TD7: les réels

3 novembre 2009

De façon, à utiliser les réels, vous aurez besoin de charger les définitions et théorèmes liés aux réels :

```
Require Import Reals.
```

De plus, pour pouvoir écrire `a+b` plutôt que `(a+b)%R`, je conseille :

```
Open Local Scope R_scope.
```

J'attire votre attention sur trois commandes utiles :
- `SearchAbout Rmin.`
  (remplacez `Rmin` par votre fonction/prédicat préféré) permet d'avoir la liste de tous les lemmes concernant `Rmin`.
- `SearchPattern (Rmin _ _ <= _)%R.`
  permet d'avoir tous les théorèmes de la forme « le minimum d'un machin et d'un truc est plus petit qu'un bidule ». Notez le `%R` pour dire que l'inégalité est dans les réels.
- `SearchRewrite (_ * (/ _))%R.`
  permet d'avoir toutes les égalités dont l'un des membres est de la forme « un machin multiplié par l'inverse d'un bidule »(le but est de faire un `rewrite`)

Exercice 1 : Preuves de base

En utilisant *uniquement les axiomes*, prouvez

```
forall r r1 r2, r+r1 = r+r2 -> r1=r2
forall r, r*0=0
0 / 0 = 0
forall r, ~ r < r
forall r1 r2, r1 < r2 -> r1 <> r2
```

En utilisant également le théorème `Rlt_0_1` qui affirme que `0 < 1`, prouvez :

```
0 <> 2
```

Exercice 2 : Avec automatisations

Les tactiques `ring` et `field` permettent de résoudre des égalités. Mais on peut également les utiliser pour normaliser des termes par les tactiques `ring_simplify` et `field_simplify`. Ainsi `ring_simplify (7+5)` remplacera les `(7+5)` du but par `12` et `ring_simplify` fera les normalisations sur tous les termes.

Prouvez :

```
forall x, x/2+x/2=x
forall x y, x<>0 -> y <>0 -> x*y/(x*y) = /y * /(/y)
232-215 < 64 - 22
```

Exercice 3 : Limites

En utilisant éventuellement la fonction `Rmin`, prouvez

1. Si $\lim_{x\to x_0} f = l$, alors $\lim_{x\to x_0} -f = -l$

```
forall (f:R -> R) (D:R -> Prop) (l x0:R),
   limit1_in f D l x0 ->
   limit1_in (fun x:R => - f x) D (- l) x0.
```

2. Si $\lim_{x\to x_0} f = l$ et $\lim_{x\to x_0} g = l'$, alors $\lim_{x\to x_0} f + g = l + l'$.

```
forall (f g:R -> R) (D:R -> Prop) (l l' x0:R),
   limit1_in f D l x0 ->
   limit1_in g D l' x0 ->
   limit1_in (fun x:R => f x + g x) D (l + l') x0.
```

3. Si df est la dérivée de f en x_0 alors pour tout réel a, $a \times df$ est la dérivée de $a \times f$ en x_0.

```
forall (D:R -> Prop) (f df:R -> R) (x0 a:R),
   D_in f df D x0 ->
   D_in (fun x:R => a * f x) (fun x:R => a * df x) D x0.
```

Exercice 4 : Fonctions élémentaires

Les définitions de exp et cos comme sommes infinies ne garantissent pas leur convergence. Pour cela, on peut prouver les deux lemmes :

En Coq 8.1	En Coq 8.2
`forall x:R, { l:R & exp_in x l }`	`forall x:R, { l:R | exp_in x l }`
`forall x:R, { l:R & cos_in x l }`	`forall x:R, { l:R | cos_in x l }`

On peut pour cela utiliser la règle de d'Alembert (lemme `Alembert_C3`) et le lemme `archimed_cor1` issu de la propriété d'Archimède.