

TD1: premières preuves

15 septembre 2009

Pour vous aider, voici une correspondance des tactiques Coq avec les règles de déduction.

Tactique	Règle de déduction
<code>assumption</code>	Axiome
<code>intro, intros</code>	\Rightarrow -intro, \forall -intro, \neg -intro
<code>apply</code>	\Rightarrow -elim, \forall -elim, \neg -elim
<code>split</code>	\wedge -intro
<code>case</code>	\vee -elim
<code>left, right</code>	\vee -intro
<code>exists</code>	\exists -intro
<code>destruct</code>	\wedge -elim
<code>absurd</code>	$\approx \perp$ -elim
<code>assert / cut</code>	<i>modus ponens</i>

Voir aussi <http://coq.inria.fr>.

Exemples

Voici un état possible lors d'une preuve suivi de deux exemples de preuves :

1 subgoal	Il reste un but à prouver
A : Prop	Liste des variables
B : Prop	et de leurs types
H : A	Liste des hypothèses
H0 : A->B	
=====	
B	But à prouver

Theorem mp: forall A B: Prop, A -> (A->B) -> B.	
intros A B H1 H2.	Introduction des hypothèses
apply H2.	On applique l'hypothèse H2 : $A \rightarrow B$
assumption.	Exactement l'hypothèse H1
Qed.	Fin de la preuve

Exercice 1 : Preuves naturelles

Prouvez :

```
forall A B : Prop, A -> B -> A
forall A B C : Prop, (A -> B -> C) -> (A -> B) -> A -> C
forall A B C : Prop, (B -> C) -> (A -> B) -> A -> C

forall A B : Prop, A /\ B -> B /\ A
forall A B : Prop, A \/ B -> B \/ A
forall A B C D : Prop, (A -> C) /\ (B -> D) -> A /\ B -> C /\ D

forall A : Prop, A -> ~ ~ A
forall A B : Prop, (A \/ ~ B) /\ B -> A

forall (X:Set) (A B: X -> Prop), (forall x: X, A x /\ B x)
  <-> (forall x:X, A x) /\ (forall x:X, B x)
```

Exercice 2 : Le club écossais

Il existe en Écosse un club très fermé qui obéit aux règles suivantes :

- Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.
- Tout membre porte un kilt ou ne porte pas de chaussettes rouges.
- Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.
- Un membre sort le dimanche si et seulement s'il est écossais.
- Tout membre qui porte un kilt est écossais et marié.
- Tout membre écossais porte un kilt.

On souhaite prouver que ce club est si fermé qu'il ne peut accepter personne !

Formalisez et prouvez en Coq.