Déformation de courbes planes

Guillaume Charpiat

Rapport de stage du DEA MVA
sous la direction de

Renaud Keriven
et
Olivier Faugeras

23 septembre 2002

Table des matières

Table des figures

Introduction

La vision occupe une part importante de la recherche actuelle en matière d'intelligence artificielle ou de systèmes autonomes. C'est dans cette lignée que s'inscrit le projet ***Odyssée*** (INRIA - ENS - ENPC). La reconnaissance automatique de formes a de bien nombreuses applications, que ce soit dans le milieu hospitalier, lorsqu'il faut repérer des tumeurs sur une radiographie, ou reconstituer des formes tridimensionnelles (telles que le cerveau) à partir d'IRM ; dans le domaine de la vidéo-surveillance, pour repérer au fond des piscines des débuts de noyade ; en cinématographie, pour le truquage de films, etc.

Les objets à repérer sont généralement caractérisés par leurs contours et leurs textures. Dans le cas d'analyse d'images planes, les contours sont des courbes planes (éventuellement des réunions de courbes planes), d'où l'intérêt porté en segmentation d'images à l'automatisation de la comparaison de deux courbes du plan. Dans le cadre de segmentation avec a priori, où l'on recherche un objet dans une image en en connaissant certaines caractéristiques, la déformation continue et esthétique d'une courbe (celle que l'on fait évoluer) vers une autre (le modèle typique, ou la donnée, selon les cas) est indispensable. Par ailleurs, lors de l'apprentissage des caractéristiques d'un objet à partir d'un ensemble d'exemples, la notion de courbe moyenne et de déformations caractéristiques, que tout humain a intuitivement, est difficile à expliciter. De même, la notion d'appartenance d'un exemple à un ensemble, ou de sa représentativité de celui-ci, est essentielle. Toutes ces notions reposent sur une autre, la « distance » intuitive entre deux courbes planes.

L'objet de ce rapport est précisément de construire explicitement une telle distance sur les courbes planes, qui soit mathématiquement sensée **et** esthétique, c'est-à-dire qui donne des résultats satisfaisants pour un œil humain, et qui soit par ailleurs relativement facile à implémenter.

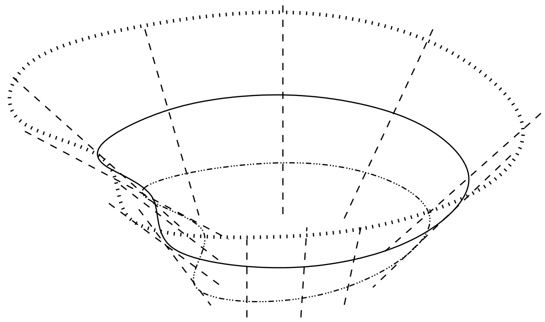
En premier lieu, nous explorerons rapidement la méthode des *Level-Sets*, utilisée en pratique pour gérer les évolutions de courbes ; nous nous préoccuperons ensuite de définir des pseudo-distances (que nous nommerons énergies) sur l'espace des courbes, puis d'étudier en détails les propriétés de l'une d'elles ; enfin nous construirons explicitement les notions précédemment exposées, en les agrémentant d'illustrations résultant de leur implémentation.

1 Présentation de la méthode des *Level Sets*

1.1 Principe

La méthode des *Level Sets* consiste à représenter (en l'occurence) une courbe C du plan de façon implicite par une fonction f réelle définie sur le plan, le plus couramment la fonction qui à un point associe la distance signée de ce point à la courbe, un signe positif signifiant que le point est à l'extérieur de la courbe. La courbe C est donné par le niveau 0 de f. Dans le cas où f est la fonction distance signée, la donnée de la courbe C est équivalente à la donnée de f, puisque C est le niveau 0 de f, et f est définie pour tout P par $f(P) = \varepsilon(P, C)\ d(P, C)$ où ε vaut 1 ou -1 selon que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de la courbe C.

FIG. 1: Représentation graphique de la distance signée à une courbe



L'intérêt de représenter les courbes planes d'une telle façon est qu'il n'y a plus de problèmes de changement de topologie. En effet, le nombre de composantes connexes d'une courbe plane peut varier. Si l'on a choisi une représentation de la courbe de type paramétrique, il faut prévoir dans l'implémentation des cas particuliers pour la gestion de tels phénomènes. L'avantage pratique des *Level Sets* est encore plus flagrant dans le cas de déformation de surfaces dans un espace de dimension 3.

L'évolution ne se fait donc plus par une addition de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à chacun des points de la paramétrisation de la courbe, mais par une addition de réels à la fonction distance signée en chacun des points du plan où elle a été définie. On a donc affaire à une équation du type, pour $x \in \mathbb{R}^2$ point du plan et t paramètre d'évolution :

$$\partial_t f(x, t) = g\left(x, f(\cdot, t)\right)$$

la valeur de $\partial_t f(x, t)$ pour x appartenant au niveau 0 étant imposée par le déplacement $\partial_t C(x, t)$ que la courbe subit en ce point, par la relation :

$$\partial_t f(x, t) = -\partial_t C(x, t) \cdot \nabla_x f(x, t)$$

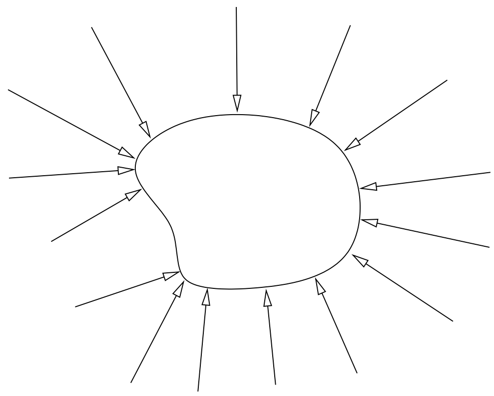
$\nabla_x f(x, t)$ étant la normale extérieure à la courbe $C(\cdot, t)$ en x. La fonction g est donc connue en les points x vérifiant $f(x, t) = 0$. Il reste maintenant à étendre la définition de g au reste du plan.

Par ailleurs, afin de gagner en temps de calcul, en particulier dans le cas d'évolution de surfaces, on peut choisir de ne faire évoluer la fonction f que là où sa valeur absolue est inférieure à une certaine quantité. En effet, sous réserve qu'en un pas de temps un point de la courbe ne puisse pas se déplacer de plus d'une certaine distance, il suffit de traiter une bande centrée sur le niveau 0 de $f(\cdot, t)$ d'une certaine épaisseur seulement (*narrow-band*), la bande en question devant être recentrée dès que le niveau 0 s'approche trop du bord lors de l'évolution.

1.2 Approche β-*local*

Plusieurs façons d'utiliser les *Level Sets*, c'est-à-dire de choisir l'expression de g en fonction de l'évolution désirée, sont envisageables. Celle-ci est celle qui a été utilisée pour obtenir les résultats donnés dans ce rapport. Elle consiste à associer à un point y du plan la valeur de g au point du niveau 0 le plus proche de y. Par conséquent, lors de l'implémentation, on attribue à chaque point du plan un pointeur vers le point le plus proche du niveau 0 de $f(\cdot, t)$, afin de pouvoir estimer la valeur $\partial_t f(y, t)$.

FIG. 2: Représentation schématique de l'approche $\beta - local$

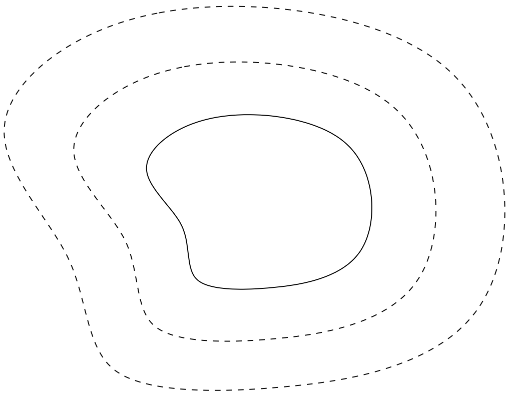


L'attribution à chaque point de sa projection sur la courbe, a priori gourmande en temps puisque la méthode naïve demanderait pour chaque point du plan de parcourir la courbe, peut être réalisée par la méthode des *Marching cubes* [6].

1.3 Action par ligne de niveau

L'autre méthode naturelle envisageable est de considérer chaque courbe de niveau indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire de traiter, pour tout l, la courbe de niveau l comme s'il s'agissait de la courbe de niveau 0. Rien ne garantit alors a priori que f reste une fonction distance au cours de l'évolution ; on peut dès lors penser à réinitialiser régulièremenr f vis-à-vis de son niveau 0.

FIG. 3: Représentation schématique de l'action par ligne de niveau



2 Énergie à minimiser

Étant données deux courbes Γ et Γ_0 dans le plan, on cherche à déformer l'une d'entre elles, l'exemple (Γ), vers le modèle (Γ_0), de la façon la plus naturelle possible.

Il s'agit de définir une énergie adéquate, qui exprime la distance entre deux courbes, sur laquelle on pourra effectuer une descente de gradient (ce qui permettra de suivre des géodésiques, et d'obtenir des formes moyennes entre différentes courbes). L'intérêt de disposer d'une telle énergie est que son gradient nous fournit instantanément la direction à suivre, c'est-à-dire la transformation élémentaire que Γ doit subir pour se rapprocher de Γ_0.

La distance la plus naturelle qui vient à l'esprit est la borne inférieure, sur l'ensemble des transformations du plan (appartenant à une certaine classe à définir) qui envoient Γ sur Γ_0, de la norme de ces transformations ; la norme d'une transformation étant elle-même la borne inférieure de l'intégrale le long d'un chemin entre Γ et Γ_0 de la norme de la transformation élémentaire correspondante (qui appartient à l'espace tangent à la courbe en ce point du chemin). Le cadre mathématique est explicité dans la partie correspondante, *Problèmes mathématiques.* Seulement, on ne peut pas disposer de cette distance entre deux courbes, ou de son gradient, si l'on ne connait pas déjà la géodésique ainsi que chacune des transformations élémentaires, ce que l'on cherche précisément à éviter de calculer.

2.1 Distance de Hausdorff

La première distance naturelle implémentable est la distance de Hausdorff :

$$\begin{aligned} d_H(\Gamma, \Gamma_0) &= \sup_{x\in\Gamma} d(x, \Gamma_0) + \sup_{y\in\Gamma_0} d(y, \Gamma) \\ &= \sup_{x\in\Gamma} \inf_{y\in\Gamma_0} d(x, y) + \sup_{y\in\Gamma_0} \inf_{x\in\Gamma} d(x, y) \end{aligned}$$

Le problème qui se pose maintenant est qu'une telle distance n'est pas dérivable : le gradient (au sens des distributions) se présente sous la forme d'une somme de Dirac le long de la courbe. En pratique, lors d'une descente de gradient le long de cette distance, la présence d'un sup et d'un inf incite la courbe à ne bouger qu'en certains points précis, ce qui fait apparaitre des pics sur une courbe que l'on aurait souhaitée lisse.

On est alors amené à approximer les bornes sup et inf par des intégrales sur les courbes. On sait en effet, si f est positive et continue, que :

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(\int_{\Gamma_0}(f(y))^\beta\,dy\right)^{1/\beta} = \sup_{y\in\Gamma_0} f(y)$$

De même :

$$\begin{aligned}
d(x,\Gamma_0) &= \inf_{y\in\Gamma_0} d(x,y)\\
&= \inf_{y\in\Gamma_0}(d(x,y)+\varepsilon)-\varepsilon\\
&= \frac{1}{\sup\limits_{y\in\Gamma_0}\dfrac{1}{d(x,y)+\varepsilon}}-\varepsilon\\
&= \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\left(\displaystyle\int_{\Gamma_0}\left(\frac{1}{d(x,y)+\varepsilon}\right)^\beta dy\right)^{1/\beta}}-\varepsilon
\end{aligned}$$

Ce qui nous incite à considérer la quantité suivante, pour α et β assez grands, afin d'exprimer $\sup_{x\in\Gamma} d(x,\Gamma_0)$:

$$\left(\int_\Gamma\left(\frac{1}{\left(\displaystyle\int_{\Gamma_0}\left(\frac{1}{d(x,y)+\varepsilon}\right)^\beta dy\right)^{1/\beta}}-\varepsilon\right)^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$$

i.e.

$$\left(\int_\Gamma\left(\left(\int_{\Gamma_0}(d(x,y)+\varepsilon)^{-\beta}\,dy\right)^{-1/\beta}-\varepsilon\right)^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$$

2.2 Approximations et notations

Cependant, on remarquera qu'à α et β fixés, la quantité précédente n'est pas homogène à une distance. On est donc amené à diviser chacune des intégrales par (par exemple) la longueur de la courbe sur laquelle elle porte.

De façon générale, $\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma f(x)dx$ est la moyenne de f sur la courbe Γ. De même,

$$\left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma f(x)^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$$

est en quelque sorte la moyenne de f le long de Γ, mais biaisée par le fait qu'on favorise les valeurs de f les plus grandes si $\alpha > 1$, et qui tend vers $\sup\limits_\Gamma f$ quand α tend vers l'infini.

En s'appuyant sur la notation

$$\langle f\rangle_\Gamma = \frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma f$$

notons, pour toute fonction φ de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, ou $\mathbb{R}^+_*$ dans $\mathbb{R}$ mesurable injective :

$$\begin{aligned}\langle f\rangle_\Gamma^\varphi &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \varphi\circ f\right)\\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma \varphi(f(x))dx\right)\end{aligned}$$

On remarquera en particulier que les unités de $\langle f\rangle_\Gamma^\varphi$ (que l'on nommera moyenne de f au sens φ) sont les mêmes que celles de f.

La dernière approximation de $\sup_{x\in\Gamma} d(x,\Gamma_0)$ devient : $\left\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\right\rangle_\Gamma^\psi$, où :

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ & : & \varphi(x) & = & \left(\frac{1}{x+\varepsilon}\right)^\beta \\ \psi & : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ & : & \psi(x) & = & x^\alpha \\ d & : & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & : & d(x,y) & = & \|x-y\| \end{array}$$

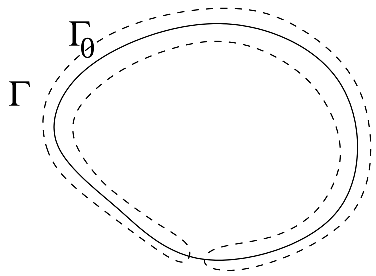
les principales qualités de φ et ψ étant d'être dérivables monotones, ce qui permet d'approximer respectivement (pour α et β grands) les inf et les sup des fonctions le long des courbes.

La distance de Hausdorff se transforme donc en l'énergie ci-dessous homogène à une longueur :

$$E_H(\Gamma,\Gamma_0) = \left\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\right\rangle_\Gamma^\psi + \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\rangle_{\Gamma_0}^\psi$$

Cependant, il se trouve que pour faire évoluer une courbe (Γ) vers une autre (Γ_0) par une descente de gradient sur l'énergie de Hausdorff entre deux courbes peut mener à des résultats non désirables. En effet, on peut en pratique être confronté au cas ci-dessous, dont la limite vérifie bien que la distance de Hausdorff est minimale (localement comme globalement) :

Fig. 4: Cas de convergence lors d'une descente de gradient, où la longueur est de la courbe est doublée



On est donc amené à ajouter un critère portant sur la différence de longueur des courbes. Or il est bien connu qu'un tel critère agit directement sur la régularité de la courbe : réduire la longueur revient à lisser, l'augmenter revient à faire apparaître des irrégularités. On cherche donc un critère qui permette de lisser Γ quand sa longueur est supérieure à celle de Γ_0, et qui n'intervienne pas dans le cas contraire. En s'appuyant sur la démarche précédente, un critère sympathique (i.e. continu et dérivable à souhaits) nous est donné par la formulation générique suivante :

$$E_L = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi\left(|\Gamma|\right) + \frac{1}{2}\Psi\left(|\Gamma_0|\right)\right)$$

où Ψ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, par exemple $\Psi(x) = x^\gamma$. Ce critère repose encore sur la notion de moyenne (de $|\Gamma|$ et $|\Gamma_0|$) au sens d'une fonction (Ψ). On notera désormais ce cas particulier discret du cas générique précédent :

$$\langle a, b\rangle^{\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi(a) + \frac{1}{2}\Psi(b)\right)$$

Ceci permet d'accorder plus de poids aux plus grands termes. Par exemple, si a et b représentent tous deux des erreurs censées être du même ordre de grandeur, une descente de gradient sur $\langle a, b\rangle^{\Psi}$ permettra de s'occuper en priorité de l'erreur la plus forte.

Nous disions donc :

$$E_L = \langle |\Gamma|, |\Gamma_0|\rangle^{\Psi}$$

Dans ce cas particulier où l'un des deux termes est fixe ($|\Gamma_0|$), cela revient à relativiser l'importance du lissage quand $|\Gamma|$ décroît (puisque E_L varie de plus en plus lentement).

D'ailleurs, on peut agir de même sur l'expression de E_H, qui est formée de deux composantes :

$$E_H(\Gamma, \Gamma_0) = \left\langle \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle^{\varphi}_{\Gamma_0}\rangle^{\psi}_{\Gamma}, \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle^{\varphi}_{\Gamma}\rangle^{\psi}_{\Gamma_0} \right\rangle^{\Psi}$$

Pour l'énergie finale, on peut avoir l'idée de faire une somme pondérée des deux énergies précédentes (qui sont toutes les deux homogènes à des longueurs) en suivant les règles de l'art :

$$E(\Gamma, \Gamma_0) = \langle E_H, E_L\rangle^{\tilde{\Psi}}$$

où $\tilde{\Psi}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Un peu plus d'attention sur la dernière expression de E montre que celle-ci n'est pas idéale : en effet, une telle écriture suppose que E_H et E_L sont du même ordre de grandeur, ou du moins que l'on cherche, lors de l'évolution de Γ, à faire en sorte que les deux « distances » E_H et E_L soient du même ordre de grandeur ; or il s'avère que E_H est de l'ordre de grandeur de l'écart maximal entre les deux courbes (au sens intuitif), tandis que E_L est de l'ordre de grandeur de la longueur de la courbe. Et, évidemment, on ne souhaite pas que ces deux longueurs caractéristiques soient les mêmes. Deux choix s'offrent : soit considérer vraiment la différence des longueurs $|\Gamma| - |\Gamma_0|$ plutôt que les longueurs, soit introduire une constante arbitraire indiquant le rapport que l'on souhaite entre les deux longueurs caractéristiques. Considérons la seconde solution, et introduisons une constante arbitraire η entre les deux longueurs caractéristiques :

$$\eta = \frac{\text{distance caractéristique entre les courbes } (\simeq E_H)}{\text{longueur caractéristique des courbes } (\simeq E_L)}$$

où η est choisi assez petit. La partie *Problèmes mathématiques* donne des indications quant au choix de η selon les fonctions ϕ, ψ, etc., utilisées. Nous concluons donc sur cette formule finale :

$$E(\Gamma, \Gamma_0) = \langle E_H, \eta E_L \rangle^{\Phi}$$

qui est la forme d'énergie utilisée en pratique pour les implémentations quand il est question d'énergie mixte Hausdorff-longueur $E_M = E_M(E_H, E_L)$.

Considérons maintenant l'expression du gradient de $E_H(\Gamma, \Gamma_0)$ par rapport à Γ, dont le calcul est exposé en annexe. Si l'on note $n(p)$ la normale au point $\Gamma(p)$ à la courbe Γ, et $\kappa(p)$ la courbure, la composante normale (à Γ) du gradient au point $y = \Gamma(p)$ est :

$$\begin{aligned}
\nabla E_H(y) \cdot n(p) \;\; = \;\; & C\kappa(p) \int_{\Gamma_0} \frac{\psi'}{\varphi'} \left(\langle d(x, \cdot) \rangle_{\Gamma}^{\varphi} \right) \;\; [\, \langle \varphi \circ d(x, \cdot) \rangle_{\Gamma} - \varphi \circ d(x, y) \,]\, dx \\
& + \; |\Gamma_0| \; D \; \kappa(p) \;\; \left[\left\langle \psi \left(\langle d(\cdot, \cdot) \rangle_{\Gamma_0}^{\varphi} \right) \right\rangle_{\Gamma} - \psi \left(\langle d(\cdot, y) \rangle_{\Gamma_0}^{\varphi} \right) \right] \\
+ \int_{\Gamma_0} \frac{\varphi' \circ d(x, y)}{d(x, y)} & \left[C \frac{\psi'}{\varphi'} \left(\langle d(x, \cdot) \rangle_{\Gamma}^{\varphi} \right) + D \frac{\psi'}{\varphi'} \left(\langle d(\cdot, y) \rangle_{\Gamma_0}^{\varphi} \right) \right] \; (y - x) \cdot n(p) \; dx
\end{aligned}$$

où $C = \dfrac{1}{|\Gamma| \; |\Gamma_0|} \dfrac{\Psi'}{\psi'} \left(\langle \langle d(\cdot, \cdot) \rangle_{\Gamma}^{\varphi} \rangle_{\Gamma_0}^{\psi} \right)$ et $D = \dfrac{1}{|\Gamma| \; |\Gamma_0|} \dfrac{\Psi'}{\psi'} \left(\langle \langle d(\cdot, \cdot) \rangle_{\Gamma_0}^{\varphi} \rangle_{\Gamma}^{\psi} \right)$.

Les deux premiers termes entre crochets font ressortir une propriété intéressante de l'opposé du gradient : l'homogénéisation (le long des courbes) de la distance des points d'une courbe à l'autre courbe. Remarquons par ailleurs que la forme même de l'énergie est telle que l'effet de lissage augmente avec la distance à l'autre courbe. En effet, le gradient d'une énergie de la forme $\displaystyle\int_{\Gamma} f(x, \Gamma_0) dx$ se traduit de façon informelle au niveau d'un point $\Gamma(q)$ de Γ par une somme de deux termes :

$$\left(\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma(q)} f(x, \Gamma_0) dx \right) \; \cdot n(q) \;\; - \;\; \kappa(q) f(\Gamma(q), \Gamma_0)$$

Si $f(x, \Gamma_0)$ exprime la distance de x à Γ_0, le premier terme cherche à déplacer le point $\Gamma(q)$ de façon à rapprocher au mieux Γ de Γ_0, tandis que le second terme lisse la courbe Γ, et cela d'autant plus que le point considéré de Γ est éloigné de Γ_0. Ce qui signifie qu'on ne s'attache aux détails de la courbe Γ qu'aux endroits où elle est proche de Γ_0, et qu'on la lisse là où l'information renfermée par la courbe Γ est inutile. Tout ceci permet de traiter en priorité les plus gros écarts entre les deux courbes. Les propriétés de E_H sont étudiées en détail plus loin.

2.3 Autres énergies

D'autres énergies dans l'espace des courbes sont envisageables, d'autant plus que, les courbes étant représentées par leurs fonctions distances, il vient naturellement à l'idée de chercher des normes sur les fonctions distances. Soient Γ et Γ_0

deux courbes. On note d_Γ et d_{Γ_0} les fonctions distances associées respectives, et on considère l'énergie dépendant du paramètre réel positif p :

$$E(\Gamma,\Gamma_0) = \|d_\Gamma - d_{\Gamma_0}\|_p + \|\nabla(d_\Gamma - d_{\Gamma_0})\|_p$$

qui n'est autre que la norme $W^1_p(\Omega)$ de la différence des fonctions distances $d_\Gamma - d_{\Gamma_0}$, où Ω est le domaine d'intégration. Si l'on considérait la norme L^p au lieu de la norme W^1_p, on constaterait en particulier que les points communs aux deux courbes sont fixes lors d'une descente de gradient pour aller d'une courbe vers l'autre, ce qui n'est parfois pas souhaitable. La fonction distance d_C à une courbe C n'étant pas dérivable sur le squelette de C, on approxime comme précédemment d_C par $\langle d(x,\cdot)\rangle_{C,\varphi}$, où φ est dérivable strictement décroissante. Si l'on note, pour $x \in \Gamma_0$ et $y \in \Gamma$,

$$B(x,y) = \frac{1}{|\Gamma|\ \varphi'(d_\Gamma(x))}\kappa(y)\left(\langle\varphi\circ d(x,\cdot)\rangle_\Gamma - \varphi\circ d(x,y)\right) + \varphi'(d(x,y))\frac{y-x}{d(x,y)}\cdot n(y)$$

et

$$\begin{aligned} C(x) &= \|d_\Gamma - d_{\Gamma_0}\|_p^{1-p}\ \ |(d_\Gamma - d_{\Gamma_0})(x)|^{p-1}\ \ \mathrm{sgn}\,[d_\Gamma - d_{\Gamma_0}]\,(x) \\ D(x) &= \|\nabla(d_\Gamma - d_{\Gamma_0})\|_p^{1-p}\ \ |\nabla(d_\Gamma - d_{\Gamma_0})(x)|^{p-2}\ \ \nabla(d_\Gamma - d_{\Gamma_0})(x) \end{aligned}$$

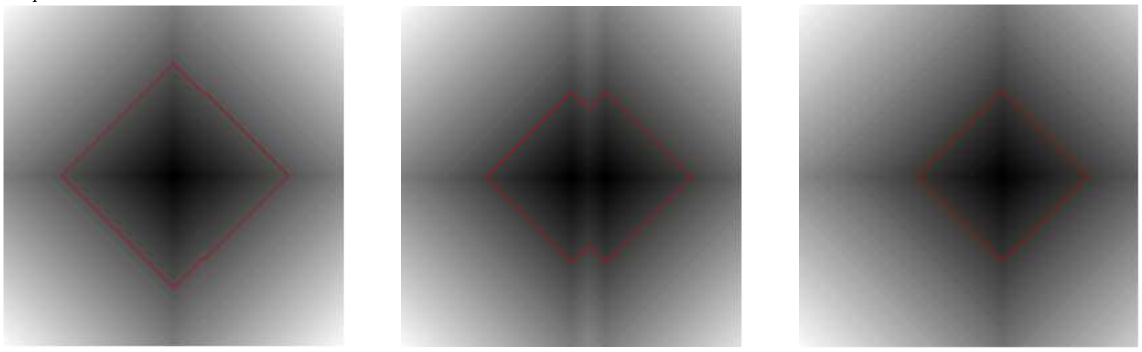
le gradient (dont le calcul est exposé en annexe) est alors donné par :

$$\nabla E(\Gamma,\Gamma_0)(y) = \int_\Omega C(x)\ B(x,y)\ +\ D(x)\ \nabla_x B(x,y)dx$$

Remarquons qu'au lieu d'agir sur les courbes, on aurait pu chercher à agir directement sur les fonctions distances définies sur le plan, en minimisant la norme W^1_p par rapport aux fonctions et non pas par rapport aux courbes. Le problème principal est qu'alors rien ne garantit plus que les fonctions obtenues restent des fonctions distances. Pour y remédier, on peut projeter, à chaque pas de temps, la nouvelle fonction sur l'ensemble des fonctions distances, mais, hormis la gourmandise en temps, cette technique présente bien des problèmes (par exemple si la projection empêche, de fait, la fonction d'évoluer ; ce que l'on observe).

Examinons ce cas particulier de descente de gradient sur $E(\Gamma,\Gamma_0)$ par rapport à Γ, dans le cas où Γ et Γ_0 sont deux carrés de tailles et de positions sensiblement différentes. En rouge figure la courbe Γ, à trois stades de son évolution (initialisation, mi-chemin vers la convergence, final) ; les lignes de niveau de la fonction distance à Γ sont également représentées. La forme « moyenne » au centre n'est pas particulièrement esthétique. C'est pour cette raison que par la suite, nous ne nous intéresserons plus à cette énergie.

FIG. 5: Exemple de déformation de courbes par descente de gradient sur la norme W_p^1 des fonctions distances



État initial À mi-chemin État final

3 Problèmes mathématiques

3.1 Cadre mathématique

On considère l'espace $\mathcal{X}$ des courbes $\mathcal{C}^2(\mathbb{S}_1, \mathbb{R}^2)$ paramétrées par un multiple de leur abscisse curviligne, c'est-à-dire les courbes A de $\mathcal{C}^2(\mathbb{S}_1, \mathbb{R}^2)$ telles que $\|A'\| = \text{c}^{\text{ste}} = \frac{|A|}{2\pi}$ où $|A|$ est la longueur de la courbe. Deux courbes de graphes identiques ne différent donc que par le choix du point initial de la paramétrisation, $A(1)$, ainsi que du sens de parcours. On cherche à formaliser les déplacements dans cet espace. En une courbe donnée A, on appelle champs de déformation les déformations élémentaires que l'on peut appliquer à A, autement dit les éléments δA de $\mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{R}^2)$, par l'association intuitive $A(p) \mapsto A(p) + \delta A(p)$. De fait, ce nouvel espace peut se réduire aux déplacements normaux [6]. Si on note $\overrightarrow{n}(p)$ la normale extérieure à la courbe, un champ de déformation $l \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}_1, \mathbb{R})$ envoie intuitivement chaque point $A(p)$ en $A(p) + l(p)\overrightarrow{n}(p)$. On dote cet espace tangent d'un produit scalaire absolument continu par rapport à l'intégrale du produit selon l'abscisse curviligne, avec la notation

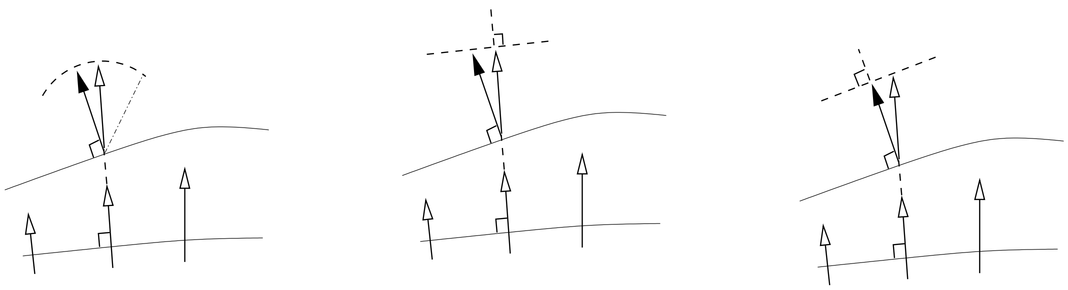
$$\langle \delta_1 | \delta_2 \rangle_\mu = \int_A \delta_1 \delta_2 \, d\mu$$

où $d\mu(p) = \frac{d\mu}{d\sigma}(p) d\sigma$, avec par exemple $\frac{d\mu}{d\sigma} = 1$ ou encore $1 + \kappa$, κ étant la courbure. Pour tout choix de $d\mu$ sur l'ensemble des courbes, $d\mu(A)$ pouvant être donné de façon générique comme ci-dessus, on peut définir une distance naturelle entre les courbes planes, par :

$$d(A, B) = \inf_{\Gamma \in \mathcal{F}(A,B)} \int_\Gamma \|\Gamma'(t)\| dt$$

où $\mathcal{F}(A, B)$ est l'ensemble des chemins $\mathcal{C}^1$ reliant A à B. Malheureusement, tout ceci présuppose déjà une distance prédéfinie entre les courbes (sans quoi on peut difficilement expliciter le concept de dérivée de Γ). La question serait alors de savoir quelles sont les distances stables par l'application qui à une distance prédéfinie attribue la nouvelle donnée par la formule ci-dessus... Le deuxième problème rencontré est celui du transport des champs de déformation d'une courbe à une autre : à défaut de connaitre les chemins de longueur minimale reliant une courbe à une autre, on a besoin d'un moyen d'associer à un champ de déformation δA sur la courbe A un champ de déformation δB sur une autre courbe quelconque B. Sans même nous soucier de savoir s'il est possible d'établir un tel transport T transitif, c'est-à-dire vérifiant $T_{A\to C}(\delta A) = T_{B\to C} \circ T_{A\to B}(\delta A)\ \forall B$, examinons ce qui se passe dans le cas de la poursuite d'une déformation. Voici trois modèles simples pour deux courbes A et C infinitésimalement proches, où la courbe C a le même graphe que l'application $B = A + \varepsilon\ \delta A \overrightarrow{n}_A$ (C se devant d'être reparamétrée), telles que l'application de $\mathbb{S}_1$ dans $B(\mathbb{S}_1)$ qui à p associe $B(p)$ soit injective (donc bijective, puisque surjective), ce qui a toujours lieu pour ε assez petit, les courbes étant $\mathcal{C}^2$ au sens géométrique du terme. Notons σ la reparamétrisation de B, c'est-à-dire l'application bijective de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_1$ telle que $C = B \circ \sigma$. Trois choix simples apparaissent. Soit on définit $\delta C = T_{A\to C}(\delta A)$ par $\delta C(p) = \delta A \circ \sigma(p)$, c'est-à-dire qu'on garde l'amplitude de mouvement normal constante. Soit au contraire on cherche à garder localement constante la composante selon le mouvement initial, $\delta C(p) \overrightarrow{n}_C(p) \cdot \overrightarrow{n}_A(\sigma(p))$, ce qui se fait en posant $\delta C(p) = \delta A \circ \sigma(p) \frac{1}{\overrightarrow{n}_C(p)\cdot \overrightarrow{n}_A(\sigma(p))}$. Soit encore on exporte tout d'abord le mouvement lui-même, puis on le projette dans l'espace des mouvements normaux ; c'est-à-dire que l'on fait en sorte que $\delta C(p) \overrightarrow{n}_C(p)$ soit le projeté sur $\overrightarrow{n}_C(p)$ de $\delta A \circ \sigma(p) \overrightarrow{n}_A(\sigma(p))$. Y aura-t-il une influence du choix de transport local sur la poursuite discrète d'un champ de déformation, c'est-à-dire sur la suite des courbes A_n définie par $A_{n+1} = A_n + \varepsilon \delta A_n$, $\delta A_{n+1} = T_{A_n \to A_{n+1}}(\delta A_n)$, pour une condition initiale donnée ? Un cas simple est étudié en annexe.

FIG. 6: Transport du champ de déformation



A - Amplitude

B - Composante selon le mouvement initial

C - Projection

La première idée pessimiste qui vient à l'esprit est que, pour un mode donné de transport local, il n'existe pas nécessairement systématiquement, pour tout couple de courbes (A, B), un champ de déformation initial δA tel que la poursuite de ce champ de déformation à partir de A aboutisse à B ; ce qui irait à l'encontre de nos intentions. Par ailleurs, même si ce champ de déformation intial existe, nous n'avons aucun moyen a priori de le déterminer. L'idéal serait d'avoir une énergie définie sur l'ensemble des couples de courbes, dont la minimisation par rapport à l'une des courbes nous donnerait le chemin à suivre. C'est une telle énergie que nous essaierons d'étudier dans la prochaine partie. Pour l'instant, examinons les rapports entre le produit scalaire Π défini dans l'espace tangent à une courbe A et le gradient d'une énergie $E(A)$ sur l'espace des courbes.

La dérivée d'une énergie par rapport à une courbe peut être définie comme la forme linéaire L qui, à un champ de déformation v de la courbe A associe :

$$Lv = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(E(A+\varepsilon v) - E(A))$$

Dans le cas simple où l'on suppose que L appartient à l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}_1, \mathbb{R})$, et que le produit scalaire Π est de la forme $v \cdot w = \int_A vwf(\sigma)\, d\sigma$, nous pouvons abuser des notations suivantes : on note $\nabla_\Pi E(A)$ le gradient de E en A, l'espace tangent étant muni du produit scalaire Π ; on note $\langle v|\Pi\,|w\rangle = \int_A v(\sigma)w(\sigma)\Pi(\sigma)\, d\sigma$ le produit scalaire de v et w, en confondant allègrement le produit scalaire Π défini sur l'espace tangent, avec l'opérateur linéaire symétrique dans ce même espace en notations matricielles, et la distribution f en notations fonctionnelles. Ceci nous permet d'écrire :

$$Lv = \langle \nabla_\Pi E(A)|\Pi\,|v\rangle$$
$$L = \langle \nabla_\Pi E(A)|\Pi$$
$$\nabla_\Pi E(A) = {}^t(L\,\Pi^{-1})$$

D'où

$$\nabla_\Pi E(A) = \Pi^{-1}\ \ {}^tL$$

Le produit scalaire est donc particulièrement influent sur le gradient, sur sa direction comme sur sa norme, et contribue ainsi à dessiner les chemins lors des descentes de gradient. À ce propos, puisque le gradient dépend du produit scalaire, il pourrait être sensé, voire intéressant, de faire dépendre l'énergie $E(A)$ elle-même du produit scalaire local dans l'espace tangent en A. L'énergie de Hausdorff contient des cascades de termes en $\langle f\rangle_{A,\Psi}$ où :

$$\langle f\rangle_{A,\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Psi \circ f\right)$$

Or il est clair que cette intégrale le long de A selon l'abscisse curviligne est un reflet du choix d'attribuer une importance « uniforme » aux points de A. Mais l'on pourrait très bien préférer de favoriser par exemple les points où la courbure est plus forte. En choisissant une mesure arbitraire μ sur la courbe A, on aurait :

$$\langle f\rangle_{A,\Psi,\mu} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_A d\mu}\int_A \Psi \circ f\ d\mu\right)$$

ou encore, si μ est absolument continue vis-à-vis de la mesure habituelle, en posant $q = \frac{d\mu}{d\sigma}$:

$$\langle f\rangle_{A,\Psi,q} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{\int_A q}\int_A q\Psi \circ f\right)$$

et l'idée de prendre $q = \Pi$ devient alors naturelle. En pratique, pour éviter des calculs trop fastidieux lors de l'expression du gradient, on a choisi $\Pi = q = 1$ (ou $\frac{1}{|A|}$, ce qui revient au même). Il n'est pas improbable que le choix pour Π d'une fonction de la courbure κ engendre des résulats qualitativement différents.

Avant de nous lancer dans l'exploration d'une énergie particulière, examinons ce que l'on peut faire lorsque l'on dispose de deux énergies E_1 et E_2, et que l'on veut en créer une troisième qui tienne compte des deux précédentes. On peut tester pour l'occasion la version discrète de notre bon vieux crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Psi$.

$$\langle E_1, E_2\rangle_\Psi = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi\circ E_1 + \frac{1}{2}\Psi\circ E_2\right)$$

dont la dérivée est :

$$\nabla\left(\langle E_1, E_2\rangle_\Psi\right) = \frac{1}{2\Psi'(\langle E_1, E_2\rangle_\Psi)}\left(\Psi'\circ E_1\,\nabla E_1 + \Psi'\circ E_2\,\nabla E_2\right)$$

En posant $\Phi = \Psi'\circ\Psi^{-1}$, $a = \Psi\circ E$ et $b = \Psi\circ E_2$, on obtient :

$$\nabla\left(\langle E_1, E_2\rangle_\Psi\right) = \frac{\frac{1}{2}\Phi(a)\nabla E_1 + \frac{1}{2}\Phi(b)\nabla E_2}{\Phi(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)}$$

Il apparaît alors opportun de faire en sorte que l'on obtienne une moyenne pondérée des deux gradients, et donc de choisir Φ linéaire. $\Phi(x) = \lambda x$ se traduit par $\Psi'\circ\Psi^{-1}(x) = \lambda x$, donc par $\Psi'(x) = \lambda\Psi(x)$, c'est-à-dire $\Psi(x) = Ce^{\lambda x}$. Ce cas particulier de Ψ méritera donc une attention particulière.

3.2 Problèmes dûs à l'énergie de Hausdorff

Dans toute la suite, nous supposerons les problèmes de la partie précédente résolus, c'est-à-dire qu'on dispose déjà d'une distance entre les courbes (par exemple le distance de Hausdorff), et d'un produit scalaire (noté Π) dans l'espace tangent de chaque courbe, ce qui permet des considérations topologiques et différentielles.

Nous souhaitions, en construisant l'énergie de Hausdorff E_H, définir une distance dans l'espace des courbes planes, qui soit dérivable, de façon à pouvoir transformer de façon subjectivement esthétique toute courbe en une autre. Cette partie met en évidence d'importants défauts de E_H tels qu'à première vue, E_H ne possède aucune propriété intéressante. Bien entendu, des éléments de solutions sont proposés ensuite, dans une autre partie.
Commençons par établir une relation entre les variations d'énergies et les intégrales le long des chemins. Nous utiliserons la propriété suivante : soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{X},\mathbb{R})$, soit A une courbe, et Γ un chemin dans l'espace des courbes, vérifiant $\Gamma(0) = A$. Supposons de plus qu'il existe $t_f \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit $\mathcal{C}^1$ de dérivée ne s'annulant pas sur un ouvert contenant $\Gamma([0;t_f])$ et que :

$$\forall t \in [0;t_f], \Gamma'(t) = \nabla_{\Pi(\Gamma(t))} f(\Gamma(t))$$

Alors, en remarquant que :

$$\begin{aligned}\partial_t f(\Gamma(t)) &= f'(\Gamma(t))\cdot\Gamma'(t)\\ &= \langle \nabla_\Pi f(\Gamma(t))\,|\Pi\,|\,\Gamma'(t)\,\rangle\\ &= \|\Gamma'(t)\|_\Pi^2\end{aligned}$$

on obtient par intégration :

$$f(\Gamma(t_f)) - f(A) = \int_{[0;t_f]} \|\Gamma'(t)\|_\Pi^2 dt$$

Une variante de cette propriété nous est donnée en considérant au lieu de Γ, le chemin γ donné par $\gamma'(t) = \frac{\nabla_\Pi f(\gamma(t))}{\|\nabla_\Pi f(\gamma(t))\|}$. On a alors :

$$f(\gamma(t'_f)) - f(A) = \int_{[0;t'_f]} \|\gamma'(t)\|_\Pi dt$$

Considérons maintenant le cas qui nous intéresse actuellement, à savoir, une courbe B étant donnée, $f(C) = E_H(B, C)$. Nous souhaitions ainsi réaliser une descente de gradient sur $E_H(B, \cdot)$ en partant de $C = A$, créant ainsi un chemin reliant A à B. Nous espérions également naturellement que l'intégrale le long du chemin de la norme du gradient nous donne la valeur $-E_H(A, B)$, puisque valant $E_H(\Gamma(t_f), B) - E_H(A, B)$. Malheureusement, a priori, rien ne nous indique qu'une telle descente de gradient se termine effectivement en B ; de plus, nous n'avons pas vérifié $\forall C \in \mathcal{X}, E_H(C, C) = 0$; et pire encore, nous n'avons pas vérifié non plus que le minimum selon C de $E_H(B, C)$ soit atteint en $C = B$. Et, de fait, en regardant l'expression de E_H, on remarque que cette énergie est toujours strictement positive, même sur les couples de courbes identiques. Que peut-on espérer comme propriété sur l'énergie E_H en connaissant d'elle seulement qu'elle est symétrique, positive et dérivable ?

Étudions les minima locaux de l'énergie. Supposons que l'on cherche à minimiser $E_H(A, X)$ par une méthode gradient, en partant de $X = A$, ce qui nous conduira sur une courbe plus proche de A que A elle-même (au sens de E_H). La direction à suivre nous est donnée par la dérivée de $-E_H(A, A)$ par rapport à la première variable (la dérivée par rapport à la seconde fournissant le même résultat, puisque E_H est symétrique) : $-\nabla_{\Pi,1} E_H(A, A)$. Maintenant, au lieu de chercher à minimiser $E_H(A, X)$ en partant de $X = A$, cherchons plutôt à minimiser $E_H(X, X)$, en partant de $X = A$, c'est-à-dire que l'on recherche les courbes les plus proches d'elles-mêmes. La direction à suivre nous est cette fois-ci donnée par :

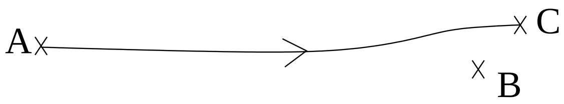
$$-\partial_A E_H(A, A) = -\nabla_{\Pi,1} E_H(A, A) - \nabla_{\Pi,2} E_H(A, A) = -2\nabla_{\Pi,1} E_H(A, A)$$

La direction à suivre est la même que précédemment ! Ce qui signifie en particulier que A est un extremum local de $E_H(A, X)$ si et seulement si c'est un extremum local de $E_H(X, X)$. Par ailleurs, cela implique également que si A n'est pas un minimum local de $E_H(X, X)$, alors il existe une courbe C telle que :

$$E_H(A, C) < E_H(A, A) \quad \textbf{et} \quad E_H(C, C) < E_H(A, A)$$

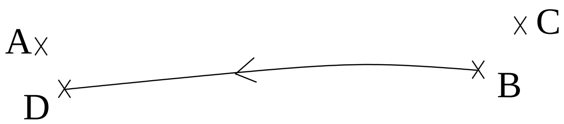
Une courbe qui n'est pas un miminum local pour $E_H(X, X)$ est donc réellement instable lors des descentes de gradient. Par ailleurs, une courbe C minimum local pour $E_H(A, X)$ n'est pas nécessairement un minimum local pour $E_H(C, X)$, ou $E_H(X, X)$, ce qui est équivalent. Par conséquent, une poursuite consistant à effectuer, à chaque étape, une descente de gradient sur $E_H(A_n, X)$ et à prendre pour A_{n+1} le minimum local de $E_H(A_n, X)$ ainsi obtenu, n'est sûre ni de se terminer en un nombre fini d'étapes, ni de minimiser quoi que ce soit, finalement. D'un point de vue plus optimiste : les descentes de gradient de type $E_H(X, B)$, partant de $X = A$ quelconque, n'arrivent certes pas en B si B n'est pas un minimum local de $E_H(X, X)$, mais ce n'est pas gênant, puisque dans ce cas on aboutit à une courbe qui est plus proche encore de B que B ne l'est d'elle-même ! Autrement dit, la descente de gradient sur $E_H(B, X)$ partant de $X = B$ permet de trouver une courbe qui est plus B que B... au sens de E_H, qui n'est pas forcément le sens commun.

FIG. 7: Descente de gradient schématique sur $E_H(X, B)$, partant de A



D'autre part, la descente de gradient sur $E_H(X, B)$ partant de A n'aboutissant pas nécessairement en B, si celui-ci n'est pas un minimum local de $E_H(X, X)$, il est vain d'espérer que le chemin du retour de B vers A en minimisant $E_H(A, X)$ partant de $X = B$ soit le même qu'à l'aller. Et même au cas où B est un minimum local, c'est-à-dire que les coubes C et B de la figure ci-dessus sont confondus, il n'est pas dit que le chemin soit le même, et le cas échéant, celui-ci ne s'arrête pas nécessairement en A. Bien entendu, les longueurs des deux chemins peuvent donc différer. Dans le même style d'idée, si l'on marque une courbe-étape particulière P lors de l'aller de A vers B, et que l'on cherche par la suite à aller de A vers P, il est fort possible que l'on n'emprunte pas le même chemin, et ceci devient même a priori probable s'il s'avère que P n'est pas un minimum local de $E_H(X, X)$. Néanmoins, on pourrait rêver que les descentes de gradient de ce type empruntent naturellement des chemins constitués de minima locaux.

FIG. 8: Retour par minimisation de $E_H(A, X)$, partant de B



3.3 Éléments de solution

L'énergie E_H n'en est pas moins intéressante, car elle possède des propriétés particulières qui en font un bon indicateur dérivable de la distance de Hausdorff. E_H est en effet partout dérivable, le calcul de son gradient est exposé en annexe.

Afin d'avoir un aperçu du comportement de E_H, essayons de l'encadrer de façon sommaire. E_H étant de la forme :

$$\left\langle \left\langle \langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{A,\Phi} \right\rangle_{B,\psi}, \left\langle \langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{B,\Phi} \right\rangle_{A,\psi} \right\rangle_{\Psi}$$

commençons par encadrer $\langle f\rangle_{A,\Psi}$ par des valeurs caractéristiques de f et de Ψ, où f est une fonction à valeurs réelles positives définie (au moins) sur la courbe A. Soit $f_{\max}$ et $f_{\min}$ les valeurs extrémales de f sur A. L'expression :

$$\langle f\rangle_{A,\Psi} = \Psi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Psi \circ f\right)$$

nous donne instantanément, si Ψ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$:

$$\langle f\rangle_{A,\Psi} \leqslant \Psi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_A \Psi \circ f_{\max}\right) \leqslant f_{\max}$$

et, de la même façon :

$$\langle f\rangle_{A,\Psi} \geqslant f_{\min}$$

ce qui est la moindre des choses, puisque le crochet $\langle f\rangle_{A,\Psi}$ est censé nous donner une moyenne volontairement biaisée de f sur A. Si maintenant $f \geqslant f_{\text{moy}}$ sur une fraction F de la courbe A, de mesure $|F|$ $(\leqslant |A|)$:

$$\begin{aligned}
\langle f\rangle_{A,\Psi} &= \Psi^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\int_F \Psi \circ f + \frac{1}{|A|}\int_{A\setminus F} \Psi \circ f\right) \\
&\geqslant \Psi^{-1}\left(\frac{|F|}{|A|}\Psi \circ f_{\text{moy}} + \frac{|A|-|F|}{|A|}\Psi \circ f_{\min}\right) \\
&\geqslant \Psi^{-1}\left(\frac{|F|}{|A|}\Psi \circ f_{\text{moy}}\right)
\end{aligned}$$

Selon le choix de Ψ, ceci peut se traduire de façons différentes. Notons $\mathcal{P}_r(\Delta,\alpha)$ la propriété relative :

$$\mathcal{P}_r(\Delta,\alpha): \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Delta\Psi(x) \geqslant \Psi(\alpha x)$$

ainsi que $\mathcal{P}_a(\Delta,\alpha)$ la propriété absolue correspondante, qui suppose une extension de Ψ dans $\mathbb{R}^-$:

$$\mathcal{P}_a(\Delta,\alpha): \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Delta\Psi(x) \geqslant \Psi(x-\alpha)$$

La propriété relative $\mathcal{P}_r$ a couramment lieu si Ψ est par exemple de la forme $\Psi(x) = x^\beta$. Les meilleurs couples (Δ,α) vérifiant $\mathcal{P}_r$ vérifient alors $\Delta = \alpha^\beta$. Nous dirons que Ψ est de type relatif si :

$$\forall \Delta \in]0;1[,\ \exists \alpha \in]0;1[, \mathcal{P}_r(\Delta,\alpha)$$

et, réciproquement,

$$\forall \alpha \in]0;1[,\ \exists \Delta \in]0;1[, \mathcal{P}_r(\Delta,\alpha)$$

Quant à la propriété absolue $\mathcal{P}_a$, elle apparaît par exemple pour $\Psi(x) = e^{\beta x}$, les meilleurs couples vérifiant cette fois-ci $\Delta = e^{-\beta\alpha}$. De même que précédemment, nous qualifierons Ψ de type absolu si

$$\forall \Delta \in]0;1[,\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \mathcal{P}_a(\Delta, \alpha)$$

et réciproquement.

Supposons que Ψ soit de type relatif, et remarquons que $\mathcal{P}_r(\Delta, \alpha)$ s'écrit également :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Psi^{-1}\left(\Delta\Psi(x)\right) \geqslant \alpha x$$

et que si l'on considère le cas particulier $\Delta = \frac{|F|}{|A|}$ et $x = f_{\text{moy}}$, on obtient, pour le $\alpha(\Delta)$ maximal choisi, la minoration :

$$\langle f \rangle_{A,\Psi} \geqslant \Psi^{-1}\left(\Delta\Psi(f_{\text{moy}})\right) \geqslant \alpha f_{\text{moy}}$$

Autrement dit, pour toute proportion Δ choisie arbitrairement, il existe un α correspondant tel que si $|\{f \geqslant f_{\text{moy}}\}| \geqslant \Delta|A|$, alors $\langle f \rangle_{A,\Psi} \geqslant \alpha f_{\text{moy}}$. Et réciproquement, pour une valeur donnée de α, il existe un Δ tel qu'il suffise que $|\{f \geqslant f_{\text{moy}}\}| \geqslant \Delta|A|$ pour avoir $\langle f \rangle_{A,\Psi} \geqslant \alpha f_{\text{moy}}$.

Pour un choix particulier de (Δ, α), le crochet $\langle f \rangle_{A,\Psi}$ agit comme un filtre qui ne relève comme sensées que les valeurs de f le long de A qui sont atteintes ou dépassées sur un secteur F de A de mesure relative $\frac{|F|}{|A|} \geqslant \Delta$, ce qui veut dire que l'on néglige les « détails d'importance relative $\leqslant \Delta$ », et la précision du filtre est relative, puisqu'elle résulte du placement de α ($\leqslant 1$) en facteur de f_{moy}.
En fait, la famille de Ψ de type relatif proposée précédemment permet de choisir une précision arbitraire, c'est-à-dire de choisir à la fois Δ aussi proche de 0, et α aussi proche de 1, qu'on le souhaite, puisque les meilleurs couples correspondant à $\Psi(x) = x^\beta$ vérifient $\Delta = \alpha^\beta$: il suffit de prendre β aussi élevé que nécessaire.

On a des propriétés analogues si Ψ est de type absolu. En effet, $\mathcal{P}_a(\Delta, \alpha)$ s'écrit également :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Psi^{-1}\left(\Delta\Psi(x)\right) \geqslant x - \alpha$$

et pour un couple (Δ, α) vérifiant $\mathcal{P}_a$, on a alors le filtre à présision absolue α :

$$\forall f_{\text{moy}} \in \mathbb{R}^+, \qquad |\{f \geqslant f_{\text{moy}}\}| \geqslant \Delta|A| \quad \Longrightarrow \quad \langle f \rangle_{A,\Psi} \geqslant f_{\text{moy}} - \alpha$$

De même, la famille de Ψ de type absolu proposée précédemment permet de choisir une précision absolue arbitraire, en l'occurence de choisir à la fois Δ et α aussi proches de 0 qu'on le souhaite, les meilleurs couples correspondant à $\Psi(x) = e^{\beta x}$ vérifiant $\Delta = e^{-\alpha\beta}$. C'est une façon de remarquer que le crochet $\langle f \rangle_{A,\Psi}$ peut être aussi proche de $\max_A f$ qu'on le souhaite, et qu'il peut « tendre vers $\max_A$ » d'au moins deux façons différentes (précision relative ou absolue).

Nous avons fort heureusement des propriétés similaires pour les crochets renvoyant des moyennes biaisées à la baisse, c'est-à-dire pour les crochets $\langle f \rangle_{A,\Phi}$ où Φ est décroissante. Le premier encadrement, trivial, est, avec les notations précédentes :

$$f_{\min} \leqslant \langle f \rangle_{A,\Phi} \leqslant f_{\max}$$

Ensuite, en procédant de la même façon, on obtient, si $|\{f \leqslant f_{\text{moy}}\}| \geqslant \Delta|A|$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|A|}\int_A \Phi \circ f &\geqslant \Delta\Phi(f_{\text{moy}}) \\
\langle f\rangle_{A,\Phi} &\leqslant \Phi^{-1}\left(\Delta\Phi(f_{\text{moy}})\right) \\
\langle f\rangle_{A,\Phi} &\leqslant \alpha f_{\text{moy}}
\end{aligned}$$

si le couple (Δ, α) vérifie la propriété $\mathcal{P}_r$ pour Φ. La famille de type relatif qui nous intéresse est donc cette fois-ci la famille des $\Phi(x) = x^{-\beta}$, avec $\beta > 0$; la précision augmente quand α tend vers 1^+ et Δ vers 0^+, et ceci est faisable en prenant de grandes valeurs de β, comme précédemment, et $\Delta = \alpha^{-\beta}$.
Enfin, si le couple (Δ, α) vérifie $\mathcal{P}_a$ au lieu de $\mathcal{P}_r$, on aura la relation absolue :

$$\langle f\rangle_{A,\Phi} \leqslant f_{\text{moy}} + \alpha$$

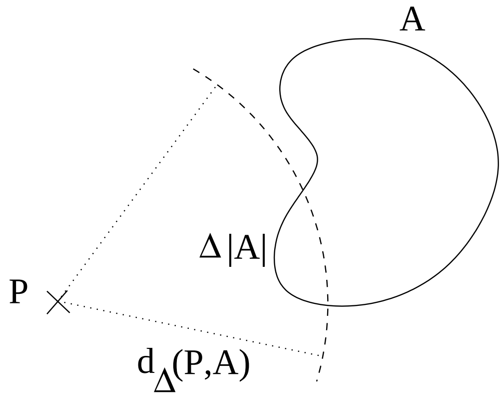
et la famille d'exemples correspondante est celle des $\Phi(x) = e^{-\beta x}$.

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires à l'encadrement de E_H. Soit A une courbe de $\mathcal{X}$. Notons, pour un point P du plan donné :

$$d_\Delta(P, A) = \inf\left\{x \in \mathbb{R}^+ ; |\{Q \in A ; d(P,Q) \leqslant x\}| \geqslant \Delta|A|\right\}$$

Fig. 9: Illustration géométrique de $d_\Delta(P, A)$

La « proportion » des points de A de distance à P inférieure à $d_\Delta(P, A)$ est Δ.



Notons également, pour une courbe B de $\mathcal{X}$, la fonction a priori non symétrique suivante :

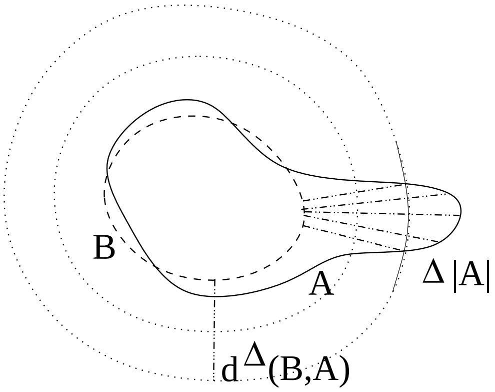
$$d^\Delta(B, A) = \sup\left\{x \in \mathbb{R}^+ ; |\{Q \in A ; d(Q,B) \geqslant x\}| \geqslant \Delta|A|\right\}$$

Enfin, si Φ et Ψ sont toutes deux de type relatif, et si nous appelons Δ_Φ et α_Φ les éléments d'un couple (Δ, α) associé au crochet $\langle\cdot\rangle_{A,\Phi}$, ainsi que $(\Delta_\Psi, \alpha_\Psi)$ un couple associé au crochet $\langle\cdot\rangle_{A,\Psi}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}^2, \quad d(P, A) \leqslant \langle d(P, \cdot)\rangle_{A,\Phi} \leqslant \alpha_\Phi d_{\Delta_\Phi}(P, A)$$

FIG. 10: Illustration géométrique de $d^{\Delta}(B, A)$

La « proportion » des points de A de distance à B inférieure à $d^{\Delta}(B, A)$ est Δ.



d'où

$$\alpha_\Psi \ d^{\Delta_\Psi}(A, B) \ \leqslant \ \Big\langle \langle d(\cdot, \cdot) \rangle_{A,\Phi} \Big\rangle_{B,\Psi} \ \leqslant \ \alpha_\Phi \ \sup_{P \in B} d_{\Delta_\Phi}(P, A)$$

L'énergie de Hausdorff E_H étant un crochet discret $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ d'expressions du type précédent, avec ψ croissante et $\mathcal{C}^1$, si l'on note α_ψ un α associé à $\Delta = \frac{1}{2}$ par $\mathcal{P}_r$ pour ψ, on a, pour tout a et b positifs :

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(\max(a, b))\right) \leqslant \langle a, b \rangle_\psi \leqslant \max(a, b)$$

$$\alpha_\psi \max(a, b) \leqslant \langle a, b \rangle_\psi \leqslant \max(a, b)$$

d'où l'encadrement de l'énergie de Hausdorff :

$$\alpha_\psi \alpha_\Psi \max\left(d^{\Delta_\Psi}(A, B), d^{\Delta_\Psi}(B, A)\right) \leqslant E_H(A, B) \leqslant \alpha_\Phi \max\left(\sup_{P \in B} d_{\Delta_\Phi}(P, A), \sup_{P \in A} d_{\Delta_\Phi}(P, B)\right)$$

De même, avec les mêmes notations, si Φ, Ψ et ψ étaient de type absolu, on aurait :

$$\max\left(d^{\Delta_\Psi}(A, B), d^{\Delta_\Psi}(B, A)\right) - \alpha_\Psi - \alpha_\psi \leqslant E_H(A, B) \leqslant \alpha_\Phi + \max\left(\sup_{P \in B} d_{\Delta_\Phi}(P, A), \sup_{P \in A} d_{\Delta_\Phi}(P, B)\right)$$

Ce résultat peut s'aborder qualitativement ou numériquement. Il se trouve que l'on peut encadrer à leur tour le minorant et le majorant à l'aide de la distance de Hausdorff $d_H(A, B)$. On a en effet les inégalités, pour tout point P, courbes A et B de $\mathcal{X}$:

$$d(P, A) \leqslant d_\Delta(P, A) \leqslant d(P, A) + \frac{\Delta}{2}|A|$$

$$d_H(A, B) - \Delta\frac{|A| + |B|}{2} \leqslant d^{\Delta}(B, A) \leqslant d_H(A, B) + \Delta\frac{|A| + |B|}{2}$$

La minoration de $d_\Delta(P, A)$ est triviale, et sa majoration peut se montre par l'absurde de la façon suivante : supposons qu'il existe un point P et une courbe A qui ne la vérifient pas. On a donc :

$$d_\Delta(P, A) > d(P, A) + \frac{\Delta}{2}|A|$$

A étant un compact, il existe un point Q de A tel que $d(P,Q) = d(P,A)$. Considérons maintenant A comme élément de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire comme une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|A'\| = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} = \frac{|A|}{2\pi}$. Soit $q = e^{i\theta_Q} \in \mathbb{S}_1$ tel que $A(q) = Q$, et considérons l'image par A de $I = \{e^{i\theta}; |\theta - \theta_Q| \leqslant \pi\Delta\}$. Par construction,

$$|A(I)| = |I|\frac{|A|}{2\pi} = \Delta|A|$$

et, pour tout point R de $A(I)$,

$$PR \leqslant PQ + QR \leqslant d(P,A) + |\theta_R - \theta_Q|\frac{|A|}{2\pi} \leqslant d(P,A) + \frac{1}{2}\Delta|A|$$

On a trouvé un sous-ensemble mesurable du graphe de A de mesure supérieure à $\Delta|A|$ et qui vérifie que chacun de ses points est à une distance de P inférieure à $d(P,A) + \frac{1}{2}\Delta|A|$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

La démonstration de la seconde inégalité se fait d'une façon similaire, en considérant des sous-ensembles des courbes A et B centrés en des points P de A et Q de B qui vérifient $d(A,B) = d(P,Q)$, ce qui est possible puisque A et B sont des compacts.

Il est à noter que ces dernières inégalités ont une imprécision d'ordre absolu et non pas relatif. Dans le cas où Φ, Ψ et Ψ sont de type absolu, nous avons donc maintenant l'encadrement de $E_H(A,B)$:

$$d_H(A,B) - \left(\alpha_\Psi + \alpha_\psi + \Delta_\Phi \frac{|A| + |B|}{2}\right) \leqslant E_H(A,B) \leqslant d_H(A,B) + \left(\alpha_\Phi + \Delta_\Psi \frac{|A| + |B|}{2}\right)$$

On a donc une marge a priori de l'erreur commise quand l'on calcule $E_H(A,B)$ dans l'intention de connaître $d_H(A,B)$. Par ailleurs, on a vu que l'on pouvait choisir Ψ, Φ et ψ de façon à réduire arbitrairement cette marge, et l'on a même trouvé des exemples explicites de telles fonctions. L'énergie E_H est donc une approximation de d_H toujours dérivable, arbitrairement précise.

L'un des problèmes soulevés dans la partie précédente était que $E_H(A,A)$ est non nul, et ceci quelle que soit la courbe A. L'encadrement précédent peut s'appliquer au cas particulier $A = B$, et nous fournit :

$$0 \leqslant E_H(A,A) \leqslant \alpha_\Phi + \Delta_\Psi|A|$$

L'équivalent dans le cas où Φ est de type relatif est :

$$0 \leqslant E_H(A,A) \leqslant \alpha_\Phi\Delta_\Psi|A|$$

L'image suggérée par tous ces encadrements est que E_H ressemble à la distance de Hausdorff à laquelle on aurait ajouté un bruit d'amplitude variant de façon affine avec la longueur des courbes considérées, les deux paramètres dirigeant l'amplitude étant entièrement réglables dans les plages strictement positives. Comme nous avons un encadrement absolu, nous devinons que deux courbes A et B suffisamment éloignées pour la distance de Hausdorff le seront également pour l'énergie, et que donc on n'aura pas $E_H(A,B) \leqslant E_H(A,A)$. Présentons plus la situation d'une façon plus parlante. Soient A et B deux courbes, telles que $E_H(A,B) \leqslant E_H(A,A)$. Les encadrements nous donnent alors :

$$d_H(A,B) - \left(\alpha_\Psi + \alpha_\psi + \Delta_\Phi \frac{|A|+|B|}{2}\right) \leqslant \alpha_\Phi + \Delta_\Psi |A|$$

d'où

$$d_H(A,B) \leqslant \alpha_\Phi + \alpha_\Psi + \alpha_\psi + \Delta_\Phi \frac{|A|+|B|}{2} + \Delta_\Psi |A|$$

Dans le cas où on a choisi pour simplifier $\Delta_\Psi = \Delta_\Psi = \Delta$, et $\alpha_\Phi = \alpha_\Psi = \alpha_\psi = \alpha$, on peut écrire :

$$d_H(A,B) \leqslant 3\alpha + \left(\frac{3}{2}|A| + \frac{1}{2}|B|\right)\Delta$$

La présence de $|B|$ dans le membre de droite est inoffensive si on ne s'intéresse qu'aux courbes de longueur raisonnable. Mais si l'on préfère l'éliminer sans imposer de contraintes sur B ou trouver des inégalités plus précises sur E_H, il reste la possibilité de changer d'énergie en ajoutant un terme sur la longueur des courbes. Si l'on pose par exemple $E_M(A,B) = E_H(A,B) + E_L(A,B)$ où $E_L(A,B) = |(\,|A| - |B|\,)|$, les calculs précédents deviennent :

$$E_M(A,B) \leqslant E_M(A,A) \quad \Longrightarrow \quad d_H(A,B) + E_L(A,B) \leqslant 3\alpha + \left(\frac{3}{2}|A| + \frac{1}{2}|B|\right)\Delta$$

Si $|B| \leqslant |A|$, cela nous donne :

$$d_H(A,B) \leqslant 3\alpha + 2|A|\Delta$$

et dans l'autre cas :

$$d_H(A,B) \leqslant 3\alpha + \frac{5}{2}|A|\Delta$$

On a donc :

$$E_M(A,B) \leqslant E_M(A,A) \quad \Longrightarrow \quad d_H(A,B) \leqslant 3\alpha + \frac{5}{2}|A|\Delta$$

Si une courbe B est plus proche de A que A ne l'est elle-même (au sens de E_M), alors B est nécéssairement proche de A au sens de la distance de Hausdorff. Réciproquement, si B n'est pas dans la boule de centre A et de rayon $3\alpha + \frac{5}{2}|A|\Delta$, alors $E_M(A,B) > E_M(A,A)$. Les phénomènes étranges ne peuvent donc se dérouler que très localement.

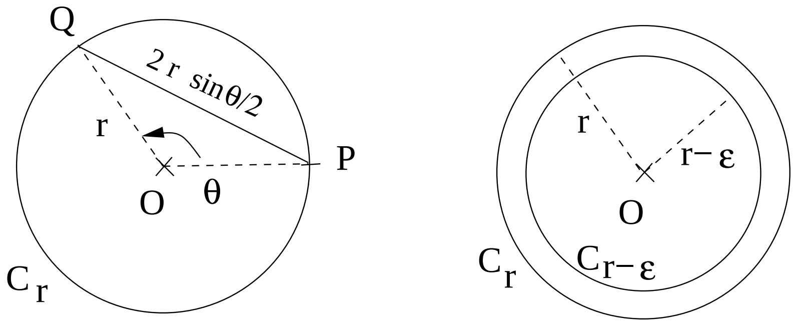
Mais, ces « phénomènes étranges » ont-ils effectivement lieu ? Jusqu'ici, rien n'a impliqué qu'ils se produisent dans le cas précis de E_H. Par exemple, la question de savoir si E_H vérifie ou pas la propriété des distances

$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{X}^3, \;\; E_H(A,C) \leqslant E_H(A,B) + E_H(B,C)$$

reste entière, bien que nous sachions déjà que cette relation est vérifiée à un petit terme additif près (d'après les encadrements de E_H par d_H). Afin d'établir un peu d'étrangeté certaine, nous allons construire un exemple explicite de couple de courbes (A, B) vérifiant $E_H(A, B) < E_H(A, A)$. Soit O un point donné du plan. Considérons la famille de courbes $(C_r)_{r>0}$, où C_r est le cercle de centre O et de rayon r. Notons $T(r) = E_H(C_r, C_r)$, et, pour $P \in \mathbb{R}^2$, $D(r)(P) = \langle d(P, \cdot)\rangle_{C_r,\Phi}$. Remarquons d'une part que $T(r) = 2\,\langle D(r)(\cdot)\rangle_{C_r,\Psi}$, et d'autre part que, pour des raisons de symétrie du problème (invariance par rotation), $D(r)$ est constant sur C_r, ce qui nous invite à confondre la fonction $D(r)$ avec sa valeur en un point de C_r. Nous avons donc $T(r) = 2D(r)$. Explicitons donc $D(r)$:

$$D(r) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Phi\left(2r|\sin\frac{\theta}{2}|\right) r d\theta\right)$$

FIG. 11: Problème des cercles emboîtés



$$D(r) = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\Phi\left(2r|\sin\frac{\theta}{2}|\right) d\theta\right)$$

Or la fonction qui à r associe $2r|\sin\frac{\theta}{2}|$ est strictement croissante avec r (si $\theta \neq 0$), et Φ et Φ^{-1} sont strictement décroissantes. Donc $D(r)$ est une fonction strictement croissante de r. Et donc $T(r) = E_H(C_r, C_r)$ aussi. Comme $\partial_r T(r) > 0$, on a $\nabla E_H(X, X)|_{X=C_r} \neq 0$. C_r n'est donc pas un minimum local de $E_H(X, X)$. On a vu précédemment que cela implique que C_r n'est pas un minimum local de $E_H(C_r, X)$, et que les gradients de ces deux expressions sont positivement corrélés. Donc pour tout $r > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E_H(C_r, C_{r-\varepsilon}) < E_H(C_r, C_r)$. On a donc trouvé un exemple d'étrangeté du comportement de E_H. Il est à noter cependant que l'ajout d'un terme suffisament important portant sur la longueur, comme évoqué précédemment, fera disparaître cet exemple.

4 Exploitation pratique

Nous allons maintenant exploiter les possibilités offertes par de telles énergies, qui sont relativement proches de la distance de Hausdorff, mais dérivables. Nous noterons E l'énergie choisie, en gardant à l'esprit qu'il s'agit de E_H, ou d'une énergie mixte $E(E_H, E_L)$ comportant un terme sur la longueur, ou encore de la norme p ou W_p^1 des fonctions distances associées aux courbes.

4.1 Moyennes de courbes

Si l'on considère deux courbes A et B, on peut déformer continûment A en B, en réalisant une descente de gradient sur $E(X, B)$, avec pour conditions initiales $X = A$. Ceci ne présente pas d'intérêt particulier en soi, sinon que de voir se dessiner un plus court chemin dans l'espace des courbes.

La figure 12 est un exemple de descente de gradient, où l'on tente de déformer une forme initialement convexe (en rouge) pour qu'elle devienne une sorte de main à deux doigts (en vert). Le résultat est esthétiquement très satisfaisant.

Une notion intéressante est celle de courbe « moyenne » de A et B. Une telle courbe M se doit de vérifier $E(A, M) + E(B, M)$ minimal et $E(A, M) = E(B, M)$, la première condition indiquant que M doit se trouver sur un plus court chemin reliant A et B, la seconde condition indiquant que M doit se trouver au milieu de ce chemin. Si l'on cherche à effectuer une descente de gradient en X sur $E(A, X) + E(X, B)$, rien ne nous garantit que l'on se retrouvera finalement à mi-chemin entre A et B. L'astuce consiste à effectuer une descente de gradient sur $E^\alpha(A, X) + E^\alpha(X, B)$ avec $\alpha > 1$ (typiquement $\alpha = 2$), de façon à ce que la courbe finale vérifie, sous réserve que le gradient de $E(Y, Z)$ selon Y ait une norme proche de 1 pour tout couple (Y, Z), les relations :

$$\nabla_X E(A, X) = -\nabla_X E(X, B)$$
$$E(A, X) = E(X, B)$$

qui sont intuitivement suffisantes à la caractérisation d'une forme moyenne.
Ces moyennes entre courbes dépendent évidemment qualitativement de l'énergie E choisie. Pour diverses versions de l'énergie de Hausdorff E_H, nous obtenons les formes moyennes de la figure 13.

On peut également chercher à obtenir la forme moyenne correspondant à un ensemble (fini) de courbes. Soit $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un ensemble de courbes. Nous pourrions définir la courbe moyenne par :

$$M = \underset{X \in \mathcal{X}}{\operatorname{Arginf}} \sum_{i=1}^{n} E^\alpha(X, C_i)$$

mais malheureusement rien ne garantit l'existence et l'unicité d'un tel M, une boule fermée de $\mathcal{X}$ non réduite à une courbe n'étant d'ailleurs pas compacte (pour la distance de Hausdorff), et $\mathcal{X}$ n'étant pas complet. Mais cela ne nous empêche pas

Fig. 12: Descente de gradient en vue de déformer une courbe vers une autre

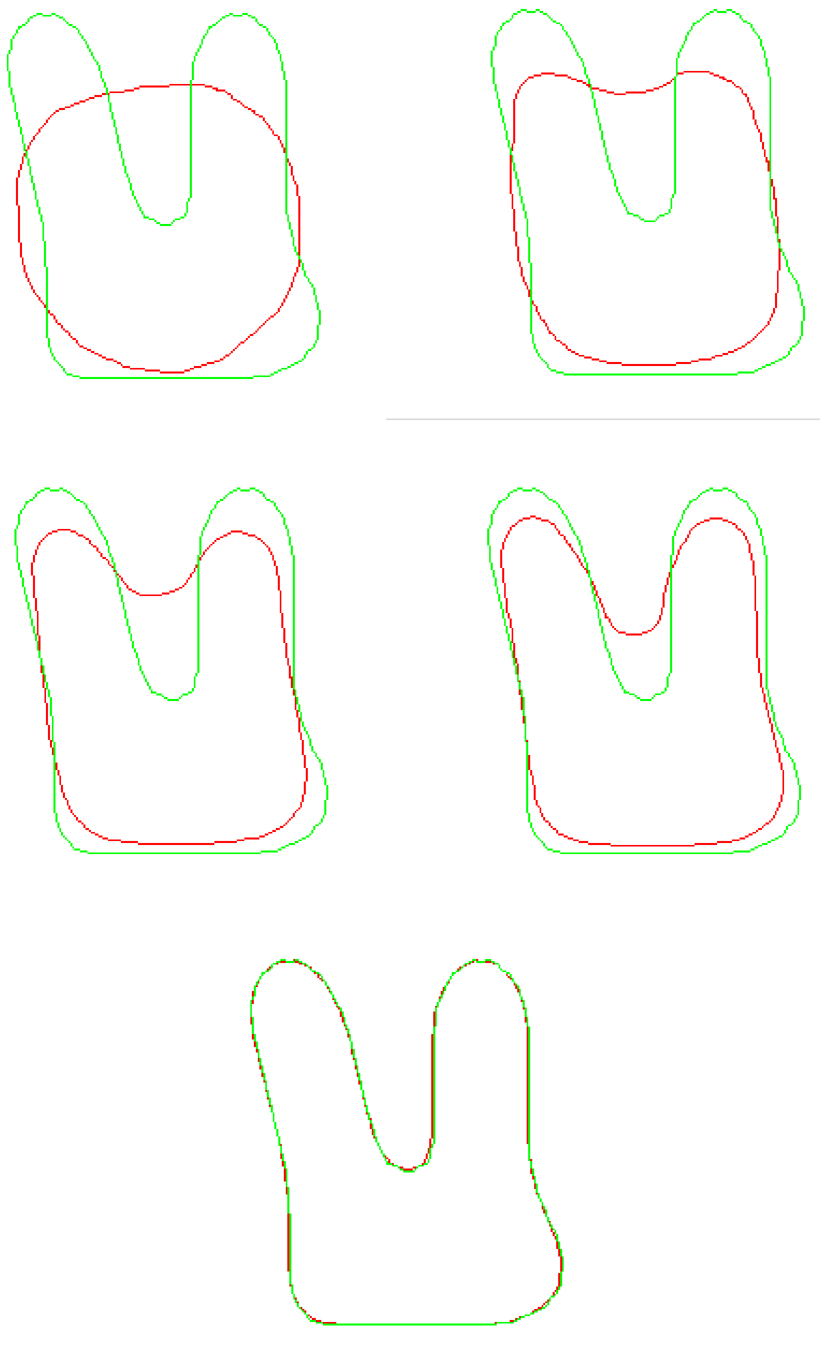
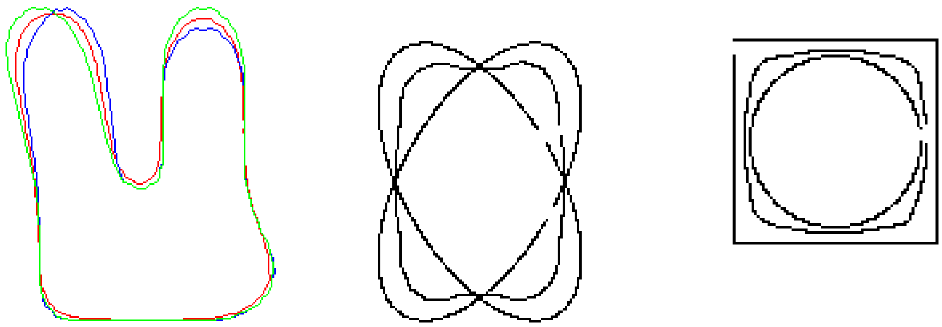
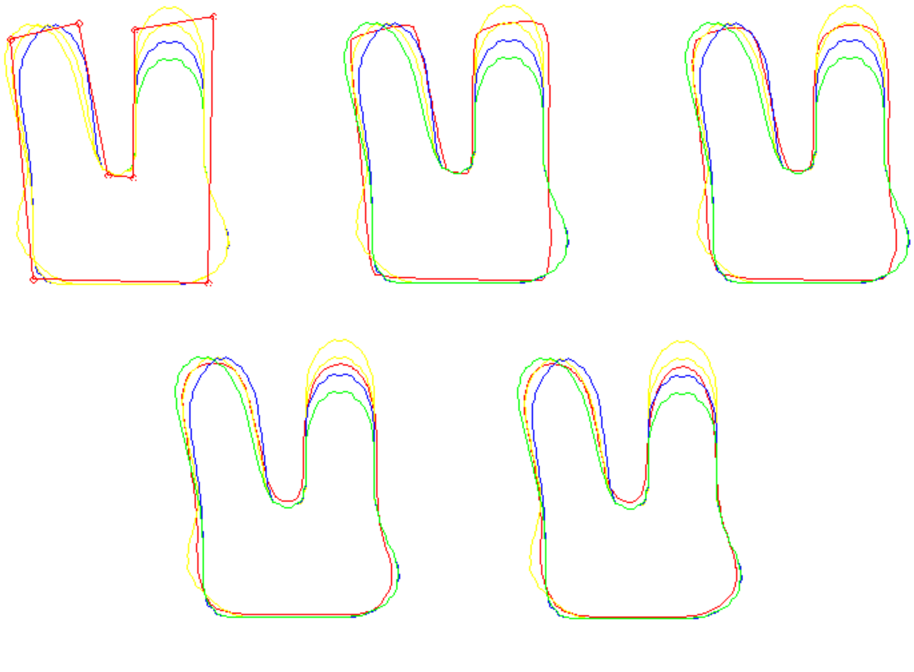


FIG. 13: Exemples de moyennes de deux courbes, entre deux paires de doigts, entre deux ellipes, puis entre un carré et un cercle



de chercher par descente de gradient sur $\sum_{i=1}^{n} E^{\alpha}(X, C_i)$ des courbes M telles que $\sum_{i=1}^{n} E^{\alpha}(M, C_i)$ soit arbitrairement proche de sa borne inférieure. La question d'ordre pratique porterait plutôt sur la présence éventuelle de minima locaux qui fasse que la courbe M obtenue par descente de gradient dépende de façon non négligeable de la courbe initiale depuis laquelle on a amorcé la descente. Expérimentalement, on observe des minima locaux seulement quand l'ensemble des n courbes est vraiment très disparate pour un œil humain ; d'autre part les résultats obtenus sont visuellement satisfaisants.

FIG. 14: Exemple de descente de gradient pour l'obtention de la moyenne (en rouge) de plusieurs courbes, avec initialisation manuelle grossière.



Remarquons au passage que l'effet recherché par la mise à une puissance α de

FIG. 15: Descente de gradient pour l'obtention de la moyenne (en rouge) des mêmes courbes que précédemment, avec initialisation quelconque.

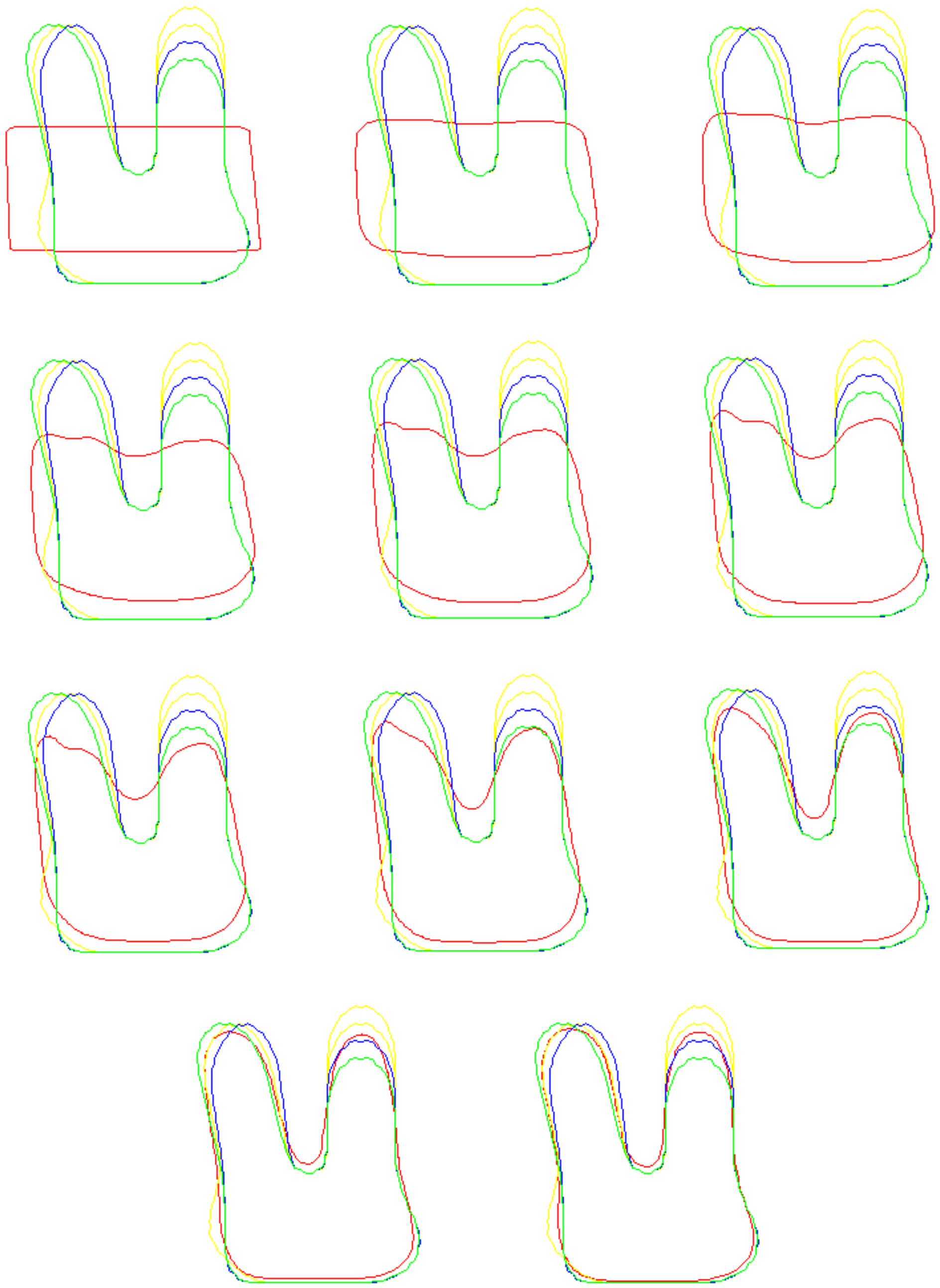
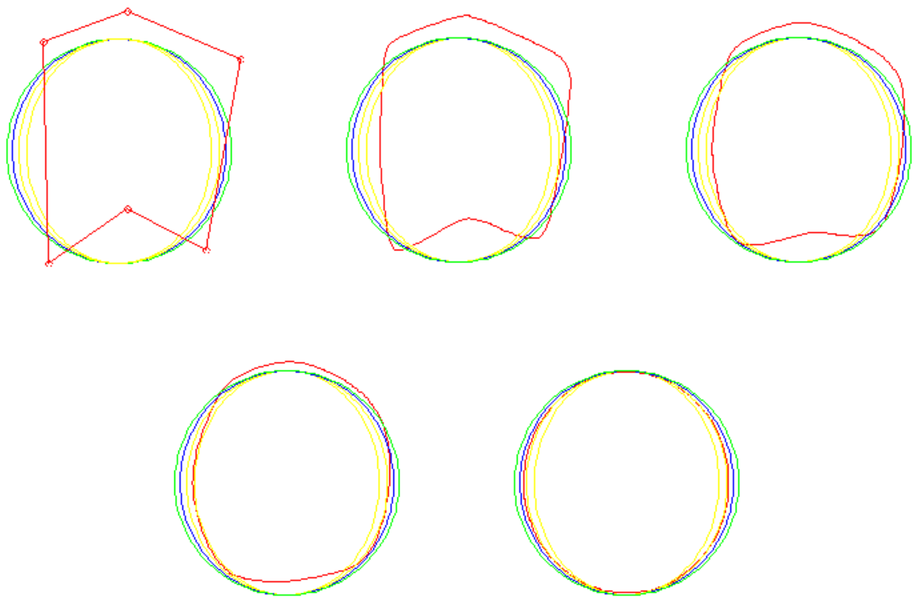


FIG. 16: Autre exemple de descente de gradient pour l'obtention de la moyenne (en rouge) de plusieurs courbes, avec initialisation quelconque.



termes semblables, que l'on somme ensuite, est très similaire à celui créé par les crochets $\langle\cdot\rangle_\Psi$, et d'ailleurs, si l'on étend la notation du crochet au cas discret d'un ensemble fini de termes f_i indexés par $i \in I$:

$$\langle (f_i)_I \rangle_\Psi = \Psi^{-1}\left(\sum_I \frac{1}{|I|}\Psi(f_i)\right)$$

et que l'on considère le cas $\Psi(x) = x^\alpha$, on a exactement :

$$\sum_{i=1}^{n} E^\alpha(X, C_i) = n\Psi\left(\left\langle (E(X, C_i))_{[1;n]} \right\rangle_\Psi\right)$$

ce qui signifie que la minimiser $\sum_{i=1}^{n} E^\alpha(X, C_i)$ revient à minimiser $\left\langle (E(X, C_i))_{[1;n]} \right\rangle_\Psi$. Le choix pour Ψ de n'importe quelle fonction croissante, $\mathcal{C}^1$, et convexe, tient le rôle que l'on attribuait précédemment au choix de $\alpha > 1$.

4.2 Déformations caractéristiques

Maintenant que nous pouvons associer à chaque ensemble de courbes $\mathcal{H} = \{C_i\,;\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ assez homogène une forme moyenne M, nous pouvons étudier, puisque les courbes C_i sont censées présenter quelque ressemblance, les écarts entre la moyenne et chacune des courbes. La donnée de la forme moyenne M et de déformations caractéristiques à lui appliquer semble en effet être une bonne représentation d'un ensemble $\mathcal{H}$ relativement homogène. La déformation élémentaire à appliquer à M pour qu'elle se rapproche d'une courbe C_i sera notée :

$$\delta_i = \nabla_M E(M, C_i)$$

Toutes les déformations élémentaires δ_i appartiennent au même espace, l'espace tangent à la courbe M, qui est muni d'un produit scalaire, ce qui permet d'établir des corrélations entre elles, et d'en tirer des statistiques. La question est donc maintenant de savoir comment s'y prendre exactement pour établir ces corrélations. Remarquons tout d'abord un fait contre-intuitif : la somme sur i de toutes les déformations δ_i est a priori non nul. En effet, la définition de la forme moyenne M n'implique trivialement $\sum_i \delta_i = 0$ que si on a pris $\alpha = 1$ pour construire la moyenne, ou si toutes les distances $E(M, C_i)$ sont égales, ce qui n'a a priori pas de raison d'être vérifié. Il faut donc tenir compte du fait que la déformation moyenne

$$\overline{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

est non nulle. Peut-on donc définir la matrice Δ de corrélation de façon naïve, par :

$$\Delta_{i,j} = \langle \delta_i \,|\delta_j \rangle$$

ou serait-il préférable d'ajouter un terme correctif ? Pour cela, étudions le cas analogue dans un espace vectoriel de dimension finie. On dispose d'un ensemble fini relativement homogène $\mathcal{P}$ de points $(P_i)_I$ dans le plan, et d'un point M représentant un point moyen, mais qui n'est pas exactement le barycentre G de $\mathcal{P}$, défini par :

$$\sum_I \overrightarrow{GP}_i = 0$$

Pour pousser l'analogie, on se restreint à la connaissance des distances $d_i = d(M, P_i) = MP_i$ (qui correspondent aux $E(M, C_i)$), et des directions de minimisation des $d(M, P_i)$: $d'_i = \frac{1}{MP_i}\overrightarrow{MP}_i$, ce qui n'est pas très contraignant vu que $\overrightarrow{MP}_i = d_i d'_i$. On cherche à déterminer par exemple l'axe principal de $\mathcal{P}$ en fonction des distances d_i et des directions $d'i$. Cet axe apparaît naturellement après diagonalisation de la matrice des $\left\langle \overrightarrow{GP}_i \middle| \overrightarrow{GP}_j \right\rangle$. C'est donc cette matrice qui est pertinente.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{GP}_i \middle| \overrightarrow{GP}_j \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MP}_i \middle| \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MP}_j \right\rangle \\
&= \|\overrightarrow{GM}\|^2 + \left\langle \overrightarrow{MP}_i \middle| \overrightarrow{MP}_j \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{GM} \middle| \overrightarrow{MP}_i + \overrightarrow{MP}_j \right\rangle \\
&= \|\overrightarrow{MG}\|^2 + d_i d_j \langle d'_i \,| d'_j \rangle - \left\langle \overrightarrow{MG} \,| d_i d'_i + d_j d'_j \right\rangle
\end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{n} \sum_i d_i d'_i$, l'analogie nous donne :

$$\begin{aligned}
\Delta_{i,j} &= \left\| \frac{1}{n} \sum_i E(M, C_i)\delta_i \right\|^2 + E(M, C_i)E(M, C_j) \langle \delta_i \,|\delta_j \rangle \\
&\quad - \left\langle \frac{1}{n} \sum_i E(M, C_i)\delta_i \middle| E(M, C_i)\delta_i + E(M, C_j)\delta_j \right\rangle
\end{aligned}$$

Les termes sensés sont donc les $E(M, C_i)\delta_i$, et non pas les δ_i seuls, car nous avions oublié que $E(M, C_i)$ ressemblant à une distance, l'opposé de son gradient $-\delta_i$ nous indique la direction à suivre pour aller de M vers C_i, mais ne comporte pas d'information sur la distance à parcourir dans cette direction. Posons, pour simplifier les notations :

$$\delta'_i = E(M, C_i)\delta_i$$

et comme précédemment :

$$\overline{\delta'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta'_i$$

Nous avons donc :

$$\Delta_{i,j} = \left\|\overline{\delta'}\right\|^2 + \left\langle \delta'_i \,\middle|\, \delta'_j \right\rangle - \left\langle \overline{\delta'} \,\middle|\, \delta'_i + \delta'_j \right\rangle$$

Pour obtenir la première déformation caractéristique, nous n'avons plus qu'à diagonaliser Δ. Si l'on note ${}_1v$ le vecteur propre de Δ de plus grande valeur propre associée ${}_1\lambda$, la déformation ${}_1\beta = \sum_i {}_1v_i\delta'_i - \overline{\delta'}$ a pour norme (dans le plan tangent) $\|{}_1\beta\| = \sqrt{{}_1\lambda}$ et est, parmis les combinaisons linéaires $\sum_i \alpha_i(\delta'_i - \overline{\delta'})$ des déformations recentrées telles que $\sum_i \|\alpha_i\| = 1$, celle qui maximise $\sum_i \left\langle \delta'_i - \overline{\delta'} \,\middle|\, \cdot \right\rangle^2$, autrement dit celle qui correspond le mieux à un « axe de déformation principale ». De même, les autres modes de déformation caractéristiques sont directement liés aux autres vecteurs propres de Δ. On obtient ainsi une famille libre de modes de déformation ${}_j\beta$ que l'on peut normaliser, par exemple pour décomposer les exemples de déformation δ'_i. Notons par ailleurs que le cas $\overline{\delta'} = 0$ correspond au cas où l'on a construit M en minimisant la somme des carrés des distances de M à chacune des courbes C_i (méthode des moindres carrés).

4.3 Poursuite d'une déformation

Nous sommes donc maintenenant capables d'extraire d'un ensemble de courbes une forme moyenne M dotée de modes (normalisés) de déformation β'_i, chaque mode étant muni de son « écart type » $\sigma_j = \sqrt{{}_j\lambda}$. Une déformation particulière β de l'espace tangent à M ayant été préalablement choisie, nous souhaiterions maintenant « suivre » cette déformation. Le premier pas de temps paraît simple, puisqu'il s'agit seulement de passer de M à $M' = M + \varepsilon\beta$. Mais comment agir maintenant sur M', β n'ayant pas de sens en M', puisque l'espace tangent en M' est différent de celui de M ? De nombreuses méthodes sont envisageables ; nous allons en détailler trois.

La première méthode consiste à « transporter » β dans l'espace tangent de M'. On peut en effet penser à appliquer l'un des trois modes de transport détaillés dans la partie *Cadre mathématique* de ce rapport, la méthode des *Level-sets* rendant par ailleurs aisée la connaissance des angles entre les normales aux courbes. On peut ainsi, à chaque pas de temps, exporter le champ de déformation propre à l'avant-dernière courbe dans l'espace tangent de la dernière courbe, afin d'en créer une nouvelle en ajoutant à celle-ci un faible multiple du nouveau champ. Le principal problème de cette méthode est que répétée un certain nombre de fois de suite, elle n'est a priori pas particulièrement stable, vu qu'une petite modification du champ de déformation β initial peut engendrer rapidement des changements qualitatifs des courbes. Un moyen simple et relativement efficace d'empêcher la formation importune de telles excroissances est de lisser, à chaque pas de temps, non pas nécessairement la courbe, mais la déformation qu'on lui fait subir. Le lissage d'une déformation est d'ailleurs facile à concevoir et à implémenter, puisque les déformations sont des fonctions de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}$. Les résultats observés sont finalement satisfaisants.

Une autre méthode consiste à maximiser la distance à M. À une étape n de l'évolution, étant arrivé en la courbe M_n, avancer dans le sens du gradient (par rapport à M_n) de $E(M, M_n)$ ou de $E(M_{n-1}, M_n)$ est effectivement un moyen sûr de s'éloigner des courbes précédentes. La fuite se pousuit dans la direction initiale, le champ β, puisque, pour maximiser la distance d'une courbe B à une courbe A, on déplace d'avantage les points de B qui sont déjà le plus éloignés de A, et que, en l'occurence, cela revient à appliquer à B une déformation similaire à celle que l'on a dû appliquer à la courbe précédente pour obtenir B. La qualité des résultats observés obtenus avec cette méthode est assez aléatoire.

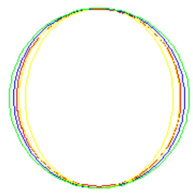
La dernière méthode est radicalement différente. Elle consiste à recalculer intégralement, à chaque étape, le champ de déformation à appliquer en reconsidérant $\mathcal{H}$ dans son ensemble, alors que les méthodes précédentes ne tiennent absolument pas compte du cadre du problème, des courbes dont on a extrait initialement la moyenne M et les modes de déformation. Calculer les déformations que chacune des courbes C_i de $\mathcal{H}$ induit sur la courbe M_n de l'étape n de l'évolution, en déduire de nouveaux modes de déformation, identifiables à ceux calculés pour la courbe M_{n-1}, est en effet possible. Lors du calcul des déformations caractéristiques présenté précédemment, nous n'avons finalement pas utilisé le fait que M est la courbe « moyenne » des courbes de $\mathcal{H}$; nous pouvons donc l'effectuer dans le cas où M est quelconque. Nous retrouvons alors M_n munie de modes de déformation ${}^n_k\beta$, caractérisés par leur « écart type » ${}^n\sigma_k = \|{}^n_k\beta\|$. La décomposition du champ de déformation de M_{n-1} sur les modes de déformation ${}^{n-1}_j\beta$, et l'association des ${}^{n-1}_j\beta$ aux ${}^n_k\beta$, permet de recomposer un nouveau champ dans l'espace tangent à M_n. L'établissement de la correspondance entre les modes de déformation peut sembler ne pas de problème si la correspondance entre les valeurs propres $({}^{n-1}_j\sigma)_j$ et $({}^n_k\sigma)_k$ est claire, ce qui est fréquemment le cas puisqu'en pratique les valeurs propres varient peu en l'espace d'un pas de temps, et les modes de valeurs propres associées trop faibles ne sont pas considérés, car insignifiants. Il reste cependant à traiter le cas où plusieurs modes ont les mêmes valeurs propres, ou des valeurs propres trop proches ; et par ailleurs le procédé de diagonalisation d'où sont issus les modes ne garantit pas que le « sens » de ces derniers ne change pas (un vecteur propre multiplié par -1 reste un vecteur propre de même valeur propre). Afin d'identifier formellement les modes de M_{n-1} à ceux de M_n (ainsi que leur sens), on recourt à la méthode du transport entre M_{n-1} et M_n, et on cherche le couple permutation-sens (σ, ε) qui minimise la somme des distances de $T_{M_{n-1}\to M_n}\left(\varepsilon_k \; {}^{n-1}_{\sigma(k)}\beta\right)$ à ${}^n_k\beta$. Si l'on note ${}^n\delta$ la déformation suivie à l'étape n, on a alors :

$$ {}^n\delta = \sum_k \left\langle \varepsilon_k \frac{{}^{n-1}_{\sigma(k)}\beta}{\|{}^{n-1}_{\sigma(k)}\beta\|} \,\middle|\, {}^{n-1}\delta \right\rangle \frac{{}^n_{\sigma(k)}\beta}{\|{}^n_{\sigma(k)}\beta\|} $$

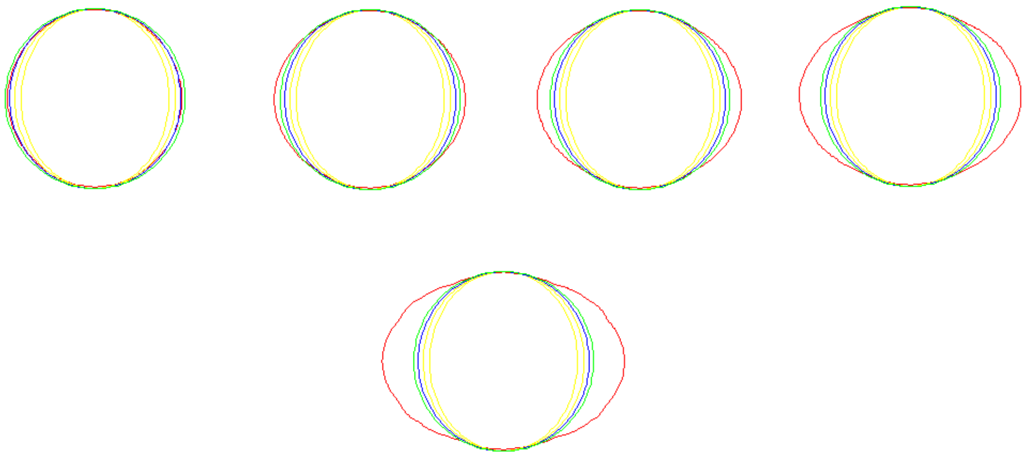
Expérimentalement, les résultats de cette dernière méthode sont corrects tant que l'on ne cherche pas à suivre une déformation au-delà de l'écart type qui lui est associé dans l'ensemble $\mathcal{H}$.

Fig. 17: Comparaison des trois méthodes de suivi de déformation proposées, pour une même déformation initiale (déformation caractéristique principale, en rouge)

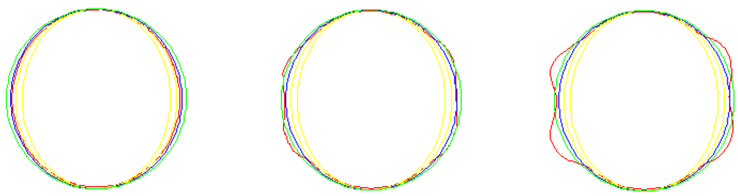
Initialisation



Exportation des déformations par transport du gradient



Maximisation de la distance



Méthode de recalcul des déformations caractéristiques

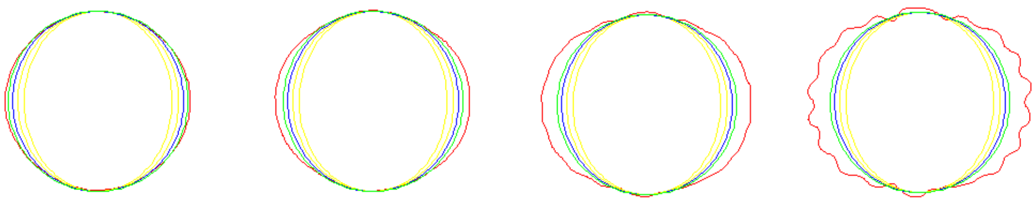


FIG. 18: Poursuite de la déformation principale par transport (en rouge), dans le cas où il s'agit d'une translation

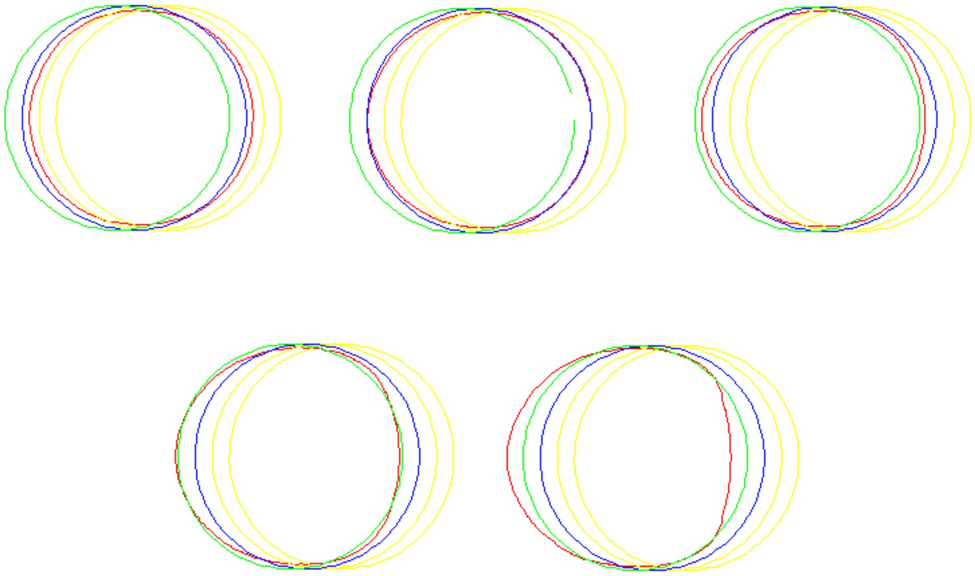
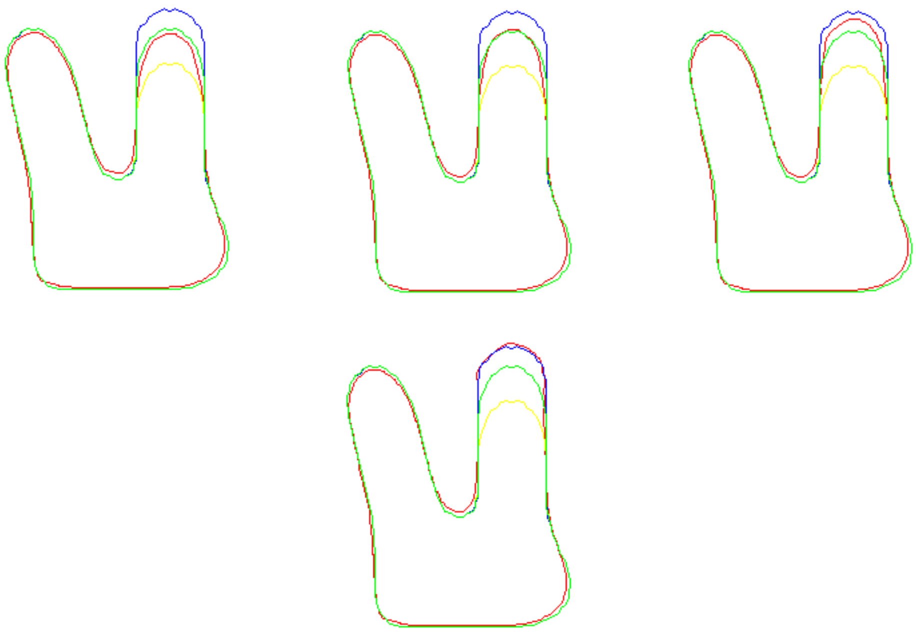


FIG. 19: Poursuite de la déformation principale par transport (en rouge), dans le cas où il s'agit de l'allongement d'un doigt



4.4 Autres applications : notion d'appartenance à une catégorie

Diverses utilisations d'énergies telles que E_H, de leurs gradients, et des outils que l'on vient de construire, peuvent être envisagées.

Supposons que l'on dispose d'un ensemble $\mathcal{H}$ de courbes, et que l'on désire savoir si un nouvel exemple X est typique de $\mathcal{H}$, ou que l'on désire construire une « projection » P de X sur $\mathcal{H}$ au sens au P serait la courbe la plus proche de X qui soit typique de $\mathcal{H}$. Cette notion de ressemblance, d'être « typique » de $\mathcal{H}$, peut s'exprimer plus rigoureusement grâce aux outils précédemment exposés. Nous savons désormais construire une courbe « moyenne » de $\mathcal{H}$ et la munir de modes de déformation caractéristiques. Le choix du nombre de modes pour bien représenter $\mathcal{H}$ est délicat. On peut par exemple retenir tous les modes dont les écarts types associés sont supérieurs à une certaine constante (éventuellement préalablement multipliée par le plus fort écart type), ou encore considérer la suite des rapports des écarts types $\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}}$, où les σ_n sont rangés par ordre décroissant, et garder les n_0 premiers modes où n_0 correspond à la première occurence d'un rapport inférieur à une certaine valeur. Le choix des modes significatifs (normalisés) $(\beta'_n)_{n\leqslant n_0}$ effectué, le degré d'« éloignement » $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(Y)$ d'une courbe Y à l'ensemble $\mathcal{H}$ peut être défini, à la manière d'un ellipsoïde, comme la somme des carrés des coefficients de la décomposition de la déformation élémentaire induite par Y sur M sur les modes significatifs, pondérés par l'inverse du carré de l'écart type, à laquelle on ajoute un terme sur le reste, évoquant le bruit autorisé. En termes formalisés, cela donne :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}}(Y) = \sum_{n\leqslant n_0} \frac{\left\langle \nabla_M E(M,Y)^2 \mid \beta'_n \right\rangle^2}{\sigma_n^2} + \frac{\left\| R(\nabla_M E(M,Y)^2) \right\|^2}{\sigma_R^2}$$

où

$$R(\beta) = \beta - \sum_{n\leqslant n_0} \langle \beta | \, \beta'_n \rangle \, \beta'_n$$

et

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{|\mathcal{H}|} \sum_{C\in\mathcal{H}} \|R(C)\|^2$$

Cette définition n'est correcte que si on a choisi M de façon à vérifier $\overline{\delta'} = 0$ avec les notations 4.2. Dans le cas contraire, il suffit de rajouter les termes correctifs adéquats. Une descente de gradient sur le degré d'éloignement permet de ramener une courbe X vers $\mathcal{H}$, mais le prix à payer est le calcul de la dérivée seconde de E (dont l'expression du gradient était déjà longue dans les cas exposés ici). Si l'on pose qu'une courbe « appartient » à $\mathcal{H}$ si son degré d'éloignement est inférieur à $n_0 + 1$, $\mathcal{H}$ aura une « forme » d'ellipsoïde. Si l'on préfère une autre forme, par exemple afin d'éviter d'inclure dans $\mathcal{H}$ des courbes vérifiant $\|R(\nabla_M E(M,Y)^2)\| = \sqrt{n_0+1} \;\; \sigma_R$, on peut recourir à une définition faisant intervenir un crochet $\langle\cdot\rangle_\Psi$ discret, avec la convention $R = n_0 + 1$, par :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H},\Psi}(Y) = \left\langle \left(\frac{\left\langle \nabla_M E(M,Y)^2 \mid \beta'_n \right\rangle^2}{\sigma_n^2} \right)_{n\leqslant n_0+1} \right\rangle_\Psi$$

Étant donné un lot de n ensembles $(\mathcal{H}_i)_{i\in[1;n]}$ de courbes relativement homogènes, on peut déterminer auquel (auxquels) une nouvelle courbe semble le plus « appartenir », le degré d'appartenance à une catégorie $\mathcal{H}_i$ s'appuyant sur l'opposé de l'éloignement $\mathcal{E}_{\mathcal{H}_i,\Psi}$. L'application immédiate est la classification de formes en catégories prédéfinies, par exemple la reconnaissance de caractères. Divers algorithmes classiques sont par ailleurs envisageables pour la partition automatique en catégories homogènes d'un ensemble hétérogène.

Conclusion

À partir de considérations simples sur le cadre du problème étudié, nous avons apporté une solution explicite en proposant une énergie qui approxime la distance de Hausdorff tout en étant dérivable, ce qui nous a permis de donner une définition rigoureuse aux notions intuitives que l'on cherchait à formaliser. Les résultats sont relativement satisfaisants ; il reste néanmoins quelques propriétés théoriques à étudier, comme la norme du gradient de ce que nous avons appelé « l'énergie de Hausdorff », et le test sur des ensembles de cardinal élevé des concepts de classifications.

Remerciements

À toute l'équipe ***Odyssée*** !

Divers

Le stage a eu lieu au département d'informatique de l'École Normale Supérieure, au bureau S4. Les programmes ont été faits en C/C++, l'implémentation de l'affichage et des *Level-Sets* reposant à la base sur des modules écrits par Renaud Keriven. Ce rapport a été édité sous GNU emacs et rédigé en LaTeX.

Références

[1] Daniel Cremers, Timo Kohlberger, and Christoph Schnörr : Non-linear shape statistics in Mumford-Shah based segmentation. In *ECCV 2002, LCNS 2351*, pp. 93-108, 2002.

[2] José Gomes and Olivier Faugeras : Reconciling distance functions and level sets. INRIA, RR 3666.

[3] Renaud Keriven : Équations aux dérivées partielles, évolutions de courbes et de surfaces et espaces d'échelle : applications à la vision par ordinateur. Thèse à l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

[4] Mike Rogers and Jim Graham : Robust active shape model search. In *ECCV 2002, LCNS 2353*, pp. 517-530, 2002.

[5] Mikael Rousson and Nikos Paragios : Shape priors for level set representations. In *ECCV 2002, LCNS 2351*, pp. 78-92, 2002.

[6] James A. Sethian : Level set methods and fast marching methods. Cambridge University Press, 1999.

[7] Stefano Soatta and Anthony J. Yezzi : Deformotion : Deforming motion, shape average and the joint registration and segmentation of images. In *ECCV*, 2002.

A Annexe : Calculs

A.1 Calcul du gradient de l'énergie de Hausdorff

Soit $\Gamma(p)$, pour $p \in [0;1]$, une paramétrisation de Γ, et $\delta g(\delta\Gamma)$ la partie linéaire de la variation de $g(\Gamma)$ en $\delta\Gamma$ quand l'on déforme la courbe Γ par addition de $\delta\Gamma$.

$$E_H(\Gamma,\Gamma_0) = \left\langle \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}, \langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma}^{\varphi}\rangle_{\Gamma_0}^{\psi} \right\rangle^{\Psi}$$

$$\begin{aligned}
\delta E_H(\delta\Gamma) &= \frac{1}{2\Psi'(E_H)}\Psi'\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}\right)\ \delta\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}\right)(\delta\Gamma) \\
&\quad + \frac{1}{2\Psi'(E_H)}\Psi'\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma}^{\varphi}\rangle_{\Gamma_0}^{\psi}\right)\ \delta\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma}^{\varphi}\rangle_{\Gamma_0}^{\psi}\right)(\delta\Gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}\right)(\delta\Gamma) &= \frac{1}{\psi'\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}\right)}\frac{1}{|\Gamma|}\ \delta\left(\int_{\Gamma}\psi\left(\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\right)(\delta\Gamma) \\
&\quad + \frac{1}{\psi'\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\rangle_{\Gamma}^{\psi}\right)}\left(\int_{\Gamma}\psi\left(\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\right)\ \delta\left(\frac{1}{|\Gamma|}\right)(\delta\Gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{1}{|\Gamma|}\right)(\delta\Gamma) &= -\frac{1}{|\Gamma|^2}\ \delta\left(|\Gamma|\right)(\delta\Gamma) \\
&= -\frac{1}{|\Gamma|^2}\delta\left(\int_0^1 |\Gamma'(p)|dp\right)(\delta\Gamma) \\
&= -\frac{1}{|\Gamma|^2}\int_0^1 \frac{\Gamma'(p)}{|\Gamma'(p)|}\cdot\delta\Gamma'(p)\ dp \\
&= \frac{1}{|\Gamma|^2}\int_0^1 \kappa n(p)\cdot\delta\Gamma(p)\ \ |\Gamma'(p)|dp
\end{aligned}$$

par intégration par parties, en supposant que $\delta\Gamma(p)$ est parallèle à $n(p)$, la normale à la courbe Γ au point $\Gamma(p)$. $\kappa(p)$ est la courbure de Γ en $\Gamma(p)$.

$$\begin{aligned}
\delta\left(\int_{\Gamma}\psi\left(\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\right)(\delta\Gamma) &= \delta\left(\int_0^1 \psi\left(\langle d(\Gamma(p),\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\ |\Gamma'(p)|dp\right)(\delta\Gamma) \\
&= \int_0^1 \frac{\psi'}{\varphi'}\left(\langle d(\Gamma(p),\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\ \frac{1}{|\Gamma_0|}\ \delta\left(\int_{\Gamma_0}\varphi(d(\Gamma(p),\cdot))\right)(\delta\Gamma)\ \ |\Gamma'(p)|dp \\
&\quad + \int_0^1 \psi\left(\langle d(\Gamma(p),\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\ \frac{\Gamma'(p)}{|\Gamma'(p)|}\cdot\delta\Gamma'(p)dp
\end{aligned}$$

dont le dernier terme vaut (en supposant, toujours, que $\delta\Gamma(p)\cdot\Gamma'(p) = 0$) :

$$-\int_0^1 \psi\left(\langle d(\Gamma(p),\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^{\varphi}\right)\ \kappa n(p)\cdot\delta\Gamma(p)\ |\Gamma'(p)|dp$$

et dont le premier terme peut être développé en :

$$\delta\left(\int_{\Gamma_0}\varphi(d(\Gamma(p),\cdot))\right)(\delta\Gamma) = \int_{\Gamma_0}\varphi'(d(\Gamma(p),x))\ \frac{\Gamma(p)-x}{d(\Gamma(p),x)}\cdot\delta\Gamma(p)\ dx$$

On peut maintenant s'attaquer au second terme de l'expression de $\delta E_H(\delta\Gamma)$:

$$\begin{aligned}\delta\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\rangle_{\Gamma_0}^\psi\right)(\delta\Gamma) &= \frac{1}{\psi'\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\rangle_{\Gamma_0}^\psi\right)}\frac{1}{|\Gamma_0|} \\ &\times \int_{\Gamma_0}\frac{\psi'}{\varphi'}\left(\langle d(x,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\right)\ \delta\left(\frac{1}{\Gamma}\int_0^1\varphi\left(d(x,\Gamma(p))\right)\ |\Gamma'(p)|dp\right)(\delta\Gamma)\ dx\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{\Gamma}\int_0^1\varphi\left(d(x,\Gamma(p))\right)\ |\Gamma'(p)|dp\right)(\delta\Gamma) &= \left(\int_\Gamma\varphi\circ d(x,\cdot)\right)\frac{1}{|\Gamma|^2}\int_0^1\kappa n(p)\cdot\delta\Gamma(p)\ |\Gamma'(p)|dp \\ &+\frac{1}{|\Gamma|}\int_0^1\varphi'(d(\Gamma(p),x))\ \frac{\Gamma(p)-x}{d(\Gamma(p),x)}\cdot\delta\Gamma(p)\ |\Gamma'(p)|dp \\ &+\frac{1}{\Gamma}\int_0^1\varphi\left(d(x,\Gamma(p))\right)\ \frac{\Gamma'(p)}{|\Gamma'(p)|}\cdot\delta\Gamma'(p)dp\end{aligned}$$

dont le dernier terme est égal à :

$$-\frac{1}{|\Gamma|}\int_0^1\varphi\left(d(\Gamma(p),x)\right)\ \kappa n(p)\cdot\delta\Gamma(p)\ |\Gamma'(p)|dp$$

L'expression de $\delta E_H(\Gamma,\Gamma_0)(\delta\Gamma)$ s'établit en réorganisant tous ces calculs ; ce qui nous permet d'exprimer finalement le gradient de $E_H(\Gamma,\Gamma_0)$. La composante normale (à la courbe) du gradient au point $y=\Gamma(p)$ est donc :

$$\begin{aligned}\nabla E_H(\Gamma(p))\cdot n(p) &= C\kappa(p)\int_{\Gamma_0}\frac{\psi'}{\varphi'}\left(\langle d(x,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\right)\ \left[\ \langle\varphi\circ d(x,\cdot)\rangle_\Gamma-\varphi\circ d(x,y)\ \right]dx \\ &+D\kappa(p)\ \left[\left\langle\psi\left(\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\right)\right\rangle_\Gamma-\psi\left(\langle d(\cdot,y)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\right)\ \right] \\ &+\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi'\circ d(x,y)}{d(x,y)}\ \left[C\frac{\psi'}{\varphi'}\left(\langle d(x,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\right)+\frac{D}{|\Gamma_0|}\frac{\psi'}{\varphi'}\left(\langle d(\cdot,y)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\right)\right]\ (y-x)\cdot n(p)\ dx\end{aligned}$$

où $C=\dfrac{1}{|\Gamma|\ |\Gamma_0|}\dfrac{\Psi'}{\psi'}\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_\Gamma^\varphi\rangle_{\Gamma_0}^\psi\right)$ et $D=\dfrac{1}{|\Gamma|}\dfrac{\Psi'}{\psi'}\left(\langle\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_{\Gamma_0}^\varphi\rangle_\Gamma^\psi\right)$.

A.2 Calcul du gradient de l'énergie W_p^1

Si l'on conserve les notations exposées en A.1, et que l'on note $d_C=\langle d(\cdot,\cdot)\rangle_C^\varphi$,

$$\begin{aligned}\delta E(\Gamma,\Gamma_0)(\delta\Gamma) &= \|d_\Gamma-d_{\Gamma_0}\|_p^{1-p}\int|(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)|^{p-1}\ \delta d_\Gamma(x)(\delta\Gamma)\ \mathrm{sgn}\left[d_\Gamma-d_{\Gamma_0}\right](x)dx \\ &+\ \|\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})\|_p^{1-p}\int|\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)|^{p-1}\ \nabla\delta d_\Gamma(x)(\delta\Gamma)\ \frac{\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)}{|\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)|}dx\end{aligned}$$

où

$$\nabla d_\Gamma(x)=\frac{1}{|\Gamma|\ \varphi'(d_\Gamma(x))}\int_\Gamma\varphi'(d(x,y))\frac{x-y}{d(x,y)}dy$$

Par ailleurs (partie précédente) :

$$\begin{aligned}
\delta d_\Gamma(x)(\delta\Gamma) &= \frac{1}{|\Gamma|\ \varphi'(d_\Gamma(x))}\left[\left(\int_\Gamma \kappa n\cdot\delta\Gamma\right)\langle\varphi\circ d(x,\cdot)\rangle_\Gamma\right.\\
&\quad + \int_\Gamma \varphi'(d(x,y))\frac{y-x}{d(x,y)}\cdot\delta\Gamma(y)dy\\
&\quad \left. - \int_\Gamma \varphi(d(x,y))\kappa n(y)\cdot\delta\Gamma(y)dy\right]
\end{aligned}$$

Donc, si l'on note

$$B(x,y)=\frac{1}{|\Gamma|\ \varphi'(d_\Gamma(x))}\kappa(y)\left(\langle\varphi\circ d(x,\cdot)\rangle_\Gamma-\varphi\circ d(x,y)\right)+\varphi'(d(x,y))\frac{y-x}{d(x,y)}\cdot n(y)$$

et

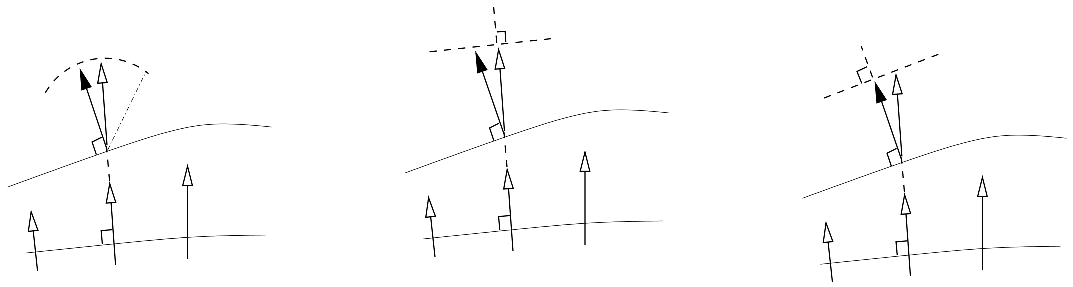
$$\begin{aligned}
C(x) &= \|d_\Gamma-d_{\Gamma_0}\|_p^{1-p}\ \ |(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)|^{p-1}\ \ \mathrm{sgn}\left[d_\Gamma-d_{\Gamma_0}\right](x)\\
D(x) &= \|\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})\|_p^{1-p}\ \ \big(|\nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)|^{p-2}\ \ \nabla(d_\Gamma-d_{\Gamma_0})(x)\big)
\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\nabla E(\Gamma,\Gamma_0)(y)=\int_\Omega C(x)\ B(x,y)\ +\ D(x)\ \nabla_x B(x,y)dx$$

A.3 Étude d'un suivi de champ de déformation par évolution discrète

FIG. 20: Transport du champ de déformation



A - Amplitude

B - Composante selon le mouvement initial

C - Projection

La figure 21 est une caricature des résultats observés, pour des choix de transports différents. Le cas B favorise les explosions car augmente l'amplitude du champ de déformation aux endroits où celui-ci varie. Le cas A gère naturellement les rotations locales, tandis que le cas C crée des excroissances filiformes ; résultats que l'on peut retrouver simplement dans le cas d'une fraction de courbe initialement plane, pour

Fig. 21: Formes génériques créées lors de la poursuite d'un champ de déformation

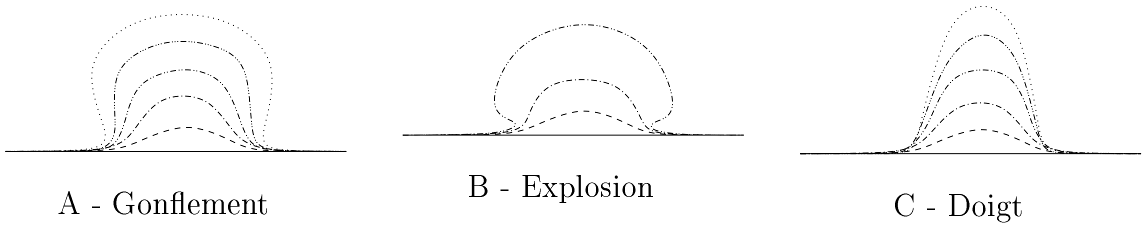


Fig. 22: Champ de déformation triangulaire (conditions initiales)

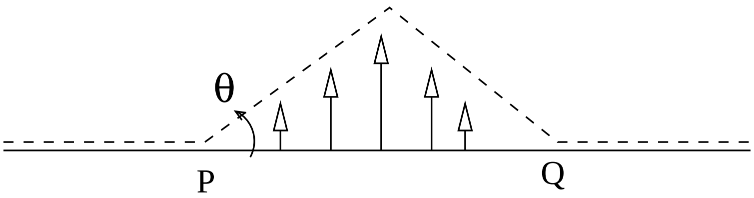
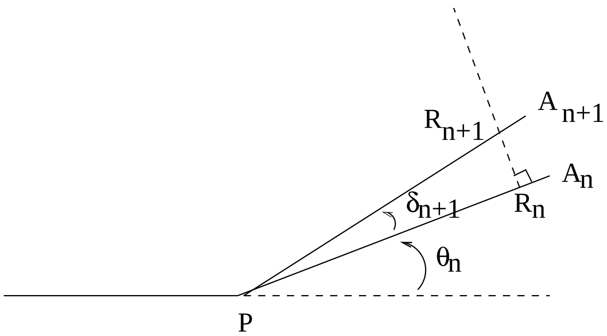


Fig. 23: Notations du problème géométrique



un champ de déformation (certes non $\mathcal{C}^1$) nul partout sauf sur un segment $[P, Q]$ de la courbe où il est proportionnel à la distance au point le plus proche du segment.

Les transports dans les trois cas sont tels que pour tout n on observera deux segments d'extrémité commune P. Notons θ_n l'angle entre ces deux segments à l'étape n de la poursuite. Notons également $\delta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ l'angle ajouté à l'étape n, et suivons un point particulier R_n du segment. On a la relation $\tan \delta_{n+1} = \frac{R_n R_{n+1}}{P R_n}$, où $R_n R_{n+1} = \varepsilon \delta A_n(R_n)$. Dans le cas du transport A, ceci nous donne la relation $\tan \delta_{n+1} = \sin \delta_n$, ce qui nous indique que l'angle θ_n croît de façon presque constante, diminuant légèrement : $\delta_{n+1} \leqslant \delta_n$ et $\delta_{n+1} = \delta_n + O(\delta_n^3)$, O étant uniforme dans ces relations, d'où $\delta_n = n\delta_0 + O(n\delta_0^3)$. On a donc affaire à une rotation à vitesse (pratiquement) constante. Dans le cas B, la relation de base devient $\tan \delta_{n+1} = \tan \delta_n$, d'où une rotation à vitesse angulaire constante. Le phénomène d'explosion n'apparaît que dans le cas où la dérivée du champ selon l'abscisse curviligne n'est pas constante. Dans le cas C, on a $\tan \delta_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(2\theta_n)$, ce qui implique que δ_n décroît, et ce, plus vite que dans le cas A.

En fait, les résultats ne diffèrent qualitativement que si ε a été choisi relativement grand (de l'ordre de 1), car asymptotiquement, pour $\varepsilon \to 0$ et pour un nombre d'observations $n = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}} \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, on observe finalement la même chose, puisque la différence entre les modèles est d'ordre relatif 2 (les δ_n étant d'ordre ε et les différences entre modèles d'ordre ε^3). La conclusion de tout ceci est qu'il est fort possible que le choix du transport soit indifférent en théorie, mais qu'en pratique, dans des implémentations à évolution discrète, des différences qualitatives apparaissent, et ce d'autant plus que le pas de temps ε est grand.