Licence STS, semestre 4 — 2011–2012
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 8 mars 2012
`http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo`

Devoir maison 1

A rendre avant le mercredi 7 mars 10h30 à Francine Hordesseaux ou à votre chargée de TD

Ce devoir est une révision pour le partiel et doit pouvoir être réalisé en moins de 2 heures.

Exercice 1 *Logique propositionnelle*

Soit la formule $M = (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

1. Donner la table de vérité de M.
2. Construire une preuve en déduction naturelle de la formule M.

Correction :

1. *Table de vérité de* $(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P)$ *:*

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	M
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

2. *Preuve de* M *: on note* $\Gamma = \{\neg P \vee \neg Q, P \Rightarrow Q, P\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \neg P \vee \neg Q \qquad \dfrac{\Gamma, \neg P \vdash P \quad \Gamma, \neg P \vdash \neg P}{\Gamma, \neg P \vdash \bot}\neg E \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \neg Q \vdash P \Rightarrow Q \quad \Gamma, \neg Q \vdash P}{\Gamma, \neg Q \vdash Q}\Rightarrow E \qquad \Gamma, \neg Q \vdash \neg Q}{\Gamma, \neg Q \vdash \bot}\neg E}{\neg P \vee \neg Q, P \Rightarrow Q, P \vdash \bot}\vee E}{\neg P \vee \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \neg P}\neg I}{\neg P \vee \neg Q \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P}\Rightarrow I}{\vdash (\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P)}\Rightarrow I$$

Exercice 2 *Logique des prédicats*

On considère les formules suivantes :

– $\forall y, \exists x, P(x, y) \Rightarrow \exists x, \forall y, P(x, y)$
– $\exists x, \forall y, P(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$

Ces formules sont-elles vraies ? Sont-elles prouvables ? Si oui, construire la preuve, sinon, expliquer pourquoi la preuve est impossible.

Correction : *Seule la formule* $\exists x, \forall y, P(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x, P(x, y)$ *est vraie. On peut donner un contre-exemple pour la formule* $\forall y, \exists x, P(x, y) \Rightarrow \exists x, \forall y, P(x, y)$ *en prenant* $x, y \in \mathbb{Z}$ *et* $P(x, y) \stackrel{def}{=} x \leq y$ *: pour tout* $y \in \mathbb{Z}$*, il existe* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x \leq y$*, mais il n'existe pas* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x \leq y$ *pour tout* $y \in \mathbb{Z}$*.*

Preuve de $\exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \exists x \forall y P(x,y)}\,hyp \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x \forall y P(x,y), \forall y P(x,y) \vdash \forall y P(x,y)}\,hyp}{\exists x \forall y P(x,y), \forall y P(x,y) \vdash P(x,y)}\,\forall E}{\exists x \forall y P(x,y), \forall y P(x,y) \vdash \exists x P(x,y)}\,\exists I}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \exists x P(x,y)}\,\exists E}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)}\,\forall I}{\vdash \exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y)}\Rightarrow I$$

Exercice 3 *Ensembles*

Soient A et B deux ensembles quelconques. On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Correction : *Montrons que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

$$\begin{aligned}
x \in A \,\Delta\, B &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in B \wedge \neg(x \in A)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)
\end{aligned}$$

Donc $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Exercice 4 *Fonctions*

Soient X un ensemble et A et B deux sous-ensembles de X et f une application de X dans X.

1. Rappeler les définitions de $f(A)$, l'image de A par f et de $f^{-1}(A)$, l'image inverse de A par f.
2. Montrer que si $A \subseteq B$ alors $f(A) \subseteq f(B)$.
3. Donner un exemple de fonction f pour laquelle on a $f(A) \subseteq f(B)$ mais pas $A \subseteq B$.
4. Donner une condition sur f pour que la propriété *"si $f(A) \subseteq f(B)$ alors $A \subseteq B$"* soit vérifiée.
5. Montrer que si A est non vide alors $f(A)$ est non vide.
6. Donner un exemple de fonction f pour laquelle A est non-vide mais $f^{-1}(A)$ est vide.
7. À quelle condition sur f peut-on garantir que $f^{-1}(A)$ est non-vide lorsque A est non-vide ? Prouver ce résultat.

Correction :

1. $f(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$
   $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$
2. *Montrons $f(A) \subseteq f(B)$. Soit $y \in f(A)$, par définition de $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, comme $A \subseteq B$, on a $x \in B$ et donc $y \in f(B)$.*
3. *Soit un ensemble X contenant deux éléments $\{a; b\}$ et f une fonction telle que $f(a) = f(b) = a$. On a $f(\{a\}) = f(\{b\}) = \{a\}$ mais on n'a pas $\{a\} \subseteq \{b\}$.*
4. *Si f est injective et $f(A) \subseteq f(B)$ alors $A \subseteq B$. Soit $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$ donc $f(x) \in f(B)$ car $f(A) \subseteq f(B)$. Comme $f(x) \in f(B)$, il existe $x' \in B$ tel que $f(x) = f(x')$ et comme f est injective, on a $x = x'$, et donc $x \in B$.*

5. *Si* A *est non vide, soit* $x \in A$*, on a* $f(x) \in f(A)$ *donc* $f(A)$ *est non vide.*
6. *Soit un ensemble* X *contenant deux éléments* $\{a; b\}$ *et* f *une fonction telle que* $f(a) = f(b) = a$*. On a* $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ *et* $\{b\} \neq \emptyset$*.*
7. *Si* f *est surjective alors* $f^{-1}(A)$ *est non-vide dès que* A *est non vide. En effet si* A *est non vide, soit* $y \in A$*, comme* f *est surjective, il existe* $x \in X$ *tel que* $f(x) = y$ *et donc* $x \in f^{-1}(A)$ *et* $f^{-1}(A) \neq \emptyset$*.*