$(\alpha_2(B | l), \alpha_2(B | h)) = (1,1), (0,1), (0,0)$$

- Bayesian equilibrium for pure strategy is given by:

$$(\alpha_1(B | x), \alpha_2(B | l), \alpha_2(B | h)) = (1,1,0)$$

Example — Battle of Sexes

Bayesian equilibrium for mixed strategy

- There is no equilibrium in which both types of player 2 mixes. (Because, if both type of player 2 mixes, $\alpha_1(B)$ should be $2/3$ and $1/3$ in the equilibrium. This is contradiction!)
- Suppose only type l mixes. Then, $\alpha_1(B) = 2/3$. This implies that strategy of player 1 mixes, i.e. $\alpha_2(B | l) + \alpha_2(B | h) = 2/3$.
- Type h of player 2 does not mix and $\alpha_2(B | l) \geq 0$. $\alpha_2(B | h) = 0$.
- Bayesian equilibrium is given by:

$$(\alpha_1(B | x), \alpha_2(B | l), \alpha_2(B | h)) = (2/3, 2/3, 0)$$

- Similarly, Bayesian equilibrium when type h mixes is given by:

$$(\alpha_1(B | x), \alpha_2(B | l), \alpha_2(B | h)) = (1/3, 0, 2/3)$$