Master MPRI

Rappels : dualité de la programmation linéaire

Michel de Rougemont

http://www.lri.fr/~mdr

mdr@lri.fr

Programmation linéaire et dualité

Introduction au Simplex

Résolution d'un système linéaire de maximisation:

$$\text{Max } \ c^t.x$$

$$A.x \leq b$$

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$$

- Introduction de variables d'écart
- Solution initiale
- Itération pour augmenter la valeur de la solution.
- Terminaison

Exemple d'itération

$$\text{Max} \quad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

Itérations possibles

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$
$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$
$$z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8, z = 0$$

Augmentons $x_1 = 1, x_1 = 2, x_1 = 3$

Les contraintes sont : $x_1 \leq 5/2 \leq 8/3 \leq 11/4$

Nouvelle solution:

$$x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1/2, z = 25/2$$

Nouveau système

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5/2 \qquad -3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 \quad - x_2 \qquad -2x_3 \\
x_6 &= 8 \; - 3x_1 \quad - 4x_2 \qquad -2x_3 \\
z &= \quad 5x_1 \quad + 4x_2 \qquad +3x_3
\end{aligned}
$$

Substituons x_1

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5/2 \qquad -3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2 \\
x_5 &= 11 - 4(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) \quad - x_2 \qquad -2x_3 \\
x_6 &= 8 \; - 3(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) \quad - 4x_2 \qquad -2x_3 \\
z &= \quad 5(5/2 - 3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2) \quad + 4x_2 \qquad +3x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5/2 \quad -3x_2/2 - x_3/2 - x_4/2 \\
x_5 &= 1 \quad +5x_2 \qquad +2x_4 \\
x_6 &= 1/2 \quad +x_2/2 - x_3/2 + 3x_4/2 \\
z &= 25/2 - 7x_2/2 + x_3/2 - 5x_4/2
\end{aligned}
$$

Itération 2

Augmentons x_3

Les contraintes sont: $x_3 \leq 1 \leq 5$

$$x_1 = 5/2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0, z = 13$$

Nouveau système:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_2 + 3x_4 - 2x_6 \\
x_1 &= 2 - 2x_2 - 2x_4 + x_6 \\
x_5 &= 1 + 5x_2 + 2x_4 \\
z &= 13 - 3x_2 - x_4 - x_6
\end{aligned}$$

La valeur z ne peut plus être augmentée: optimum.

Méthode générale

Mise sous forme normale.

Itération:

- Choix d’un pivot qui augmente la solution.
- Détection de l’optimum ou d’infaisabilité

Problèmes possibles:

- Solution non bornée
- Infaisabilité
- Cycles
- Solution initiale

Difficultés du Simplex

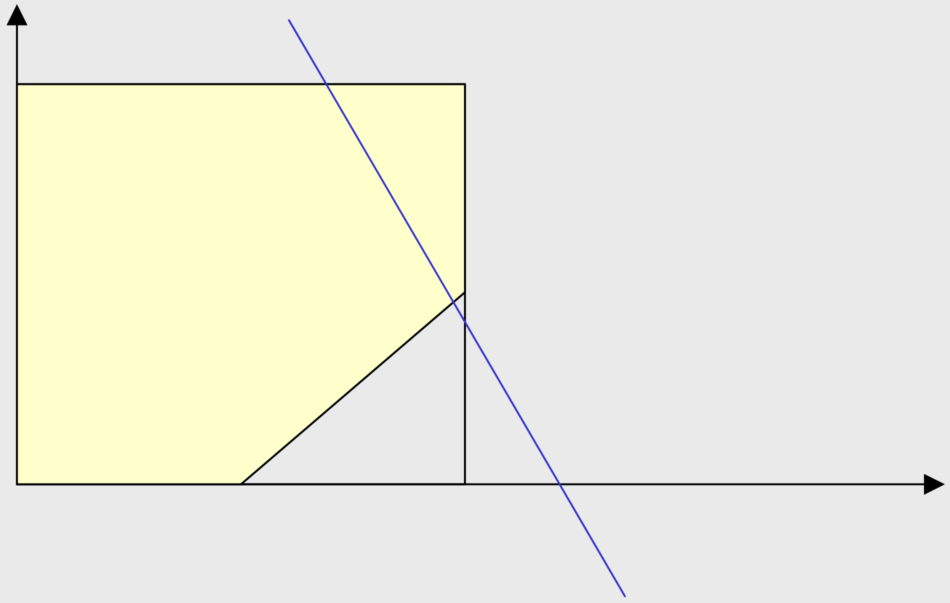
•Initialisation : peut-on toujours trouver une solution initiale?

•Itération : peut-on toujours itérer?

•Terminaison : les itérations terminent-elles toujours?

Interprétation géométrique

- Contrainte sur n variables : hyperplan de dimension n
- Dimension 2 : droites
- Dimension 3 : plans



$$2 > x_1 > 0$$

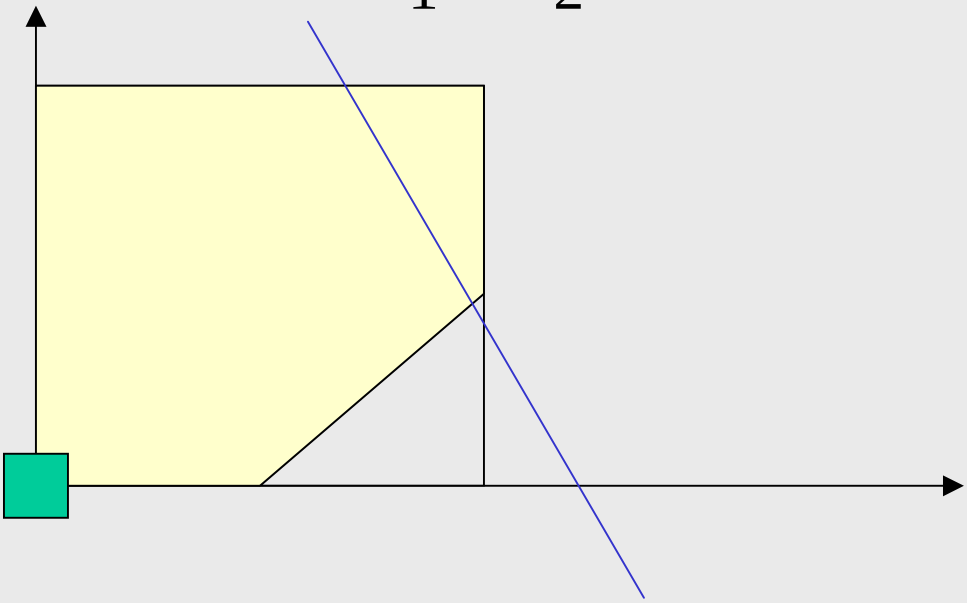
$$2 > x_2 > 0$$

$$-x_1 + x_2 > -1$$

$$Max \quad 2x_1 + x_2$$

Interprétation géométrique

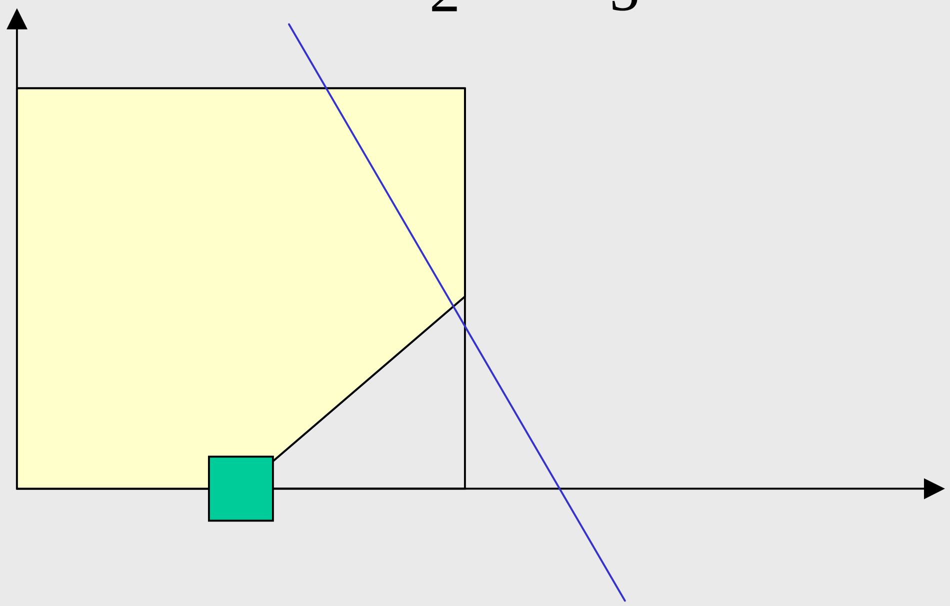
$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 - x_1 \\
x_4 &= 2 - x_2 \\
x_5 &= 1 - x_1 + x_2 \\
z &= 2x_1 + x_2
\end{aligned}
$$



X1 rentre X5 sort

Interprétation géométrique

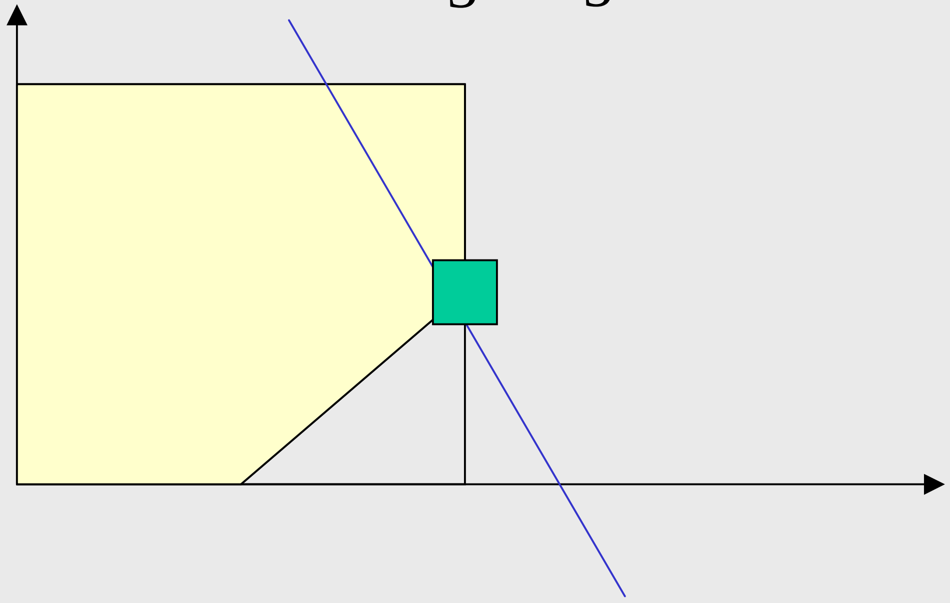
$$x_1 = 1 + x_2 - x_5$$
$$x_3 = 1 - x_2 + x_5$$
$$x_4 = 2 - x_2$$
$$z = 2 + 3x_2 - 2x_5$$



X2 rentre X3 sort

Interprétation géométrique

$$x_2 = 1 - x_3 + x_5$$
$$x_1 = 2 - x_3$$
$$x_4 = 1 + x_3 - x_5$$
$$z = 5 - 3x_3 + x_5$$



X5 rentre X4 sort

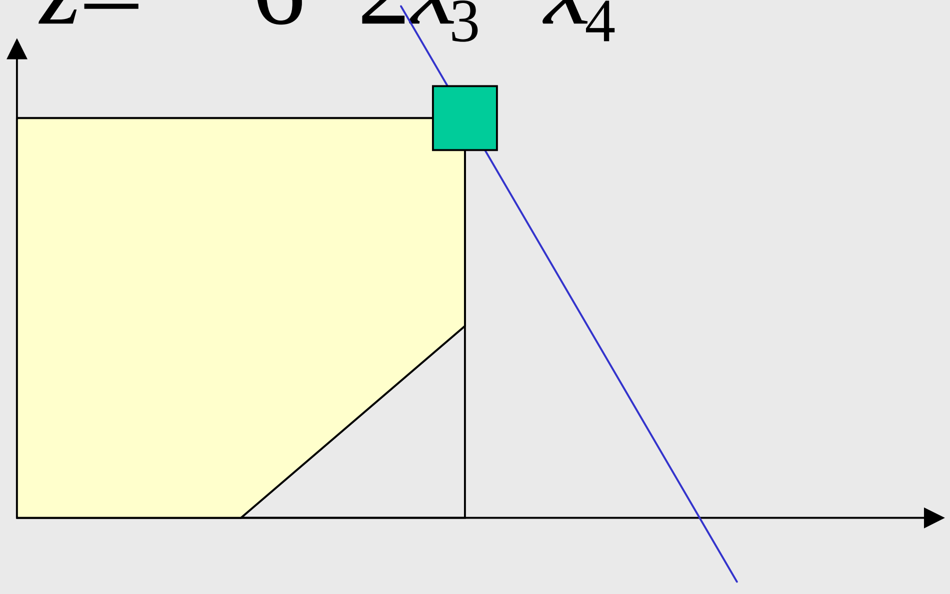
Interprétation géométrique

$$x_2 = 2 - x_4$$

$$x_1 = 2 - x_3$$

$$x_5 = 1 + x_3 - x_4$$

$$z = 6 - 2x_3 - x_4$$



Optimum

Difficultés d'itération

- Itération : peut-on toujours itérer?
  - Solution non bornée
  - Itération dégénérée
  - Cycle

- Solution non bornée:

$$x_2 = 5 + 2x_3 - x_4 - 3x_1$$
$$x_5 = 7 \qquad\qquad - 3x_4 - 4x_1$$

$$z = 5 + x_3 - x_4 - x_1$$

x_3 entre dans la base : seule borne est

$$x_3 \geq -5/2$$

Solution z arbitraire !

Itération dégénérée

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 1 && && -2x_3\\
x_5 &= 3 -2x_1 &&+4x_2 &&-6x_3\\
x_6 &= 2 +x_1 &&-3x_2 &&-4x_3\\
z &= \ 2x_1 &&-x_2 &&+8x_3
\end{aligned}
$$

x_3 entre dans la base. Seule contrainte est:

$$x_3 \leq 1/2$$

x_4 sort de la base (au choix). On obtient:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1/2 && && -x_4/2\\
x_5 &= \ -2x_1 &&+4x_2 &&+3x_4\\
x_6 &= \ +x_1 &&-3x_2 &&+2x_4\\
z &= 4 +2x_1 &&-x_2 &&-4x_4
\end{aligned}
$$

Itération dégénérée

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 1/2 \qquad\qquad\qquad\qquad -x_4/2 \\
x_5 &= -2x_1 + 4x_2 + 3x_4 \\
x_6 &= +x_1 - 3x_2 + 2x_4 \\
z &= 4 + 2x_1 - x_2 - 4x_4
\end{aligned}
$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_5 = x_6 = 0, x_3 = 1/2, \qquad z = 4$$

Solution dégénérée car $\quad x_5 = x_6 = 0$

Equation 2 impose: $\quad x_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2x_2 + 3x_4/2 - x_5/2 \\
x_3 &= 1/2 \qquad\quad -x_4/2 \\
x_6 &= -x_2 + 7x_4/2 - x_5/2 \\
z &= 4 + 3x_2 - x_4 \qquad - x_5
\end{aligned}
$$

Itération dégénérée

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_5 = x_6 = 0, x_3 = 1/2, \qquad z = 4$$

Solution identique à la précédente!
L'itération est dégénérée.

Remarque: l'itération suivante est aussi dégénérée et la suivante est optimale.

Cycles

$$x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4$$
$$x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4$$
$$x_7 = 1 - x_1$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

x_1 entre et x_5 sort.

$$x_1 = 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5$$
$$x_6 = -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5$$
$$x_7 = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5$$

$$z = 53x_2 + 41x_3 - 204x_4 - 20x_5$$

x_2 entre et x_6 sort.

$$x_2 = -0.5x_3 + 2x_4 + 0.25x_5 - 0.25x_6$$
$$x_1 = -0.5x_3 + 4x_4 + 0.75x_5 - 2.75x_6$$
$$x_7 = 1 + 0.5x_3 - 4x_4 - 0.75x_5 - 13.25x_6$$

$$z = 14.5x_3 - 98x_4 - 6.75x_5 - 13.25x_6$$

x_3 entre et x_1 sort.

Cycles

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 8x_4 + 1.5x_5 - 5.5x_6 - 2x_1 \\
x_2 &= -2x_4 - 0.5x_5 + 2.5x_6 + x_1 \\
x_7 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

$$z = 18x_4 + 15x_5 - 93x_6 - 29x_1$$

x_4 entre et x_2 sort.

$$
\begin{aligned}
x_4 &= -0.25x_5 + 1.25x_6 + 0.5x_1 - 0.5x_2 \\
x_3 &= -0.5x_5 + 4.5x_6 + 2x_1 - 4x_2 \\
x_7 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

$$z = 10.5x_5 - 70.5x_6 - 20x_1 - 9x_2$$

x_5 entre et x_3 sort.

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 9x_6 + 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\
x_4 &= -x_6 - 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \\
x_7 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

$$z = 24x_6 + 22x_1 - 93x_2 - 21x_3$$

x_6 entre et x_4 sort.

Cycles

$$x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4$$
$$x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4$$
$$x_7 = 1 - x_1$$

$$z = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4$$

Dictionnaire identique au 1er !

Chaque itération est dégénérée.

Initialisation

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \le -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Solution faisable, Dictionnaire faisable?

Problème auxiliaire:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -x_0 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \le 4 \\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \le -1 \\ & x_0, x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 &= -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ \\ w &= -x_0 \end{aligned}$$

Initialisation

$$x_4 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0$$
$$x_5 = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0$$
$$x_6 = -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0$$

$$w = -x_0$$

Infaisable:

Pivot : x_0 entre et x_5 (Min b_i) sort.

$$x_0 = 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5$$
$$x_4 = 9 - 2x_2 - x_3 + x_5$$
$$x_6 = 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5$$

$$w = -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5$$

Faisable: x_2 entre et x_6 sort.

Initialisation

$$x_2 = 1 + 0.75x_1 + 0.75x_3 + 0.25x_5 - 0.25x_6$$
$$x_0 = 2 - 0.25x_1 - 1.25x_3 + 0.25x_5 + 0.75x_6$$
$$x_4 = 7 - 1.5x_1 - 2.5x_3 + 0.5x_5 + 0.5x_6$$

$$w = -2 + 0.25x_1 + 1.25x_3 - 0.25x_5 - 0.75x_6$$

Pivot : x_3 entre et x_0 sort.

$$x_3 = 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6 - 0.8x_0$$
$$x_2 = 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6 - 0.6x_0$$
$$x_4 = 3 - x_1 - x_6 + 2x_0$$

$$w = -x_0$$

Optimum : $x_0 = 0$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 1.6$, $x_4 = 3$.

Dictionnaire d'origine:

$$x_3 = 1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6$$
$$x_2 = 2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6$$
$$x_4 = 3 - x_1 - x_6$$

$$z = -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6$$

Initialisation générale

Etape 1 : x_0 entre et une autre variable sort.

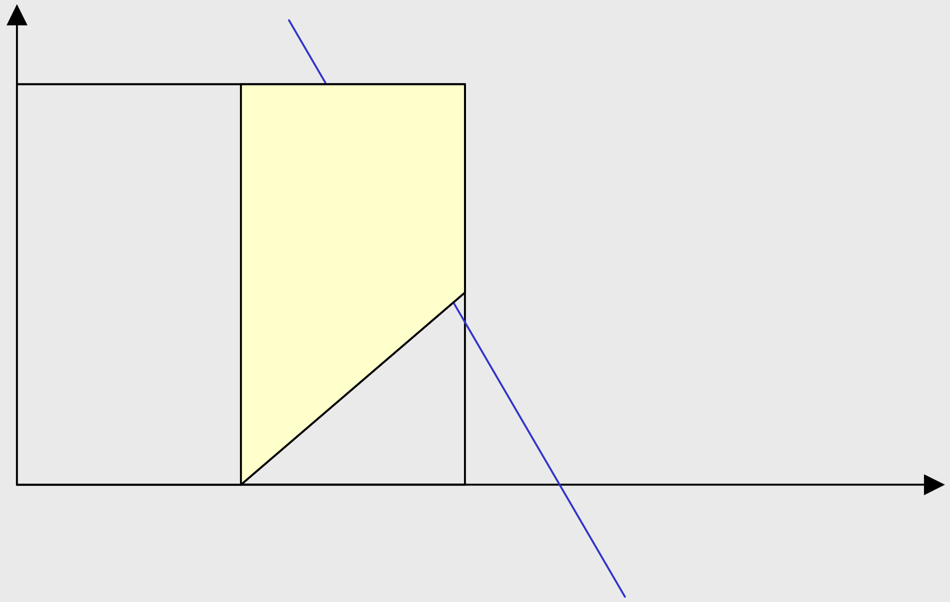
Etape générale : simplex

Terminaison:

- x_0 n'est pas dans la base et w=0. Faisable
- x_0 est dans la base et w≠0. Infaisable

Interprétation géométrique de l'initialisation

- Le point (0,0,…0) n'est pas dans le polytope.
- Trouver un autre point en ajoutant -x0 pour être sur de trouver une solution.



$$2 > x_1 > 1$$

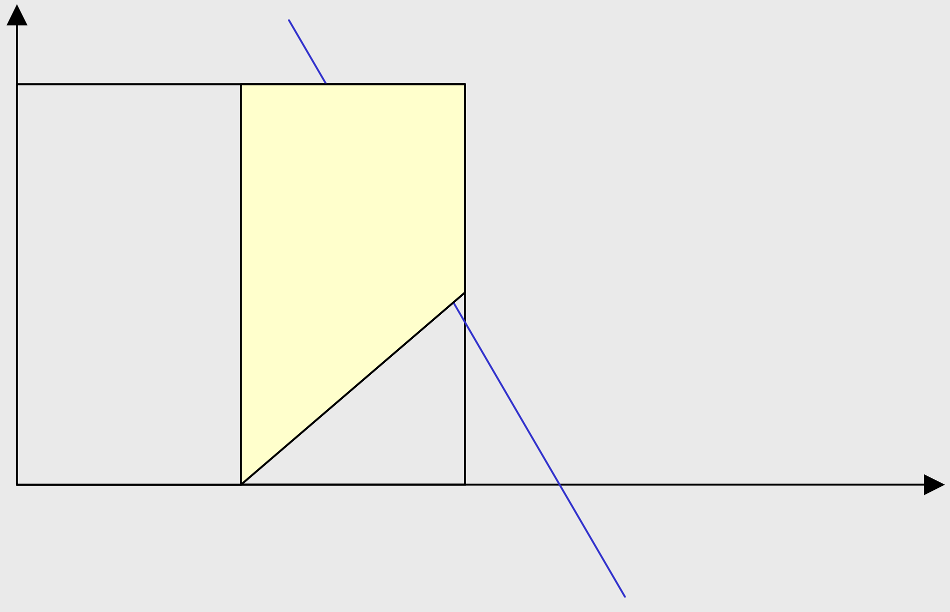
$$2 > x_2 > 0$$

$$-x_1 + x_2 > -1$$

$$Max \quad 2x_1 + x_2$$

Interprétation géométrique de l'initialisation

Contraintes sont:



$$x_1 < 2$$

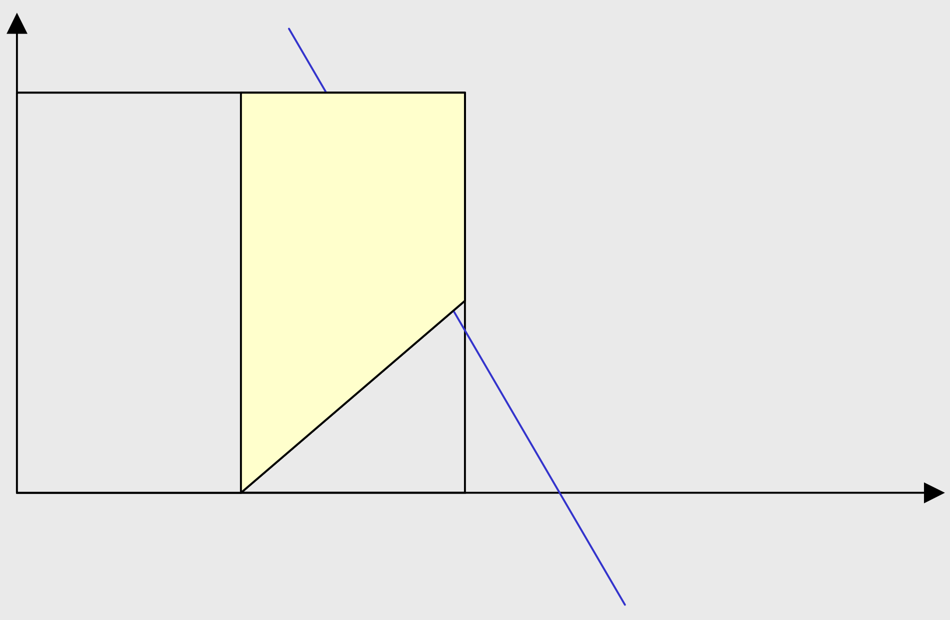
$$-x_1 < -1$$

$$x_1 - x_2 < 1$$

$$x_2 < 2$$

Interprétation géométrique de l’initialisation

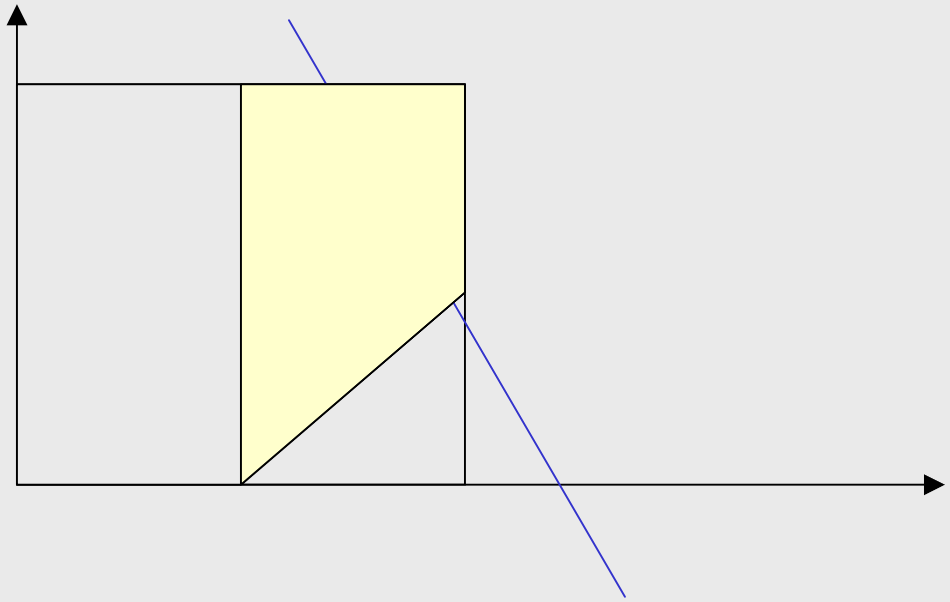
Ecrire les contraintes avec x0



$$
\begin{aligned}
x_1 - x_0 &< 2 \\
-x_1 - x_0 &< -1 \\
x_1 - x_2 - x_0 &< 1 \\
x_2 - x_0 &< 2
\end{aligned}
$$

Interprétation géométrique de l'initialisation

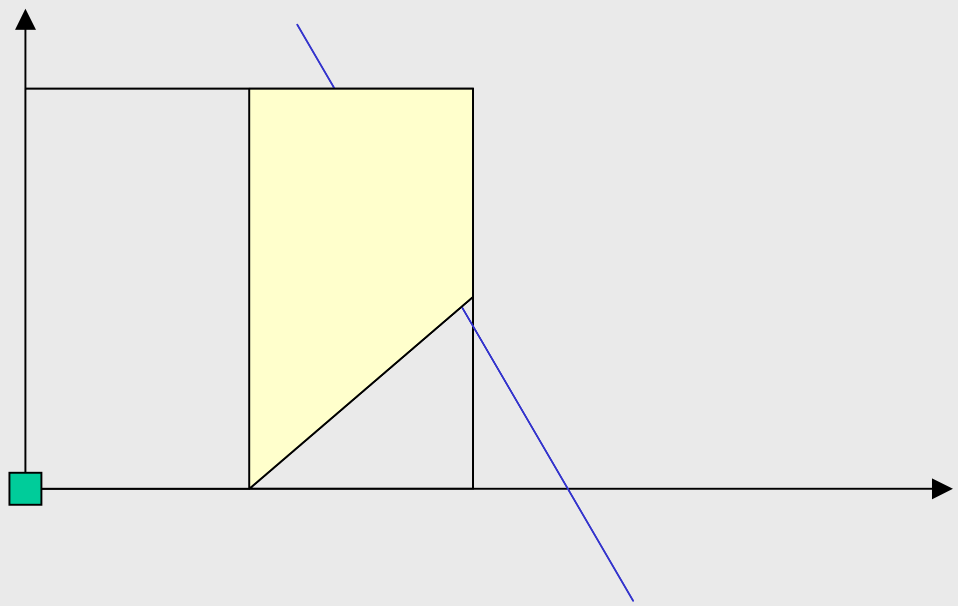
Ecrire les contraintes avec x0



$$
\begin{aligned}
x_3 &= 2 - x_1 && + x_0 \\
x_4 &= -1 + x_1 && + x_0 \\
x_5 &= 1 - x_1 + x_2 && + x_0 \\
x_6 &= 2 \quad - x_2 && + x_0 \\
z &= && - x_0
\end{aligned}
$$

Interprétation géométrique de l'initialisation

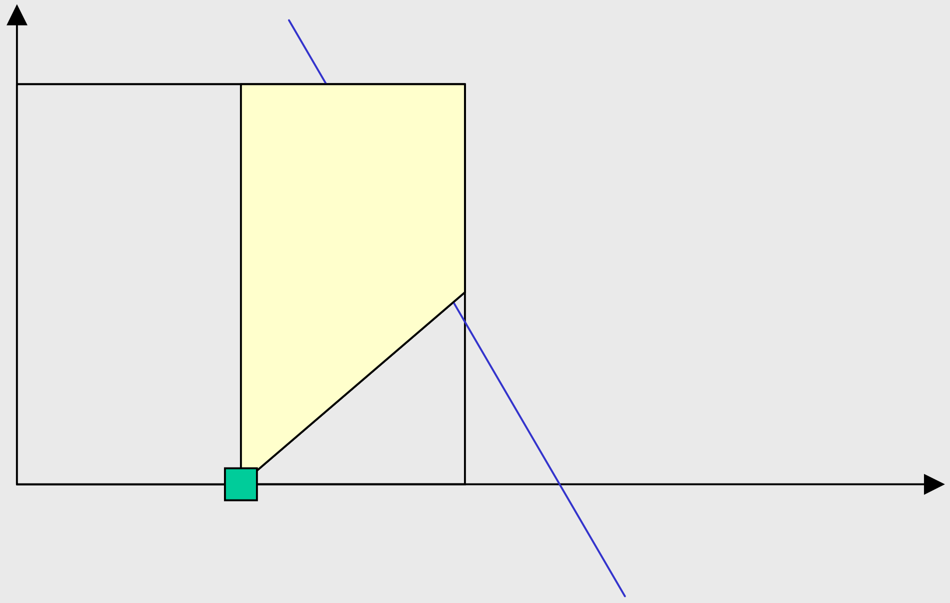
Dictionnaire infaisable: x0 entre et x4 sort (b minimum)



$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 - x_1 + x_4 \\
x_3 &= 3 - 2x_1 + x_4 \\
x_5 &= 2 - 2x_1 + x_2 + x_4 \\
x_6 &= 3 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= -1 + x_1 - x_4
\end{aligned}
$$

Interprétation géométrique de l'initialisation

Dictionnaire : x1 rentre et x0 sort



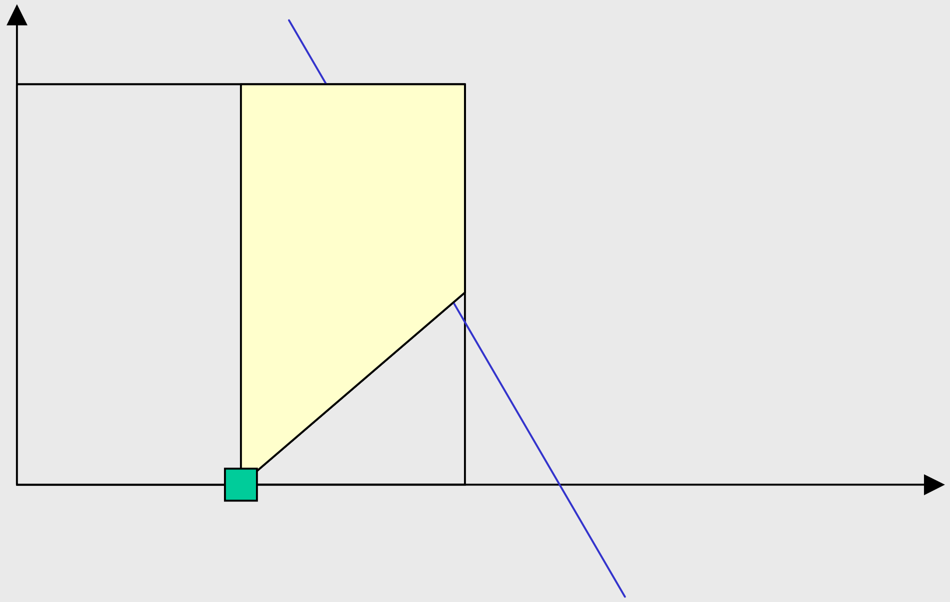
$$x_1 = 1 - x_0 + x_4$$
$$x_3 = 1 + 2x_0 - x_4$$
$$x_5 = 2x_0 + x_2 - x_4$$
$$x_6 = 2 + x_0 - x_2$$
$$z = -x0$$

Optimum

X0=0 donc faisable

Interprétation géométrique de l'initialisation

Dictionnaire global



$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \quad + x_4 \\
x_3 &= 1 \quad - x_4 \\
x_5 &= \quad + x_2 - x_4 \\
x_6 &= 2 - x_2 \\
z &= 2 + x_2 + 2x_4
\end{aligned}
$$

Simplex à deux phases

Phase 1 : résolution du problème auxiliaire.

Phase 2 : résolution du problème original.

Théorème fondamental.
Pour chaque problème LP:
- Soit le problème est infaisable
- Soit le problème n'est pas borné
- Soit le problème a une solution optimale

Simplex révisé

Représentation compacte d'un dictionnaire.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max } 19x_1 & +13x_2 & +12x_3 & +17x_4 & \\
3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq 225 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 117 \\
4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq 420 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Forme Matricielle:

$$
\begin{pmatrix}
3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Bases de la Dualité

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max } 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Estimation de z > a

z>5 avec (0,0,1,0)

z>22 avec (3,0,2,0)

….

Estimation de z <b ?

Quel est le témoin?

Dualité : z < b

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max } 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & \\
x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

Montrons que z <275/3

2nd contrainte . 5/3

$$25/3x_1 + 5/3x_2 + 5x_3 + 40/3x_4 \leq 275/3$$

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 25/3x_1 + 5/3x_2 + 5x_3 + 40/3x_4 \leq 275/3$$

Donc z <275/3

Dualité

$$
\begin{array}{l}
\text{Max } 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 1 \\
5x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 55 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0
\end{array}
$$

2nd contrainte +3ème contrainte

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq 58$$

Donc $z < 58$

Méthode systématique.

Dualité : méthode

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max} & 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & +3x_4 & & \\
y_1 & x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & \leq 1 \\
y_2 & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & +8x_4 & \leq 55 \\
y_3 & -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -5x_4 & \leq 3 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

$$(y_1+5y_2-y_3).x_1+(-y_1+y_2+2y_3).x_2+(-y_1+3y_2+3y_3).x_3+$$

$$(3y_1+8y_2-5y_3).x_4 \leq (y_1+55y_2+3y_3)$$

Conditions pour que le membre gauche >

$$4x_1+x_2+5x_3+3x_4$$

$$
\begin{array}{llll}
y_1 & +5y_2 & -y_3 & \geq 4 \\
-y_1 & +y_2 & +2y_3 & \geq 1 \\
-y_1 & +3y_2 & +3y_3 & \geq 5 \\
3y_1 & +8y_2 & -5y_3 & \geq 3
\end{array}
$$

Dualité

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq z \leq y_1 + 55y_1 + 3y_3$$

On obtient donc le système dual:

$$\begin{array}{llll}
\text{Min} & y_1 + 55y_2 & +3y_3 & \\
 & y_1 & +5y_2 - y_3 & \geq 4 \\
 & -y_1 & +y_2 + 2y_3 & \geq 1 \\
 & -y_1 & +3y_2 + 3y_3 & \geq 5 \\
 & 3y_1 & +8y_2 - 5y_3 & \geq 3
\end{array}$$

Remarques générales

Problème Primal de Maximisation donne un problème Dual de minimisation.

$$4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq z \leq y_1 + 55y_1 + 3y_3$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \right) x_j \leq$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

A l'optimum:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i^*$$

Théorème de dualité

Préliminaires: relations entre variables d'écart et variables duales

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } 4x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\
&x_5 = 1 - x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \\
&x_6 = 55 - 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_4 \\
&x_7 = 3 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4
\end{aligned}
$$

x3 rentre et x7 sort

$$
\begin{aligned}
&x_3 = 1 + x_1/3 - 2/3x_2 + 5/3x_4 - 1/3x_7 \\
&x_5 = 2 - 2/3x_1 + 1/3x_2 - 4/3x_4 - 1/3x_7 \\
&x_6 = 52 - 6x_1 + x_2 - 13x_4 + x_7 \\
&Max\ \ 5 + 17/3x_1 - 7/3x_2 + 34/3x_4 - 5/3x_7
\end{aligned}
$$

Théorème de dualité

Itération 2:

$$\begin{aligned}
x_3 &= 1 + x_1/3 - 2/3x_2 + 5/3x_4 - 1/3x_7 \\
x_5 &= 2 - 2/3x_1 - 2/3x_2 - 4/3x_4 - 1/3x_7 \\
x_6 &= 52 - 6x_1 + x_2 - 13x_4 + x_7 \\
Max\ & 5 + 17/3x_1 - 7/3x_2 + 34/3x_4 - 5/3x_7
\end{aligned}$$

x4 rentre et x5 sort. Après plusieurs itérations:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\
x_4 &= 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\
x_6 &= 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\
Max\ & 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7
\end{aligned}$$

Préliminaires au théorème de dualité

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 14 - 2x_1 - 4x_3 - 5x_5 - 3x_7 \\
x_4 &= 5 - x_1 - x_3 - 2x_5 - x_7 \\
x_6 &= 1 + 5x_1 + 9x_3 + 21x_5 + 11x_7 \\
Max\ \ & 29 - x_1 - 2x_3 - 11x_5 - 6x_7
\end{aligned}
$$

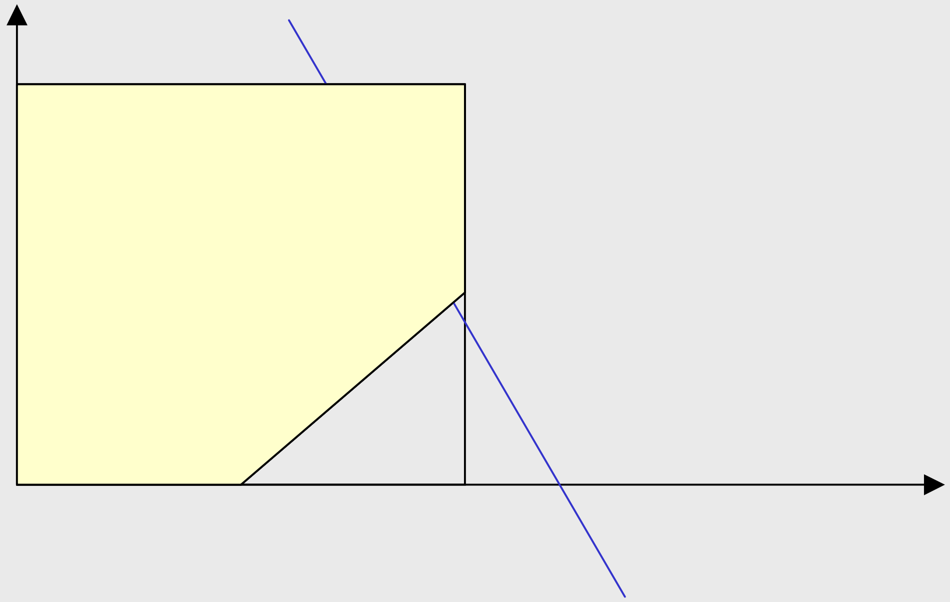
Variables d'écart:
x5, x6, x7 liées aux variables duales
y1, y2, y3

La solution z= 29 ……..-11x5 +0.x6 –6.x7
donne la solution optimale du dual:

y1=11, y2=0, y3=6 !!!

Interprétation géométrique du dual

Primal



$$Max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 \qquad < 2$$

$$x_1 - x_2 \quad < 1$$

$$x_2 \quad < 2$$

Formulation en primal

$$Max \quad 2x_1 + x_2$$

$$x_1 < 2$$

$$x_1 - x_2 < 1$$

$$x_2 < 2$$

$$x_3 = 2 - x_1$$

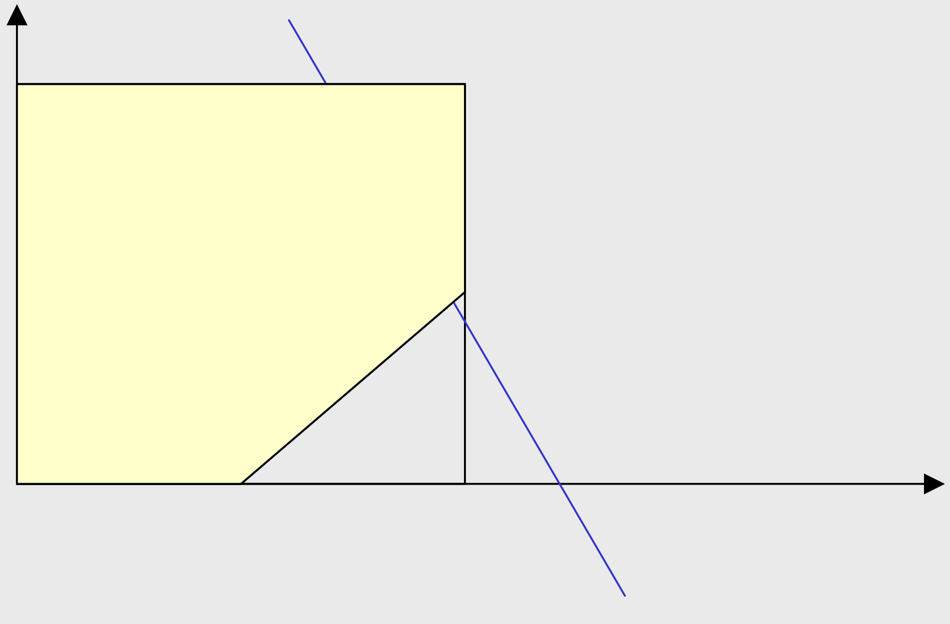
$$x_4 = 2 - x_2$$

$$x_5 = 1 - x_1 + x_2$$

$$z = 2x_1 + x_2$$

Dual

Problème de minimisation



$$Min \quad 2y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$y_1 + y_2 \qquad > 2$$

$$-y_2 + y_3 > 1$$

Solution du Dual

$$Min \quad 2y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$y_1 + y_2 \qquad > 2$$

$$-y_2 + y_3 \quad > 1$$

$$Max \quad -2y_1 - y_2 - 2y_3$$

$$-y_1 - y_2 \qquad \leq -2$$

$$y_2 \quad - y_3 \leq -1$$

$$Max \quad -y_0$$

$$-y_1 - y_2 \quad - y_0 \quad \leq -2$$

$$y_2 \quad - y_3 - y_0 \leq -1$$

Solution du Dual

$$Max \quad -y_0$$
$$-y_1 - y_2 \quad - y_0 \leq -2$$
$$y_2 \quad - y_3 - y_0 \leq -1$$

$$Max \quad -y_0$$
$$y_4 = -2 + y_1 + y_2 + y_0$$
$$y_5 = -1 \quad - y_2 + y_3 + y_0$$

y0 entre et y4 sort

$$Max \quad -2 + y_1 + y_2 - y_4$$
$$y_0 = 2 - y_1 - y_2 + y_4$$
$$y_5 = 1 - y_1 - 2y_2 + y_3 \quad + y_4$$

Solution du Dual

$$Max \quad -2 + y_1 + y_2 - y_4$$
$$y_0 = 2 - y_1 - y_2 + y_4$$
$$y_5 = 1 - y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4$$

y1 entre et y5 sort

$$Max \quad -1 - 2y_2 + y_3 + y_4 - y_5$$
$$y_1 = 1 - 2y_2 + y_3 + y_4 - y_5$$
$$y_0 = 1 + y_2 - y_3 + y_5$$

y3 entre et y0 sort

$$Max \quad -y_0$$
$$y_3 = 1 + y_2 - y_0 + y_5$$
$$y_1 = 2 - y_2 - y_0 + y_4$$

Dual

$$Max \quad -y_0$$

$$y_3 = 1 + y_2 - y_0 + y_5$$

$$y_1 = 2 - y_2 - y_0 + y_4$$

y0=0 solution initiale

$$Max \quad -2y_1 - y_2 - 2y_3$$

$$y_3 = 1 + y_2 \qquad + y_5$$

$$y_1 = 2 - y_2 \qquad + y_4$$

$$Max \quad -6 - y_2 - 2y_4 - 2y_5$$

$$y_3 = 1 + y_2 \qquad + y_5$$

$$y_1 = 2 - y_2 \qquad + y_4$$

Minimum=6

Comparaison des solutions: dual et primal

$$Max \;\; 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & & < 2 \\ x_1 & -x_2 & < 1 \\ & x_2 & < 2 \end{array}$$

Dernier Système primal

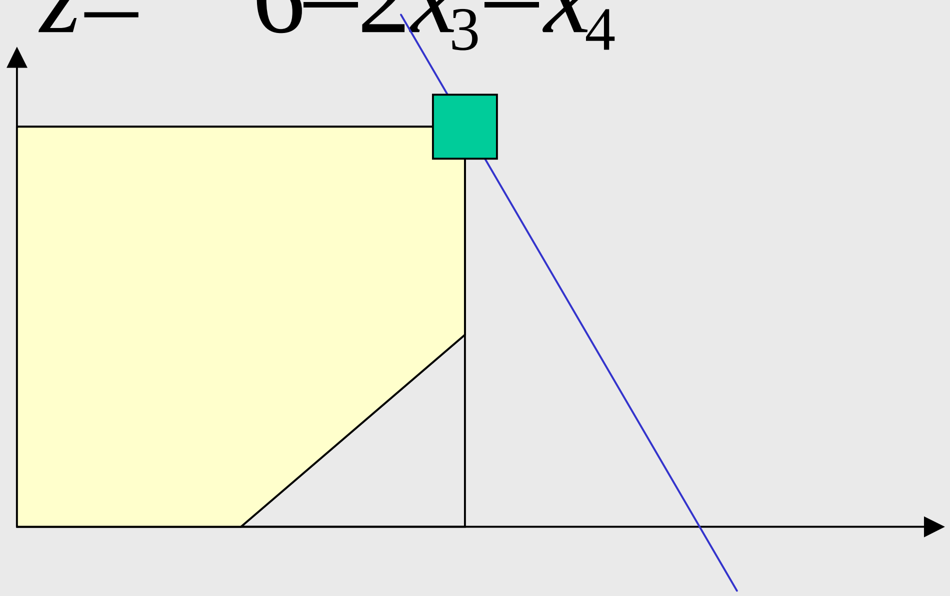
$$\begin{array}{llll} x_2 = 2 & & & - x_4 \\ x_1 = 2 & -x_3 & & \\ x_5 = 1 & +x_3 & & -x_4 \\ z = & 6 - 2x_3 - x_4 & & \end{array}$$

Dernier Système dual

$$\begin{array}{ll} z = & -6 - y_2 - 2y_4 - 2y_5 \\ y_3 = 1 + y_2 & + y_5 \\ y_1 = 2 - y_2 & + y_4 \end{array}$$

Rappel: Interprétation géométrique du primal

$$x_2 = 2 - x_4$$
$$x_1 = 2 - x_3$$
$$x_5 = 1 + x_3 - x_4$$
$$z = 6 - 2x_3 - x_4$$



Optimum

Comparaison des solutions: dual et primal

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 2 & & - x_4 \\
x_1 &= 2 - x_3 & & \\
x_5 &= 1 + x_3 & & - x_4 \\
z &= 6 - 2x_3 - x_4 & &
\end{aligned}
$$

Coefficients des variables d'écart dans z donne
l'optimum du dual:

-2x3 → y1=2

-x4 → y2=1 (y2 et y3 sont inversés..)

0.x5 → y3=0

Dernier Système dual

$$
\begin{aligned}
z &= -6 - y_2 - 2y_4 - 2y_5 \\
y_3 &= 1 + y_2 + y_5 \\
y_1 &= 2 - y_2 + y_4
\end{aligned}
$$

Démonstration Minimax

Considérons la dernière ligne du dernier système du primal:

$$z = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c'_k . x_k$$

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j . x_j^*$$

Posons:

$$y_i^* = -c'_{i+n} \quad pour \quad i = 1 \ldots m$$

Vérifions que y* satisfait :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j . x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i . y_i^*$$

Démonstration Minimax

Les variables d'écart sont définies comme:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j \quad i = 1 \ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n+m} c'_k.x_k$$

$$y_i^* = -c'_{i+n} \quad pour \quad i = 1 \ldots m$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n} c'_k.x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^*.x_{n+i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = z^* + \sum_{k=1}^{n} c'_k.x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^*.\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.x_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j = \left(z^* - \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(c'_k + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.y_j^*\right) x_k$$

Comparant les coefficients de xj

$$z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i$$

Et on conclut:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j.x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i.y_i^*}$$

Complémentarité

Contraintes saturées du dual (m=3)
et variables nulles du primal (n=2)

$$x_3^* = x_4^* = 0 \qquad x_1^* = 2, x_2^* = 2,\ x_5^* = 1$$

$$y_1^* = 2, y_3^* = 1,\ y_2^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0$$

$$x_1^* = 2$$
$$x_2^* = 2$$

$$\begin{aligned} &Min\ \ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \\ &y_1 + y_2 \quad \geq 2 \\ &-y_2 + y_3 \geq 1 \end{aligned}$$

Soit xi=0 soit contrainte duale est saturée

Complémentarité

Contraintes saturées du primal (n=2)
et variables nulles du dual (m=3)

$$x_3^* = x_4^* = 0 \qquad x_1^* = 2, x_2^* = 2,\ x_5^* = 1$$

$$y_1^* = 2, y_3^* = 1,\ y_2^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0$$

$$y_1^* = 2$$
$$y_2^* = 0$$
$$y_3^* = 1$$

$$\begin{array}{ll} Max & 2x_1 + x_2 \\ x_1 & \leq 2 \\ x_1 - x_2 & \leq 1 \\ \quad x_2 & \leq 2 \end{array}$$

Soit yi=0 soit contrainte primale est saturée

Théorème : Ces deux conditions caractérisent une solution x*,y* optimum.

Interprétation économique

Exemple de fabrication de produits
en quantité x_1, x_2, x_3.

Chaque produit utilise des composants
e_1, e_2, e_3, e_4 et contribue à un profit
c_i ($ par unité de x_i)

Contraintes du primal : $Ax < b$

Contraintes du dual $A' y > c$
y_j = $ par unité de composant e_j

Min $y.b$: coût minimum des composants

Simplex révisé

Représentation compacte d'un dictionnaire.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Max} & 19x_1 & +13x_2 & +12x_3 & +17x_4 & \\
& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq 225 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 117 \\
& 4x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +4x_4 & \leq 420 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}$$

Forme Matricielle:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 225 \\ 117 \\ 420 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 12 & 17 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplex révisé

Base : x1, x3, x7:

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variables:

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

$$A_B x_B = b - A_N x_N$$

Simplex révisé

Base : x1, x3, x7:

$$A_B x_B = b - A_N x_N$$

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$z = c_B \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \right) + c_N x_N$$

$$z = c_B \left(A_B^{-1} b \right) + \left(c_N - A_B^{-1} A_N \right) x_N$$

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} A_N x_N$$

$$z = c_B \left(B^{-1} b \right) + \left(c_N - B^{-1} A_N \right) x_N$$

Simplex révisé

Déterminer le pivot:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N \\ z = c_B\left(B^{-1}b\right) + \left(c_N - c_B B^{-1}A_N\right)x_N \end{cases}$$

Calculer : $\left(c_N - c_B B^{-1}A_N\right)$

En 2 étapes:

$$y = c_B B^{-1} \text{ ou } yB = c_B$$

$$\left(c_N - yA_N\right)$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Simplex révisé

Solution:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 8.5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(c_N - c_B B^{-1} A_N\right) = \begin{pmatrix} -2.5 & 1.5 & -3.5 & -8.5 \end{pmatrix}$$

Donc x4 entre dans la base. Pour trouver la variable qui sort:

$$\begin{aligned} x_1 &= 54 \ldots - 0.5 x_4 \\ x_3 &= 63 \ldots - 0.5 x_4 \\ x_7 &= 15 \ldots - 0.5 x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 54 \ldots - 0.5 t \\ x_3 &= 63 \ldots - 0.5 t \\ x_7 &= 15 \ldots - 0.5 t \end{aligned}$$

Simplex révisé

Technique systématique:
t est la variable entrante et a est la colonne entrante.

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N$$

$$x_B = x_B^* - t.d$$

$$B.d = a$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} .d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Trouver le plus grand t tel que:

$$x_B^* - t.d \geq 0$$

t=30 et x7 quitte la base.

Simplex révisé

Mise à jour de xb:

$$x_B^* = x_B^* - t.d$$

$$x_B^* = \begin{pmatrix} 54 \\ 63 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54-15 \\ 63-15 \\ 15-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nouvelle solution:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad x_B^* == \begin{pmatrix} 39 \\ 48 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Algorithme du simplex révisé

Etape 1 : Résoudre $y.B = c_B$

Etape 2: Choisir une colonne entrante. Colonne a tel que : $y.a \leq c_N$

Etape 3: résoudre $B.d = a$

Etape 4: trouver le plus grand t tel que $x_B^* - t.d \geq 0$ colonne entrante

Etape 5: mettre à jour x_B^* et B