Continuité de l'«énergie de Hausdorff» par rapport à la métrique de Hausdorff enrichie par la différence des longueurs

Guillaume Charpiat

12 décembre 2002

1 Énergie de Hausdorff et ensemble de courbes considéré

Rappelons ce que l'on appelle l'«énergie de Hausdorff», qui n'est autre qu'une forme régularisée de la distance de Hausdorff. On se place dans l'espace S des courbes régulières (géométriquement $\mathcal{C}^2$ suffira en pratique) qui n'ont pas de point double (c'est-à-dire que la courbe ne repasse jamais deux fois par le même point du plan). Cette dernière hypothèse est nécessaire dans la démonstration de la continuité ; néanmoins il est probable qu'un nombre fini de points doubles ne l'affecte pas (ce qu'il ne faut surtout pas, ce sont des fourches, c'est-à-dire des morceaux entiers de la courbe qui se superposent exactement : dans ce cas, il faudrait déjà s'accorder pour définir proprement la longueur d'une courbe).

Soient donc A et B deux courbes de S. On pose :

$$E_H(A,B) = \left\langle \ \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_A^{\varphi}\rangle_B^{\psi}\,,\ \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_B^{\varphi}\rangle_A^{\psi} \ \right\rangle^{\Psi}$$

où φ, ψ et Ψ sont des applications régulières, et bijectives sur leurs ensembles de définition (respectivement décroissante, croissantes, si l'on veut approximer la distance de Hausdorff) ; et où, par définition :

$$\langle a,b\rangle^{\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi(a) + \frac{1}{2}\Psi(b)\right)$$

$$\langle f\rangle_A^{\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Psi\circ f\right)$$

où $|A|$ est la longueur de la courbe A.

En pratique, on sera amené à considérer une «énergie mixte» comprenant un terme sur la différence des longueurs :

$$E_M(A,B) = E_H(A,B) + E_L(A,B)$$

où

$$E_L(A,B) = \langle |A|, |B|\rangle^{\Psi}.$$

2 Distance de Hausdorff et différence des longueurs

La distance de Hausdorff entre deux courbes A et B est définie par :

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{x\in B} d(x,A)\right).$$

Le problème le plus flagrant de cette distance est que la longueur des courbes n'est pas continue par rapport à la distance de Hausdorff (ce qui est bien embêtant vu que l'on cherche à préserver qualitativement les courbes lors des évolutions).

En outre, le terme additif E_L à l'énergie, portant sur les longueurs, ne sera certainement pas continu par rapport à la distance de Hausdorff.

On considère donc une «distance enrichie» :

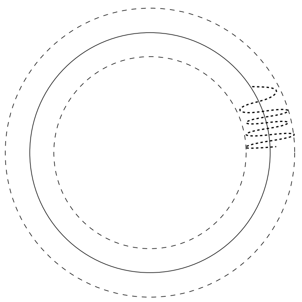
$$d(A,B) = \max\left(\sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{x\in B} d(x,A),\ \big|\,|A| - |B|\,\big|\right).$$

3 Non continuité de l'énergie de Hausdorff par rapport à la distance de Hausdorff

Il suffit pour cela d'exhiber un contre-exemple. Soit A un cercle de rayon R, et B une courbe quelconque . La continuité impliquerait l'existence d'un ε et d'un η tels que pour toute courbe C dont la distance de Hausdorff à A soit inférieure à ε, on ait $E_H(A,B) - E_H(C,B) < \eta$.

Il se trouve que les courbes C en question sont les courbes ayant leur graphe dans la couronne de même centre que le cercle A, délimitée par les rayons $R+\varepsilon$ et $R-\varepsilon$.

FIG. 1 – Exemple de courbe C proche de A au sens de la distance de Hausdorff, mais qui concentre une fraction arbitrairement grande de sa longueur au voisinage d'un point



Soit P un point de A. Soit C une courbe «suivant A de près» sur la quasi-totalité du cercle, mais ayant beaucoup d'oscillations (d'amplitude ε) autour du point P, suffisamment denses pour que la longueur de la partie régulière de C (soit $2\pi R$) soit négligeable devant la longueur de la partie oscillatoire de C autour de P. Il suffit pour cela que la fréquence des oscillations soit suffisamment élevée. Comme dans l'expression de E_H, les courbes n'interviennent que comme domaines d'intégration, et que l'intégrale de toute fonction sur C (ou sa valeur moyenne le long de C) va se résumer à sa valeur au point P, la courbe C, sera, de fait, aux yeux de E_H, réduite au point P.

Or il est clair que la considération de la courbe A ou d'une courbe réduite à un point de A produira des résultats qualitativement différents ; par exemple la distance d'un point M de B au point P n'est pas (et n'a rien à voir avec) la distance de ce point M à la courbe C. E_H n'est donc pas continu par rapport à la distance de Hausdorff.

4 Continuité de l'énergie de Hausdorff par rapport à la distance enrichie

4.1 Méthode

Soit A une courbe de S. Sa courbure κ étant finie en chaque point de la courbe (car A est régulière), elle est bornée puisque A est un compact.

Soit donc $\kappa_{\max} = \sup_A \kappa$. On cherche à montrer tout d'abord la continuité de l'intégrale selon A, c'est-à-dire que, une fonction f régulière définie sur le plan étant donnée, pour tout η positif il existe un ε strictement positif, tel que si B est une courbe de S vérifiant $d(A, B) < \varepsilon$, alors $\left|\int_A f - \int_B f\right| < \eta$.

L'idée est que plus on regarde A de près, en zoomant, plus A nous paraît lisse, et donc, plus les «tubes de confinement» de B étant resserrés (un point de B ne devant jamais à distance supérieure à ε de A), plus B est contraint de «suivre» A. C'est-à-dire que B ne pourra pas se permettre des concentrations de longueur par oscillations locales de fréquences élevées, car, d'une part, la longueur totale de B devra être proche de celle de A, et, d'autre part, localement, les oscillations de A auront disparu à un facteur d'agrandissement assez grand, ce qui empêchera B de ne pas osciller là où A oscille afin de pouvoir osciller ailleurs (la longueur totale devant être pérservée).

4.2 Distance entre deux points de la courbe

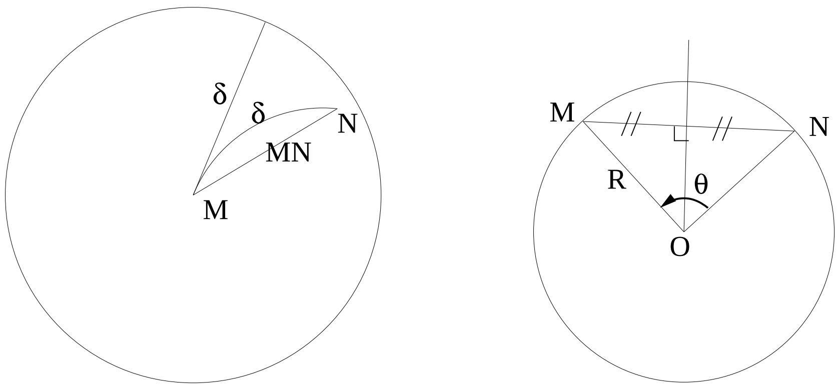
Considérons tout d'abord une portion $\overline{MN}$ de A. Posons $\delta = \overline{MN}$ (longueur curviligne), que l'on opposera à MN, la distance directe entre les deux extrémités. Cherchons à exprimer l'écart entre MN et $\overline{MN}$. Pour δ assez petit, c'est-à-dire inférieur à $\pi/\kappa_{\max}$, cet écart est nécessairement plus faible que dans le cas où $\overline{MN}$ est un arc de cercle de rayon $1/\kappa_{\max}$. En effet, on travaille ici à courbure bornée (par $\kappa_{\max}$).

Dans le cas de l'arc de cercle, avec $R = 1/\kappa_{\max}$, on a :

$$\overline{MN} = \theta R = \delta$$

$$MN = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

FIG. 2 – Écart maximal entre MN et $\overline{MN}$ à $\overline{MN} = \delta$ donné et courbure maximale $\kappa_{\max}$; cas du cercle ($R = 1/\kappa_{\max}$, $R\theta = \delta$).



Ce qui nous donne :

$$\overline{MN} - MN = R(\theta - 2\sin\frac{\theta}{2})$$

Pour δ vraiment petit, on peut développer :

$$\overline{MN} - MN = R\left(\theta - 2(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3) + O(\theta^4)\right)$$

$$\overline{MN} - MN = \frac{1}{24}R\theta^3 + O(\theta^4)$$

Dans le cas qui nous concerne, où A est une courbe seulement régulière et de courbure bornée, cela nous donne donc :

$$0 \leqslant \delta - MN \leqslant \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2\delta^3 + O(\delta^4)$$

D'où :

Proposition 4.1 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe $\mathcal{C}^2$, de courbure bornée par $\kappa_{\max}$. Soient M et N deux points de $\mathcal{C}$, et $\delta = \overline{MN}$. Alors, dans la limite $\delta \to 0$,*

$$0 \leqslant \delta - MN \leqslant \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2\delta^3 + O(\delta^4)$$

Notons au passage que ce résultat nous donne une estimation de l'erreur commise lorsque l'on tente d'approximer la longueur d'une courbe régulière (de courbure finie) par la somme des distances entre des points M_i régulièrement répartis par abscisse curviligne.

Proposition 4.2 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe C^2 de courbure bornée par $\kappa_{\max}$, P et Q deux points de $\mathcal{C}$ (éventuellement confondus), et η un réel strictement positif. Soient $(M_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ des points régulièrement espacés (dans cet ordre) sur $\mathcal{C}$, avec un pas inférieur à η, et recouvrant exactement PQ, c'est-à-dire tels qu'il existe une paramétrisation σ de $\mathcal{C}$ par son abscisse curviligne telle que :*

$$\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ \ 0 < \sigma^{-1}(M_{i+1}) - \sigma^{-1}(M_i) \leqslant \eta,\ \ P = M_1 \ \ et\ \ Q = M_n.$$

Notons $\overline{PQ}$ la longueur curviligne entre P et Q ; et notons $L = \sum_{i\in[\![1;n-1]\!]} M_iM_{i+1}$ l'approximation de $\overline{PQ}$ par le périmètre du polygone $(M_i)_i$. Alors, dans la limite $\eta \to 0$, on peut borner l'erreur de l'approximation par :

$$\left|\overline{PQ} - L\right| \leqslant \frac{|\mathcal{C}|}{24}\kappa_{\max}^2\eta^2$$

c'est-à-dire qu'elle est en $O(\eta^2)$.

4.3 Le tube ε

Considérons un δ strictement positif arbitrairement petit, et découpons la courbe A en morceaux $\overline{M_iM_{i+1}}$ de longueur δ, pour $i \in [\![0;n]\!]$, où $n = \left\lfloor \frac{|A|}{\delta} \right\rfloor$, le dernier morceau $\overline{M_nM_0}$ pouvant être plus court. Pour éviter des expressions abracadabrantes, on supposera que δ est choisi tel que $n = \frac{|A|}{\delta}$ soit entier, avec $M_n = M_0$.

Considérons une courbe B telle que $d(A,B) < \varepsilon$, pour un ε arbitrairement petit (devant δ). Pour tout point P de A, il existe un point Q de B tel que $d(P,Q) < \varepsilon$ puisque $d(P,B) \leqslant d(A,B) < \varepsilon$ et B est compact.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, soit donc N_i un point de B vérifiant $M_iN_i < \varepsilon$. Nous pouvons chercher à encadrer N_iN_{i+1}. $\forall i \in [\![1;n]\!]$:

$$M_iM_{i+1} - M_iN_i - M_{i+1}N_{i+1} \leqslant N_iN_{i+1} \leqslant N_iM_i + M_iM_{i+1} + M_{i+1}N_{i+1}$$

$$\delta - \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2\delta^3 - 2\varepsilon + O(\delta^4) \leqslant N_iN_{i+1} \leqslant \delta + 2\varepsilon$$

4.4 Correspondance entre les $\overline{M_iM_{i+1}}$ et les $\overline{N_iN_{i+1}}$

On souhaiterait que, pour ε suffisamment petit, les N_i sont disposés dans l'ordre sur B, c'est-à-dire que, pour tout i, $N_i \in \overline{N_{i-1}N_{i+1}}$, e qui permettrait d'établir une réelle correspondance entre les $\overline{M_iM_{i+1}}$ et les $\overline{N_iN_{i+1}}$. Cela permettrait en outre que la longueur de B soit donnée par :

$$|B| = \sum_{i\in[\![1;n]\!]} \overline{N_iN_{i+1}}$$

et d'approximer des intégrales sur A par des intégrales sur B.

Notons $\delta_i = \overline{M_iM_{i+1}}$, et appelons le «tube ε» $\gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^2,\, d(x,\delta_i) < \varepsilon\} = \overline{M_iM_{i+1}} \oplus \varepsilon$. Pour un i quelconque, considérons le point N_i de B. B étant dans S, B est paramétrable par son abscisse curviligne. Pour un sens de parcours de B donné, notons $P(t)$ cette paramétrisation, avec $P(0) = N_i$. La fonction qui à t associe $d(P(t),\delta_i)$ est continue, et est strictement inférieure à ε en $t = 0$. Pour ε choisi initialement assez petit (i.e. $< \frac{\text{diamètre}(A)}{3}$, ce qui n'est pas difficile...), il existe un point de A dont la distance à δ_i soit supérieure à 2ε, et par conséquent un point de B dont la distance à δ_i soit supérieure à ε (puisque pour tout point de A il existe un point de B à une distance inférieure à ε). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins une valeur strictement positive de B pour laquelle $d(P(t), \delta_i) = \varepsilon$. Notons $t_0 = \inf_{t>0}\{t; d(P(t), \delta_i) = \varepsilon\}$. Comme pour tout point de B il existe un point de A qui soit à une distance strictement inférieure à ε, il existe en particulier un $i_0 \neq i$ tel que $d(P(t_0), \delta_{i_0}) \leqslant \varepsilon$. Il s'agit de prouver que $|i - i_0| = 1$, c'est-à-dire qu'en suivant l'abscisse curviligne de B, on passe d'un tube ε à l'autre en suivant l'ordre de leur indexation.

Supposons donc que $|i - i_0| > 1$. On a $d(P(t_0), \delta_i) = \varepsilon$ et $d(P(t_0), \delta_{i_0}) < \varepsilon$, donc :

$$d(\delta_i, \delta_{i_0}) < 2\varepsilon$$

Soient dès lors j et k tels que $|j - k| > 1$ et $d(\delta_j, \delta_k) = \min_{a,b,|a-b|>1} |d(\delta_a - \delta_b)|$. On a en particulier $d(\delta_j, \delta_k) < 2\varepsilon$. Il existe alors un point P dans le plan tel que $d(P, \delta_j) = d(P, \delta_k) = \frac{1}{2}d(\delta_j, \delta_k) < \varepsilon$ (prendre le milieu du segment dont les extrémités sont les points de δ_j et δ_k en lesquels la distance entre les deux est atteinte). Si $d(P, \delta_j) = d(P, A)$, alors P appartient au squelette de A, alors que $d(P, A) < \varepsilon$. Sinon, c'est qu'il existe l avec $l \neq j$ et $l \neq k$ tel que $d(P, A) = d(P, \delta_l) < d(P, \delta_j) = d(P, \delta_k)$. En particulier ceci implique $d(\delta_j, \delta_l) \leqslant d(P, \delta_j) + d(P, \delta_l) < d(P, \delta_j) + d(P, \delta_k)$ et donc $d(\delta_j, \delta_l) < d(\delta_j, \delta_k)$, et de même $d(\delta_k, \delta_l) < d(\delta_j, \delta_k)$. Or, par hypothèse sur j et k, ceci n'est possible que si $|j - l| = 1$ et $|k - l| = 1$, d'où $|k - j| = 2$.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que cette dernière hypothèse peut être éliminée, et que la précédente n'est pas envisageable.

Pour éliminer la dernière hypothèse, il suffit d'imposer les restrictions $\varepsilon < \delta/4$ et $\delta < \pi/\kappa_{\max}$. La condition de courbure maximale $\kappa_{\max}$ mène alors à $d(\delta_a, \delta_{a+2}) > 2\varepsilon$ pour tout a (c'est le cas du cercle, déjà étudié précédemment, où l'on avait obtenu en particulier $M_{a+1}M_{a+2} = \delta + o(\delta)$).

Il ne reste plus qu'à montrer, par l'absurde, qu'il existe un ε_0 tel qu'il n'y ait pas de point appartenant au squelette dans $A \oplus \varepsilon_0$.

Soit (P_n) une suite de points du squelette, telle que $d(P_n, A)$ tende vers 0. Par compacité de $\{x \in \mathbb{R}^2, d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$, il existe un point Q tel qu'une sous-suite converge de P_n converge vers Q. Comme $d(P_n, A) \to 0$ et que la distance à un compact est continue, $d(Q, A) = 0$ et donc $Q \in A$. Soient (C_n, D_n) des couples de points de A tels que $d(C_n, D_n) \neq 0$, $d(C_n, P_n) = d(D_n, P_n)$, ce qui est possible puisque P_n appartient au squelette de A. Supposons que l'on ait imposé les «restrictions» précédentes sur ε et δ, et montrons qu'elles impliquent que si $d(P_n, A) < \frac{1}{2\kappa_{\max}}$, alors C_n et D_n ne sont jamais sur le même δ_a. En effet, s'ils l'étaient, on aurait $\overline{C_nD_n} < \widehat{C_nP_cD_n}C_nP_n$, donc $\widehat{C_nP_cD_n} > \frac{C_nD_n}{C_nP_n} \geqslant 2\kappa_{\max}C_nD_n$. Or, à cause de la courbure maximale $\kappa_{\max}$, l'angle maximal entre les tangentes en C_n et D_n est $\kappa_{\max}\overline{C_nD_n}$; et comme $C_nD_n - \overline{C_nD_n} = O(\overline{C_nD_n}^2)$, cela n'est pas envisageable.

À partir d'un certain rang, C_n et D_n ne sont donc jamais sur le même δ_a. Avec un raisonnement similaire (remarquez que δ n'intervient pas directement dans cette expression, juste comme borne pour que $\overline{C_nD_n}$ soit suffisamment petit, ce qui implique comme résultat que $C_nP_n \leqslant \frac{1}{2\kappa_{\max}} \Rightarrow \overline{C_nD_n} > \delta$), en divisant δ par 3, on obtient même : l'écart entre les numéros des δ qui portent C_n et D_n est supérieur à 2 à partir d'un certain rang.

Si l'on s'attarde sur les indices des δ auxquels appartiennent les $(C_m)_{0 \leqslant m}$, qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs ($[\![1; n]\!]$), on peut relever un indice atteint une infinité de fois. Considérons maintenant une sous-suite de $(C_{\varphi(m)})$ à valeur exclusivement dans le même δ. On peut opérer de façon similaire sur $(D_{\varphi(m)})$ en en extrayant une sous-suite à valeur exclusivement dans un même δ. Nous disposons maintenant d'une suite de couples que nous renoterons (C_m, D_m) qui vérifie qu'il existe deux indices différents i et j tels que $|i-j|>1$, $\forall m, C_m \in \delta_i$, $\forall m, D_m \in \delta_j$, $\forall m, P_mC_m = P_mD_m = d(P_m, A)$ et $P_m \to Q \in A$. Par compacité on peut extraire de cette suite de couples une sous-suite de couples qui converge, et ce vers un couple (C, D) de points de A, car la distance à A est continue. Nous avons donc trois points de A, qui vérifient $C \in \delta_i$, $D \in \delta_j$, avec $|i-j|>1$, et $CP = DP = 0$ par continuité des distances. Nous avons donc un point commun à δ_i et δ_j, deux morceaux de A qui ne se suivent pas. D'où une contradiction, puisque l'on a supposé A dans point double.

On a donc l'existence d'un ε_0 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, le tube ε autour de A $(A \oplus \varepsilon)$ a une intersection vide avec le squelette de A.

Théorème 4.3 *Soit A une courbe $\mathcal{C}^2$, de courbure bornée, sans point d'intersection. Alors la distance de A à son squelette est non nulle.*

Remarque 4.4 *Considérons l'ensemble $E(\kappa_{\max})$ des courbes $\mathcal{C}^2$, de courbure bornée par $\kappa_{\max}$, sans point d'intersection. La distance d'une courbe de cet ensemble à son squelette* ***n'****est* ***pas*** *minorée par une fonction strictement positive de $\kappa_{\max}$. Autrement dit :*

$$\forall \kappa_{\max} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \inf_{A \in E(\kappa_{\max})} d\left(A, Squelette(A)\right) = 0$$

Par conséquent, quand on parcourt B par son abscisse curviligne, on ne peut que passer d'un tube γ_i à un tube adjacent, γ_{i+1} ou γ_{i-1}. Lors de ce parcours, l'on passe au moins une fois par chacun des tubes, puisque B passe par tous les points N_i. On a montré précédemment que :

$$\left| \sum_i N_iN_{i+1} - |B| \right| \leqslant O(\delta^2) + O(\frac{\varepsilon}{\delta})$$

Parcourons la courbe en partant du point N_0, et notons $\sigma(i)$, pour i entier, l'indice des points rencontrés, dans l'ordre. On a donc $\sigma(0) = \sigma(n) = 0$, mais pas nécessairement (a priori) $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| = 1$ pour tout i. Il s'agit ici de prouver que $\sigma(i)$ est monotone en i.

Pour cela, on va utiliser l'information que l'on a sur la longueur de B, et montrer que $\overline{N_{\sigma(i)}N_{\sigma(i+1)}} \geqslant |\sigma(i+1) - \sigma(i)|(\delta + O(\delta^{5/2}))$, où le O est uniforme, ne dépend pas de i.

Considérons un point $N_{\sigma(i)}$ ainsi que son suivant quand l'on parcourt la courbe B, $N_{\sigma(i+1)}$. $N_{\sigma(i)}$ appartient à la boule ouverte de rayon ε de centre $M_{\sigma(i)}$, donc en particulier appartient aux deux tubes fermés $\overline{\gamma}_{\sigma(i)-1}$ et $\overline{\gamma}_{\sigma(i)}$.

La courbe B est continue par rapport à son abscisse curviligne, donc l'image réciproque (par B) d'un tube fermé $\overline{\gamma}_k$ est une réunion d'intervalles fermés disjoints.

Donc la réunion des images réciproques de chaque tube fermé, exceptés $\overline{\gamma}_{\sigma(i)-1}$ et $\overline{\gamma}_{\sigma(i)}$, est fermée, et donc atteint sa borne inférieure sur l'intervalle entre les abscisses curvilignes de $N_{\sigma(i)}$ et de $N_{\sigma(i+1)}$ (cette réunion est non vide car $N_{\sigma(i+1)} \in \overline{\gamma}_{\sigma(i+1)}$). En plus clair, cela justifie l'existence, lorsque l'on parcourt B en allant de $N_{\sigma(i)}$ à $N_{\sigma(i+1)}$, d'un premier point à appartenir à un autre tube que $\overline{\gamma}_{\sigma(i)-1}$ ou $\overline{\gamma}_{\sigma(i)}$, tube que l'on notera $\overline{\gamma}_j$. Ce point étant au bord du tube $\overline{\gamma}_j$, il appartient nécessairement également à un autre tube, $\overline{\gamma}_k$, avec $k = \sigma(i) - 1$ ou $k = \sigma(i)$. En effet, chaque point de B appartient à au moins un tube ouvert, et en l'occurence il ne peut pas s'agir du tube γ_j, puisqu'il est à son bord, et donc il ne peut (par définition du point en question) que s'agir de l'un des deux tubes $\gamma_{\sigma(i)-1}$ ou $\gamma_{\sigma(i)}$. Et il y a donc intersection du tube γ_j avec l'un de ces deux-là.

Or l'on a vu précédemment que deux tubes ne peuvent s'intersecter que si leurs indices se suivent. Donc soit $|j-(\sigma(i)-1)| = 1$, soit $|j-\sigma(i)| = 1$. D'où $j = \sigma(i)-2$ ou $j = \sigma(i)+1$. Et donc la première boule de rayon ε de centre l'un des M_l (différent de $M_{\sigma(i)}$)que l'on rencontre en parcourant B de $N_{\sigma(i)}$ vers $N_{\sigma(i+1)}$ est centrée soit en $M_{\sigma(i)-1}$, soit en $M_{\sigma(i)+1}$.

On peut répéter ce processus assez de fois pour obtenir la liste des indices des centres des boules rencontrées, le nombre de boules rencontrées étant fini (puisque l'ensemble des intersections deux à deux des images réciproques des tubes fermés est de cardinal fini), et vérifier que le passage à la boule suivante se fait toujours par addition ou soustraction d'une unité sur l'indice du centre de la boule.

Or une courbe qui passe par deux boules successives (au sens des indices des centres des boules) est de longueur supérieure à $\delta - 2\varepsilon + O(\delta^3)$. Donc la longueur de la courbe B entre $N_{\sigma(i)}$ et $N_{\sigma(i+1)}$ est supérieure à cette quantité multipliée par le nombre de fois que l'on change de boule (puisque l'on a montré que les indices des centres des boules rencontrées lors du parcours de B se suivent). Or ce facteur multiplicateur est supérieur à $|\sigma(i)-\sigma(i+1)(\text{modulo n})|$, que l'on notera abusivement $|\sigma(i) - \sigma(i+1)|$.

On a donc :

$$\overline{N_{\sigma(i)}N_{\sigma(i+1)}} \;\geqslant\; |\sigma(i) - \sigma(i+1)| \; \big(\delta - 2\varepsilon + O(\delta^3)\big)$$

Et donc :

$$|B| \;\geqslant\; \left(\sum_i |\sigma(i) - \sigma(i+1)|\right) \; \big(\delta - 2\varepsilon + O(\delta^3)\big)$$

Et comme l'on sait que $|\,|B| - |A|\,| \leqslant \varepsilon$, et que le cardinal des i est par construction $n = \frac{|A|}{\delta}$, en prenant $\varepsilon = \delta^3$ (ou encore plus petit ; ce que l'on peut faire puisque ce que l'on a fait est valable pour tout ε assez petit), on obtient, on considérant les différents ordres en δ :

$$\left(\sum_i |\sigma(i) - \sigma(i+1)|\right) \leqslant n$$

sans quoi l'on aurait :

$$|B| \;\geqslant\; (n+1)\big(\delta + O(\delta^3)\big)$$
$$|B| \;\geqslant\; |A| + \delta + O(\delta^2)$$

$$\delta^2 \geqslant \big|\, |B| - |A| \,\big| \geqslant \delta$$

La condition que l'on a trouvée sur les $\sigma(i)$ ne peut être vérifiée que si, pour tout i, $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = 1$, ce qui implique, comme tous les valeurs de $[\![1;n]\!]$ sont atteintes, que σ est monotone. CQFD.

4.5 Longueur des $\overline{N_i N_{i+1}}$

Les N_i étant ordonnés sur B, $\overline{N_i N_{i+1}} \geqslant N_i N_{i+1}$. D'où :

$$\delta - \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 - 2\varepsilon + O(\delta^4) \leqslant N_i N_{i+1} \leqslant \overline{N_i N_{i+1}}$$

où le $O(\delta^4)$ est uniforme sur la courbe.

$$\overline{N_i N_{i+1}} - \delta + \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 + 2\varepsilon + O(\delta^4) \geqslant 0$$

En sommant sur i ($n = \frac{|A|}{\delta}$) :

$$\sum_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\overline{N_i N_{i+1}} - \delta + \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 + 2\varepsilon + O(\delta^4) \right) = |B| - |A| + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)$$

Comme $d(A,B) < \varepsilon$, on a en particulier $|B| - |A| < \varepsilon$. Ce qui nous donne :

$$\sum_{i \in [\![1;n]\!]} \left(\overline{N_i N_{i+1}} - \delta + \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 + 2\varepsilon + O(\delta^4) \right) \leqslant \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)$$

Comme tous les termes de la somme sont positifs, cela implique en particulier :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \ \overline{N_i N_{i+1}} - \delta + \frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 + 2\varepsilon + O(\delta^4) \leqslant \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)$$

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ \ \overline{N_i N_{i+1}} \leqslant \delta + \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)$$

Ce qui nous donne l'encadrement final, pour tout i :

$$-\frac{1}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^3 - 2\varepsilon + O(\delta^4) \leqslant \overline{N_i N_{i+1}} - \delta \leqslant \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)$$

4.6 Continuité de l'intégrale d'une fonction régulière

Soit f une fonction mesurable, régulière, c'est-à-dire en l'occurence $\mathcal{C}^1$ sur le domaine où appartiennent les courbes. Il s'agit ici de majorer la différence $\left|\int_A f - \int_B f\right|$.

4.6.1 Inégalité entre l'intégrale sur A et son approximation

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\overline{M_iM_{i+1}}} f - \delta f(M_i)\right| &\leqslant \int_{\overline{M_iM_{i+1}}} |f(x) - f(M_i)|\, dx \\
&\leqslant \delta \sup_{\overline{M_iM_{i+1}}} |f - f(M_i)| \\
&\leqslant \delta^2 \sup_{\overline{M_iM_{i+1}}} |\nabla f|
\end{aligned}$$

Comme $\left|\int_A f - \delta \sum_i f(M_i)\right| \leqslant \sum_i \left|\int_{\overline{M_iM_{i+1}}} f - \delta f(M_i)\right|$, on a :

$$\left|\int_A f - \delta \sum_i f(M_i)\right| \leqslant |A|\delta \sup_A |\nabla f|$$

4.6.2 Inégalité entre l'intégrale sur B et son approximation

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\overline{N_iN_{i+1}}} f - \overline{N_iN_{i+1}} f(N_i)\right| &\leqslant \int_{\overline{N_iN_{i+1}}} |f(x) - f(N_i)|\, dx \\
&\leqslant \left(\delta + \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2\delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)\right) \sup_{\overline{N_iN_{i+1}}} |f - f(N_i)| \\
&\leqslant \left(\delta + \varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2\delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)\right)^2 \sup_{\overline{N_iN_{i+1}}} |\nabla f|
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\left|\int_B f - \sum_i \overline{N_iN_{i+1}} f(N_i)\right| \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2\delta + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta^2} + O(\delta^2)\right)^2 \delta |A| \sup_B |\nabla f|$$

4.6.3 Inégalité entre deux approximations de l'intégrale de B

$$\left|\sum_i \overline{N_iN_{i+1}} f(N_i) - \sum_i \delta f(N_i)\right| \leqslant \sum_i |f(N_i)| \left(2\varepsilon + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2\delta^2 + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta} + O(\delta^3)\right)$$

(d'après l'encadrement de $\overline{N_iN_{i+1}} - \delta$ précédemment obtenu)

D'où :

$$\left|\sum_i \overline{N_iN_{i+1}} f(N_i) - \sum_i \delta f(N_i)\right| \leqslant \left(2\frac{\varepsilon}{\delta} + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2\delta + 2|A|\frac{\varepsilon}{\delta^2} + O(\delta^2)\right) |A| \sup_B |f|$$

4.6.4 Inégalité entre les approximations des intégrales de A et de$B$

Si l'on pose $A \oplus \varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, A) \leqslant \varepsilon\}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_i f(N_i) - \sum_i f(M_i)\right| &\leqslant \sum_i |f(N_i) - f(M_i)| \\
&\leqslant \sum_i \varepsilon \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f| \\
&\leqslant |A| \frac{\varepsilon}{\delta} \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f|
\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\sum_i \delta f(N_i) - \sum_i \delta f(M_i)\right| \leqslant |A| \varepsilon \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f|$$

4.6.5 Différence entre les deux intégrales

En sommant toutes ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_A f - \int_B f\right| \leqslant \quad & \left[\delta + \left(1 + \tfrac{\varepsilon}{\delta} + \tfrac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta + 2|A|\tfrac{\varepsilon}{\delta^2} + O(\delta^2)\right)^2 \delta \right. \\
& \left. + \left(2\tfrac{\varepsilon}{\delta} + \tfrac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 \delta + 2|A|\tfrac{\varepsilon}{\delta^2} + O(\delta^2)\right) + \varepsilon\right] \; |A| \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f|
\end{aligned}$$

Au vu de cette inégalité, il suffit de prendre $\varepsilon = \delta^3$ pour obtenir :

$$\left|\int_A f - \int_B f\right| \leqslant \left(1 + \frac{|A|}{24}\kappa_{\max}^2 + 2|A|\right) \delta |A| \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f|$$

et assurer ainsi la continuité de l'intégration le long de A par rapport à la «distance enrichie».

En effet, on a montré l'inégalité ci-dessus pour tout δ suffisamment petit et tel que $\frac{|A|}{\delta}$ soit entier. La généralisation à δ réel suffisamment petit se fait simplement, d'une part en raisonnant sur les courbes auxquelles on a retranché ce dernier morceau, et d'autre part en considérant que le dernier fragment $(\overline{M_n M_0})$ de A est de longueur plus petite que δ et que donc les intégrales sur ce fragment sont négligeables (ou du moins en $O(\delta)$). Notons par ailleurs que cette dernière méthode conduit à généraliser le résultat ci-dessus pour des courbes ayant un nombre fini de points doubles.

L'expression «pour tout δ suffisamment petit» équivaut à l'expression «pour tout ε suffisamment petit», étant donnée la relation $\varepsilon = \delta^3$.

La continuité s'exprime donc par : pour toute courbe A de S, pour tout ε suffisamment petit, pour toute fonction f $\mathcal{C}^1$ sur $A \oplus \varepsilon$, on a, pour toute courbe B de S telle que $d(A, B) < \varepsilon$:

$$\left|\int_A f - \int_B f\right| \leqslant K(|A|, \kappa_{\max}) \, \varepsilon^{1/3} \sup_{A\oplus\varepsilon} |\nabla f|$$

où $K(x, y) = \left(1 + \frac{1}{24} x y^2 + 2x\right) \, x$.

4.7 Continuité de l'énergie de Hausdorff

Soient A et B deux courbes de S. On étudie la continuité en A. L'énergie de Hausdorff est une fonction régulière de deux termes symétriques entre eux. Il suffit donc de prouver la continuité de ces termes. Or :

$$\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_A^\varphi\rangle_B^\psi = \langle\cdot\rangle_B^\psi \circ \langle\cdot\rangle_A^\varphi \circ d(\cdot,\cdot)$$

La distance entre deux points du plan n'étant pas $\mathcal{C}^1$, le résultat précédent ne s'applique pas, à proprement parler. Cependant, dans la démonstration précédente, pour tout domaine D, on peut remplacer $\sup_D |\nabla f|$ par $\sup_{x,y\in D} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|}$. Cette dernière valeur est finie et vaut 1 dans le cas de la distance ; mais le cas qui nous intéresse n'est pas $f(x) = d(x,y)$ mais $f(x) = \varphi(d(x,y))$ où y est un point fixé. Comme φ est régulière, les valeurs atteintes sur un compact par sa dérivée sont bornées. Or, sur $A \oplus \varepsilon$, et pour tout y, les valeurs atteintes par $d(\cdot,y)$ sont incluses dans un compact. Donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x,y\in D} \frac{|\varphi(d(x,z)) - \varphi(d(y,z))|}{\|x-y\|} &\leqslant \sup_{x\in D} \varphi'(d(x,z)) \sup_{x,y\in D} \frac{|d(x,z)-d(y,z)|}{\|x-y\|} \\
&\leqslant \sup_{x\in D} \varphi'(d(x,z)) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la continuité en A de $\langle d(\cdot,y)\rangle_A^\varphi$ pour y appartenant à un domaine compact donné étant uniforme, l'intégrale d'une fonction régulière de cette quantité sur B sera continue en A.

D'autre part, la continuité en A de $\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_B^\varphi\rangle_A^\psi$ est assurée par le fait que $f(y) = \langle d(\cdot,y)\rangle_B^\varphi$ vérifie $\sup_{x,y\in D} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} < \infty$ pour tout domaine domaine D borné.

On a donc la continuité de $E_H(A,B)$ en A par rapport la «distance enrichie».