

Devoir Maison

Informations pratiques

- Ce devoir est à rendre sous forme d'un fichier Coq **commenté** envoyé **avant le 1er mai** par e-mail à votre chargé de TP
 - groupe 1 : <Asma.Tafat-Bouزيد@lri.fr> ,
 - groupe 2 : <paulin@lri.fr> ,
 - groupe 3 : <Mohamed.Iguernelala@lri.fr> .
- Aucun squelette n'est fourni, mais vous pouvez repartir des squelettes des TP, ne pas oublier la commande `Require Import Omega` pour charger la tactique `omega` et résoudre les buts arithmétiques.
- Si vous n'arrivez pas à faire une question ou finir complètement une preuve, vous pouvez utiliser la tactique `admit` pour ignorer un but et passer à la suite. Attention : vous n'aurez pas les points quand `admit` est utilisé, surtout s'il est utilisé pour admettre un énoncé faux !
- Vous êtes fortement encouragés à poser des questions par mail le plus tôt possible.
- Vous pouvez travailler en groupe mais **vous devez impérativement rédiger vos propres commentaires**.

Exercice 1 (Dédution naturelle)

On considère trois propositions quelconques P, Q, R , et deux prédicats p, q sur nat :

Variables $P \ Q \ R$: Prop.

Variables $p \ q$: $\text{nat} \rightarrow \text{Prop}$.

Parmi les énoncés suivants, trouver ceux qui sont vrais et les démontrer. Expliquer pourquoi les autres ne sont pas montrables.

1. $((P \vee Q) \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$
2. $(P \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$
3. $(P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
4. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R))$
5. $(\text{forall } x : \text{nat}, p \ x \rightarrow q \ x) \rightarrow q \ 0 \rightarrow p \ 0$
6. $(\text{forall } x : \text{nat}, p \ x \rightarrow q \ (S \ x)) \rightarrow (\text{forall } x : \text{nat}, q \ x \rightarrow p \ (S \ (S \ x))) \rightarrow p \ 0 \rightarrow q \ 10$
7. $\text{forall } n:\text{nat}, \text{exists } k:\text{nat}, (n=2*k \vee n=2*k+1)$

Exercice 2 (Min et Max)

On se propose de représenter la fonction de maximum entre deux entiers naturels par la relation `max` que l'on définit par des règles d'inférence de la manière suivante :

$$\frac{}{\text{max } 0 \ x \ x} \quad \frac{}{\text{max } x \ 0 \ x} \quad \frac{\text{max } x \ y \ z}{\text{max } (S \ x) \ (S \ y) \ (S \ z)}$$

1. Définir `max` comme une relation inductive.
2. Définir de la même manière la relation `min` représentant la fonction de minimum entre deux entiers naturels.
3. Montrer que le minimum de deux entiers égaux est égal à ce même entier :

Lemma `min_meme` : `forall x : nat, min x x x`.

4. Montrer que pour tout couple d'entiers, si l'un est le minimum de ce couple, alors l'autre en est le maximum (et inversement).

Lemma min_max : forall x y, min x y x <-> max x y y.

5. Montrer que la relation max est incluse dans la relation de maximum définie de manière non inductive :

Lemma max_inc : forall x y z, max x y z -> (z = x /\ y <= x) \/ (z = y /\ x <= y).

6. Enoncer et montrer de manière analogue que la relation min est incluse dans la relation de minimum définie de manière non inductive.

Exercice 3 (Ordre sur les fonctions)

On considère l'ensemble seq des fonctions de nat dans nat. On définit sur cet ensemble une relation binaire inf par :

$$\text{inf } f g \stackrel{\text{def}}{=} \exists n, \text{inf}_b n f g$$

avec inf_b définie par :

$$\text{inf}_b n f g \stackrel{\text{def}}{=} (\forall k < n, f(k) \leq g(k)) \wedge (f(n) < g(n))$$

Le but de l'exercice est d'étudier les propriétés de la relation inf.

1. Définir en Coq les relations inf_b et inf.
2. Soient id et double les éléments de seq définis par

Definition id (n:nat) : nat := n.

Definition double (n:nat) : nat := n+n.

Montrer que l'on a inf id double .

3. Montrer que inf est irréflexif.
4. Nous allons maintenant montrer que inf est une relation transitive. Pour nous entraîner, nous allons commencer par montrer la transitivité de l'ordre point à point sur les éléments de seq.

Lemma trans_ex : forall f g h : seq,

(forall k:nat, f k <= g k) -> (forall k:nat, g k <= h k) -> (forall k:nat, f k <= h k).

5. Montrer les résultats intermédiaires suivants :

Lemma inf_trans1 : forall n1 n2:nat, forall f g h:seq,

n1 <= n2 -> inf_b n1 f g -> inf_b n2 g h -> inf f h.

Lemma inf_trans2 : forall n1 n2:nat, forall f g h:seq,

n2 <= n1 -> inf_b n1 f g -> inf_b n2 g h -> inf f h.

6. En déduire que la relation inf est transitive.
7. Soit un entier k quelconque et deux fonctions f et g telles que $f(k) = g(k+1) = 1$ et $f(i) = 0$ si $i \neq k$ et $g(i) = 0$ si $i \neq k+1$. Introduire le contexte correspondant :

Section INF.

Variable k : nat.

Variable f g : seq.

Hypothesis Hfk : f k = 1.

Hypothesis Hgk : g (S k) = 1.

Hypothesis Hfi : forall i, i <> k -> f i = 0.

Hypothesis Hgi : forall i, i <> (S k) -> g i = 0.

et montrer que la propriété ($\text{inf } g f$) est vérifiée.

8. La relation inf est-elle bien fondée? Justifier votre réponse.