Algorithmique

Structures de données

Florent Hivert

Mél : Florent.Hivert@lri.fr
Page personnelle : http://www.lri.fr/~hivert

Types de données

Retenir

Avoir choisi les bons types de données permet d'avoir un programme

- *plus lisible car auto documenté*
- *plus facile à maintenir*
- *souvent plus rapide, en tout cas plus facile à optimiser*

" I will, in fact, claim that the difference between a bad programmer and a good one is whether he considers his code or his data structures more important. Bad programmers worry about the code. Good programmers worry about data structures and their relationships. " — Linus Torvalds (creator of Linux)

Algorithmes et structures de données

La plupart des bons algorithmes fonctionnent grâce à une méthode astucieuse pour organiser les données. Nous allons étudier quatre grandes classes de structures de données :

- Les structures de données séquentielles (tableaux) ;
- Les structures de données linéaires (liste chaînées) ;
- Les arbres ;
- Les graphes.

Structures séquentielles : les tableaux

Structure de donnée séquentielle (tableau)

En anglais : array, vector.

Définition

*Un **tableau** est une structure de donnée T qui permet de stocker un certain nombre d'éléments $T[i]$ repérés par un index i. Les tableaux vérifient généralement les propriétés suivantes :*

- *tous les éléments ont le même type de base ;*
- *le nombre d'éléments stockés est fixé ;*
- *l'accès et la modification de l'élément numéro i est en temps constant $\Theta(1)$, indépendant de i et du nombre d'éléments, le tableau.*

Un tableau en mémoire

Définition

Dans le tableau, tous les éléments ont la même taille mémoire.

Nombre d'élément : n, taille d'un élément t :

T[0]	T[1]	T[2]	...	T[n-1]

On suppose que le tableau commence à l'adresse d

- $T[0]$ occupe les cases d à $d + t - 1$;
- $T[1]$ occupe les cases $d + t$ à $d + 2t - 1$;
- $T[i]$ occupe les cases $d + it$ à $d + (i + 1)t - 1$;
- Le tableau entier occupe les cases d à $d + nt - 1$.

Note : indirection (pointeur) possible si taille variable (par exemple classe virtuelle).

Un tableau en mémoire

Définition

Dans le tableau, tous les éléments ont la même taille mémoire.

Nombre d'élément : n, taille d'un élément t :

T[0]	T[1]	T[2]	...	T[n-1]

On suppose que le tableau commence à l'adresse d

- $T[0]$ occupe les cases d à $d + t - 1$;
- $T[1]$ occupe les cases $d + t$ à $d + 2t - 1$;
- $T[i]$ occupe les cases $d + it$ à $d + (i + 1)t - 1$;
- Le tableau entier occupe les cases d à $d + nt - 1$.

Note : indirection (pointeur) possible si taille variable (par exemple classe virtuelle).

Structure de donnée séquentielle (tableau)

On encapsule souvent le tableau dans une structure qui permet de faire varier la taille :

- Java : tableau `int[]` (taille fixe), `ArrayList` (taille variable)
- C : tableau `int[]` (taille fixe), pointeur (taille variable)
- C++ : `std::array` (taille fixe), `std::vector` (taille variable)
- Python : `list` (taille variable, $\neq$ liste chaînée)

Exemple : Tableau en C (bas niveau)

- On suppose déclaré un type `elem` pour les éléments.
- Espace mémoire nécessaire au stockage d'un élément exprimé en mots mémoire (octets en général) : `sizeof(elem)`.

- définition *statique* : `elem t[taille];`
- définition *dynamique* en deux temps (déclaration, allocation) :

```
#include <stdlib.h>
elem *t;
...
t = (elem*) malloc(taille*sizeof(elem));
```

- L'adresse de `t[i]` est noté `t + i`. Calculée par

$$\text{Addr}(\texttt{t[i]}) = \text{Addr}(\texttt{t[0]}) + \texttt{sizeof(elem)} * \texttt{i}$$

Exemple : Tableau en C (bas niveau)

- On suppose déclaré un type `elem` pour les éléments.
- Espace mémoire nécessaire au stockage d'un élément exprimé en mots mémoire (octets en général) : `sizeof(elem)`.

- définition *statique* : `elem t[taille];`
- définition *dynamique* en deux temps (déclaration, allocation) :

```
#include <stdlib.h>
elem *t;
...
t = (elem*) malloc(taille*sizeof(elem));
```

- L'adresse de `t[i]` est noté `t + i`. Calculée par

$$\text{Addr}(\texttt{t[i]}) = \text{Addr}(\texttt{t[0]}) + \texttt{sizeof(elem)} * \texttt{i}$$

Exemple : Tableau en C (bas niveau)

- On suppose déclaré un type `elem` pour les éléments.
- Espace mémoire nécessaire au stockage d'un élément exprimé en mots mémoire (octets en général) : `sizeof(elem)`.

- définition *statique* : `elem t[taille];`
- définition *dynamique* en deux temps (déclaration, allocation) :

```
#include <stdlib.h>
elem *t;
...
t = (elem*) malloc(taille*sizeof(elem));
```

- L'adresse de `t[i]` est noté `t + i`. Calculée par

$$\text{Addr}(\texttt{t[i]}) = \text{Addr}(\texttt{t[0]}) + \texttt{sizeof(elem)} * \texttt{i}$$

Tableau en Java

- On suppose déclaré un type `elem` pour les éléments.
- définition *dynamique* en deux temps (déclaration, allocation) :

```
elem[] t;
...
t = new elem[taille];
```

Tableau partiellement remplis

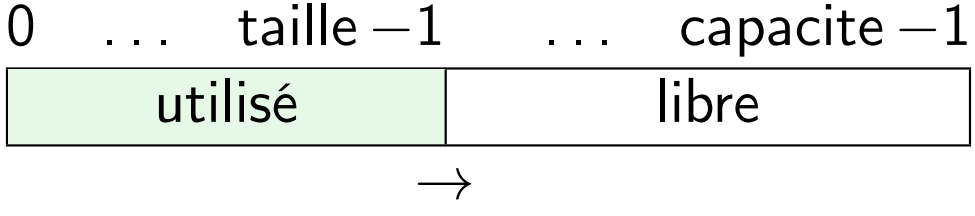
Retenir

Pour simuler un tableau de taille variable, on peut

- *réserver une certaine quantité de mémoire appelée* capacite,
- *et ranger les valeurs au début du tableau.*

Organisation des données (structure, classe) :

- tableau de taille capacite alloué
- éléments d'indice i pour $0 \leq i <$ taille $\leq$ capacite initialisés



Opérations de base

Hypothèses :

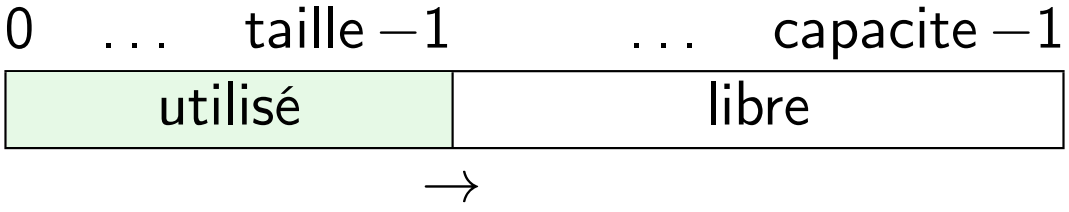
- tableau de taille capacite alloué
- éléments $0 \leq i < \text{taille} \leq \text{capacite}$ initialisés

Retenir (Opérations de base)

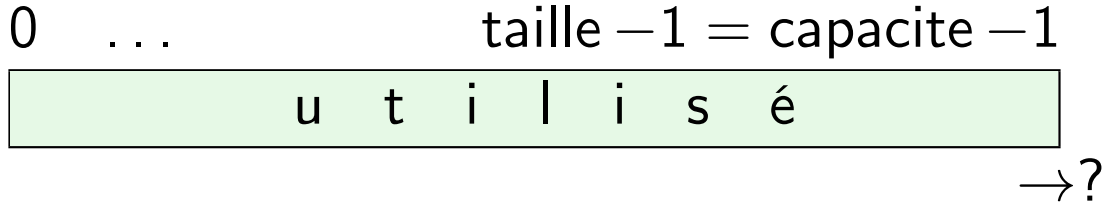
- *accès au premier élément :* $\Theta(1)$
- *accès à l'élément numéro i :* $\Theta(1)$
- *accès au dernier élément :* $\Theta(1)$
- *insertion/suppression d'un élément au début :* $\Theta(\text{taille})$
- *insert./suppr. d'un élt en position i :* $\Theta(\text{taille} - i) \subset O(\text{taille})$
- *insert./suppr. d'un élt à la fin :* $\Theta(1)$

À faire : écrire les méthodes correspondantes

Problème de la taille maximum



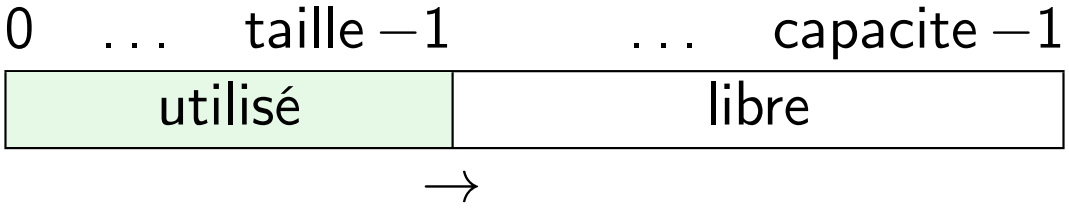
On essaye d'insérer un élément dans un tableau où taille = capacite
Il n'y a plus de place disponible.



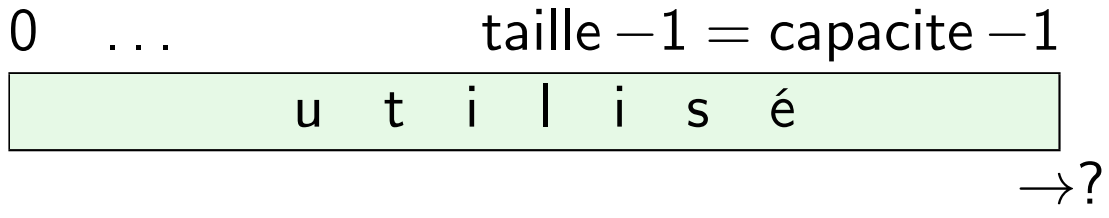
Comportements possibles :

- Erreur (arrêt du programme, exception)
- Ré-allocation du tableau avec recopie, coût : Θ(taille)

Problème de la taille maximum



On essaye d'insérer un élément dans un tableau où taille = capacite
Il n'y a plus de place disponible.



Comportements possibles :

- Erreur (arrêt du programme, exception)
- Ré-allocation du tableau avec recopie, coût : Θ(taille)

Ré-allocation

En C : `realloc`

```
void *realloc(void *ptr, size_t size);
```

modifie la taille du bloc de mémoire pointé par ptr pour l'amener à une taille de `size` octets. `realloc()` conserve le contenu de la zone mémoire minimum entre la nouvelle et l'ancienne taille. [...] Si la zone pointée était déplacée, un `free(ptr)` est effectué.

En Java, copy systématique :

```
E[] newData = (E[]) new Object[...];
System.arraycopy(data, 0, newData, 0, size);
data = newData;
```

Ré-allocation : coût

Problème

Quel est le coût des réallocations ?

On se place dans le scénario suivant :

- Au début, le tableau ne contient rien ;
- On ajoute, 1 par 1, n éléments à la fin.
  méthode `append` en Python et Java, `push_back` en C++

On veut calculer la complexité de l'ajout

Exemple : enregistrement d'un signal audio venant d'un micros 44000 échantillons par seconde.

Ré-allocation : coût

Problème

Quel est le coût des réallocations ?

On se place dans le scénario suivant :

- Au début, le tableau ne contient rien ;
- On ajoute, 1 par 1, n éléments à la fin.
  méthode `append` en Python et Java, `push_back` en C++

On veut calculer la complexité de l'ajout

Exemple : enregistrement d'un signal audio venant d'un micros 44000 échantillons par seconde.

Rappels suites arithmétiques et géométriques

Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r, \quad u_n = u_0 + nr.$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2}.$$

$$0 + r + 2r + \ldots nr = (n+1)\frac{nr}{2}$$

Suite géométrique : $u_{n+1} = qu_n, \quad u_n = u_0 q^n.$

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Ré-allocation par ajout d'une case

On ajoute, 1 par 1, n éléments à la fin.

Étape	Allocations	Copies	Stockage	#écritures
1	1		$T[0]$	1
2	2	$T[0]$	$T[1]$	2
3	3	$T[0 \dots 1]$	$T[2]$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	n	$T[0 \dots n-2]$	$T[n-1]$	n

Bilan : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ écritures.

Ré-allocation par ajout d'une case

On ajoute, 1 par 1, n éléments à la fin.

Étape	Allocations	Copies	Stockage	#écritures
1	1		$T[0]$	1
2	2	$T[0]$	$T[1]$	2
3	3	$T[0 \dots 1]$	$T[2]$	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	$T[0 \dots n-2]$	$T[n-1]$	n

Bilan : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ écritures.

Ré-allocation par ajout d'une taille fixe b

Nombre d'étapes : $k = \lceil \frac{n}{b} \rceil$.
Hypothèse simplificatrice : n est un multiple de la taille b des blocs : $n = kb$. À chaque étape, on écrit b valeurs.

Étape	Alloc.	Copies	Stockage	#écritures
1	b		$0 \dots b-1$	b
2	2b	$0 \dots b-1$	$b \dots 2b-1$	2b
3	3b	$0 \dots 2b-1$	$2b \dots 3b-1$	3b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	kb	$0 \dots (k-1)b-1$	$(k-1)b \dots kb-1$	kb

Bilan : $\sum_{i=1}^{k} bi = b \sum_{i=1}^{k} i = b\frac{k(k+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2b}$ écritures.

Ré-allocation par ajout d'une taille fixe b

Nombre d'étapes : $k = \lceil \frac{n}{b} \rceil$.
Hypothèse simplificatrice : n est un multiple de la taille b des blocs : $n = kb$. À chaque étape, on écrit b valeurs.

Étape	Alloc.	Copies	Stockage	#écritures
1	b		$0 \dots b-1$	b
2	2b	$0 \dots b-1$	$b \dots 2b-1$	2b
3	3b	$0 \dots 2b-1$	$2b \dots 3b-1$	3b
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	kb	$0 \dots (k-1)b-1$	$(k-1)b \dots kb-1$	kb

Bilan : $\sum_{i=1}^{k} bi = b \sum_{i=1}^{k} i = b\frac{k(k+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2b}$ écritures.

Ré-allocation par ajout d'une taille fixe : Bilan

Retenir

*On suppose que l'on réalloue **une case supplémentaire** à chaque débordement. Coût (nombre de copies d'éléments) :*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

Si on alloue des blocs de taille b, en notant $k = \lceil \frac{n}{b} \rceil$ le nombre de blocs :

$$\sum_{i=1}^{k} bi \approx \frac{n^2}{2b} \in \Theta(n^2)$$

*La vitesse est divisée par b mais la **complexité reste la même**.*

Ré-allocation par ajout d'une taille fixe : Bilan

Retenir

On suppose que l'on réalloue ***une case supplémentaire*** *à chaque débordement. Coût (nombre de copies d'éléments) :*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

Si on alloue des blocs de taille b, en notant $k = \lceil \frac{n}{b} \rceil$ *le nombre de blocs :*

$$\sum_{i=1}^{k} bi \approx \frac{n^2}{2b} \in \Theta(n^2)$$

La vitesse est divisée par b mais la ***complexité reste la même****.*

Ré-allocation par doublement de taille

Bilan : Il faut allouer de plus en plus d'éléments.

Question

Que ce passe-t-il si l'on double la taille à chaque fois ?

Ré-allocation par doublement de taille

Nombre d'étapes : $k = \lceil \log_2 n \rceil$. Hypothèse simplificatrice : n est une puissance de 2 : $n = 2^k$.

Étape	Alloc.	Copies	Stockage	#écritures
0	1		0	1
1	2	0	1	2
2	4	$0 \ldots 1$	$2 \ldots 3$	4
3	8	$0 \ldots 3$	$4 \ldots 7$	8
4	16	$0 \ldots 7$	$8 \ldots 15$	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	2^k	$0 \ldots 2^{k-1} - 1$	$2^{k-1} \ldots 2^k - 1$	2^k

Bilan : $\sum_{i=0}^{k} 2^k = \frac{1 - 2^{k+1}}{1 - 2} = 2^{k+1} - 1 \approx 2n$ écritures.

Ré-allocation par doublement de taille

Nombre d'étapes : $k = \lceil \log_2 n \rceil$. Hypothèse simplificatrice : n est une puissance de 2 : $n = 2^k$.

Étape	Alloc.	Copies	Stockage	#écritures
0	1		0	1
1	2	0	1	2
2	4	$0 \ldots 1$	$2 \ldots 3$	4
3	8	$0 \ldots 3$	$4 \ldots 7$	8
4	16	$0 \ldots 7$	$8 \ldots 15$	16
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	2^k	$0 \ldots 2^{k-1} - 1$	$2^{k-1} \ldots 2^k - 1$	2^k

Bilan : $\sum_{i=0}^{k} 2^k = \frac{1 - 2^{k+1}}{1 - 2} = 2^{k+1} - 1 \approx 2n$ écritures.

Ré-allocation par doublement de taille

Retenir (Solution au problème de la ré-allocation)

À chaque débordement, on ré-alloue $\lceil K \cdot \text{capacite} \rceil$ *où* $K > 1$ *est une constante fixée (par exemple* $K = 2$*).*

- Début : tableau à 1 élément
- À la m-ième ré-allocation, la taille du tableaux : K^m
- Pour un tableau à n éléments : m est le plus petit entier tel que $K^m \geq n$, soit $m = \lceil \log_K(n) \rceil$
- Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \in \Theta(n + K^m) = \Theta(n)$$

Finalement le coût est $\Theta(n)$ (car $k^{m-1} < n \leq K^m$).

Ré-allocation par doublement de taille

Retenir (Solution au problème de la ré-allocation)

À chaque débordement, on ré-alloue $\lceil K \cdot \text{capacite} \rceil$ *où* $K > 1$ *est une constante fixée (par exemple* $K = 2$*).*

- Début : tableau à 1 élément
- À la m-ième ré-allocation, la taille du tableaux : K^m
- Pour un tableau à n éléments : m est le plus petit entier tel que $K^m \geq n$, soit $m = \lceil \log_K(n) \rceil$
- Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \in \Theta(n + K^m) = \Theta(n)$$

Finalement le coût est $\Theta(n)$ (car $k^{m-1} < n \leq K^m$).

Ré-allocation par doublement de taille

Retenir (Solution au problème de la ré-allocation)

À chaque débordement, on ré-alloue $\lceil K \cdot \text{capacite} \rceil$ *où* $K > 1$ *est une constante fixée (par exemple* $K = 2$*).*

- Début : tableau à 1 élément
- À la m-ième ré-allocation, la taille du tableaux : K^m
- Pour un tableau à n éléments : m est le plus petit entier tel que $K^m \geq n$, soit $m = \lceil \log_K(n) \rceil$
- Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \in \Theta(n + K^m) = \Theta(n)$$

Finalement le coût est $\Theta(n)$ (car $k^{m-1} < n \leq K^m$).

Nombre moyen de copies

Selon la valeur de K, la constante de complexité varie de manière importante. Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \approx n + \frac{n}{K - 1} = n\frac{K}{K - 1}$$

Quelques valeurs :

K	1.01	1.1	1.2	1.5	2	3	4	5	10
$\frac{K}{K-1}$	101	11	6	3	2	1.5	1.33	1.25	1.11

Interprétation :

- Si l'on augmente la taille de 10% à chaque étape, chaque nombre sera recopié en moyenne 11 fois.
- Si l'on double la taille à chaque étape, chaque nombre sera en moyenne recopié deux fois.

Nombre moyen de copies

Selon la valeur de K, la constante de complexité varie de manière importante. Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \approx n + \frac{n}{K - 1} = n\frac{K}{K - 1}$$

Quelques valeurs :

K	1.01	1.1	1.2	1.5	2	3	4	5	10
$\frac{K}{K-1}$	101	11	6	3	2	1.5	1.33	1.25	1.11

Interprétation :

- Si l'on augmente la taille de 10% à chaque étape, chaque nombre sera recopié en moyenne 11 fois.
- Si l'on double la taille à chaque étape, chaque nombre sera en moyenne recopié deux fois.

Nombre moyen de copies

Selon la valeur de K, la constante de complexité varie de manière importante. Nombre de recopies d'éléments :

$$C = n + \sum_{i=1}^{m-1} K^i = n + \frac{K^m - 1}{K - 1} \approx n + \frac{n}{K - 1} = n\frac{K}{K - 1}$$

Quelques valeurs :

K	1.01	1.1	1.2	1.5	2	3	4	5	10
$\frac{K}{K-1}$	101	11	6	3	2	1.5	1.33	1.25	1.11

Interprétation :

- Si l'on augmente la taille de 10% à chaque étape, chaque nombre sera recopié en moyenne 11 fois.
- Si l'on double la taille à chaque étape, chaque nombre sera en moyenne recopié deux fois.

Bilan

Retenir (Nombre de copies)

Dans un tableau de taille n, coût de l'ajout d'un élément dans le pire des cas :

$$\textit{Coût en temps} \approx n, \qquad \textit{Coût en espace} \approx (K-1)n\,.$$

En, moyenne sur un grand nombre d'éléments ajoutés :

$$\textit{Coût en temps} \approx \frac{K}{K-1}, \qquad \textit{Coût en espace} \approx K\,.$$

On dit que l'algorithme travaille en ***temps constant amortis*** *(Constant Amortized Time (CAT) en anglais).*

Compromis Espace/Temps

Quand K augmente, la vitesse augmente mais la place mémoire gaspillée ($\approx (K-1)n$) augmente aussi. Le choix de la valeur de K dépend donc du besoin de vitesse par rapport au coût de la mémoire.

Retenir

C'est une situation très classique : dans de nombreux problèmes, il est possible d'aller plus vite en utilisant plus de mémoire.

Exemple : on évite de faire plusieurs fois les même calculs en stockant le résultat.

Compromis Espace/Temps

Quand K augmente, la vitesse augmente mais la place mémoire gaspillée ($\approx (K-1)n$) augmente aussi. Le choix de la valeur de K dépend donc du besoin de vitesse par rapport au coût de la mémoire.

Retenir

C'est une situation très classique : dans de nombreux problèmes, il est possible d'aller plus vite en utilisant plus de mémoire.

Exemple : on évite de faire plusieurs fois les même calculs en stockant le résultat.

Compromis Espace/Temps

Quand K augmente, la vitesse augmente mais la place mémoire gaspillée ($\approx (K-1)n$) augmente aussi. Le choix de la valeur de K dépend donc du besoin de vitesse par rapport au coût de la mémoire.

Retenir

C'est une situation très classique : dans de nombreux problèmes, il est possible d'aller plus vite en utilisant plus de mémoire.

Exemple : on évite de faire plusieurs fois les même calculs en stockant le résultat.

Une petite démo en Python/Cython...

En pratique . . .Python

On utilise `void *realloc(void *ptr, size_t size);`

Extrait des sources du langage Python
Fichier `listobject.c`, ligne 41-91 :

```
/* This over-allocates proportional to the list size, making room
 * for additional growth.  The over-allocation is mild, but is
 * enough to give linear-time amortized behavior over a long
 * sequence of appends() in the presence of a poorly-performing
 * system realloc().
 * The growth pattern is:  0, 4, 8, 16, 25, 35, 46, 58, 72, 88, ...
 */
new_allocated = (newsize >> 3) + (newsize < 9 ? 3 : 6);
```

En pratique . . .Java

- Resize impossible sur un tableau : Copie.
- Mieux : utiliser `ArrayList<Elem>` :

  Each ArrayList instance has a capacity. The capacity is the size of the array used to store the elements in the list. It is always at least as large as the list size. As elements are added to an ArrayList, its capacity grows automatically. ***The details of the growth policy are not specified beyond the fact that adding an element has constant amortized time cost.***

En pratique . . .Oracle Java 8

Extrait des sources de Oracle java 8

```
private void grow(int minCapacity) {
     // overflow-conscious code
     int oldCapacity = elementData.length;
     int newCapacity = oldCapacity + (oldCapacity >> 1);
     if (newCapacity - minCapacity < 0)
         newCapacity = minCapacity;
     if (newCapacity - MAX_ARRAY_SIZE > 0)
         newCapacity = hugeCapacity(minCapacity);
     // minCapacity is usually close to size, so this is a win:
     elementData = Arrays.copyOf(elementData, newCapacity);
 }
```

Bilan `newCapacity = oldCapacity*1.5`.

En pratique . . .Java OpenJDK

Extrait des sources de OpenJDK 6-b27

```
public void  [More ...] ensureCapacity(int minCapacity) {
        modCount++;
        int oldCapacity = elementData.length;
        if (minCapacity > oldCapacity) {
            Object oldData[] = elementData;
            int newCapacity = (oldCapacity * 3)/2 + 1;
            if (newCapacity < minCapacity)
                newCapacity = minCapacity;
            // minCapacity is usually close to size, so this is a win:
            elementData = Arrays.copyOf(elementData, newCapacity);
        }
    }
```

Bilan `newCapacity = oldCapacity*1.5 + 1`.

Conclusion

Retenir

Les bibliothèques standards savent gérer la réallocation d'un tableau qui grossit sans perte de complexité. Mais il y a un certain surcoût.

Si l'on sait par avance quelle est la taille finale, on peut demander de réserver de la mémoire dès le début :

- *en C++ :* `vector.reserve(size_type n)`
- *en Java :* `ArrayList.ensureCapacity(int minCapacity)`
- *en Python : liste avec des cases non initialisées* `[None]*n`

Variables Dynamiques et pointeurs

Variables dynamiques et pointeurs

Rappel : une variable usuelle est caractérisée par quatre propriétés :

(*nom*, *adresse*, *type*, *valeur*)

Retenir

*Une **variable dynamique** est anonyme :*

(adresse, type, valeur) .

On y accède grâce à un pointeur.

*Un **pointeur** p qui **repère** (ou **pointe vers**) une VD d'adresse a et de type T*

- *est de type ↑ T (lire « flèche T ») ;*
- *a pour valeur l'adresse a de la VD.*

Variables dynamiques et pointeurs

les quatre propriétés d'une variable usuelle

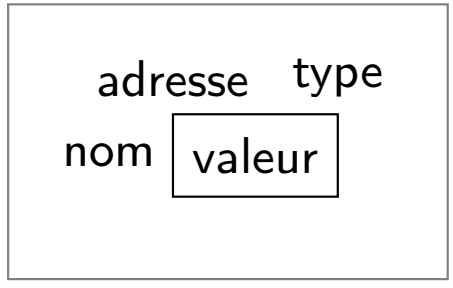


schéma pour le pointeur p qui repère la VD d'adresse a, de type T et de valeur v

le lien dynamique entre le pointeur p et la VD qu'il repère est illustré par une flèche

Variables dynamiques et pointeurs

les quatre propriétés d'une variable usuelle

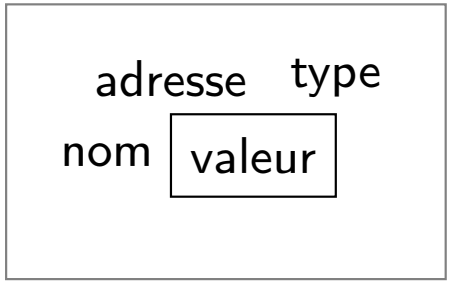
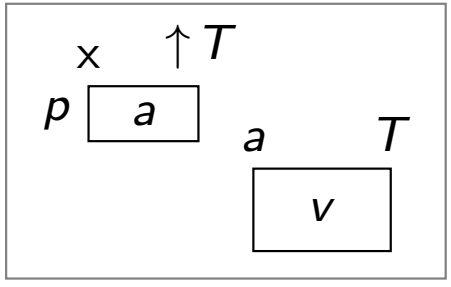


schéma pour le pointeur p qui repère la VD d'adresse a, de type T et de valeur v



le lien dynamique entre le pointeur p et la VD qu'il repère est illustré par une flèche

Variables dynamiques et pointeurs

les quatre propriétés d'une variable usuelle

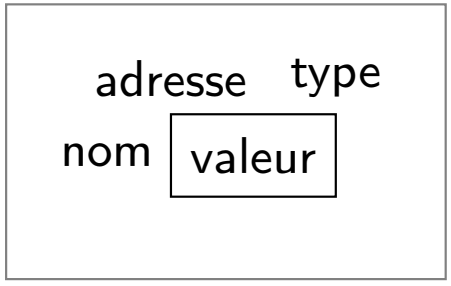
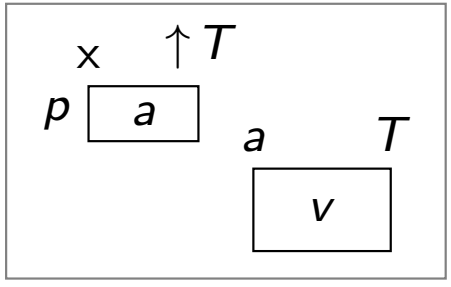
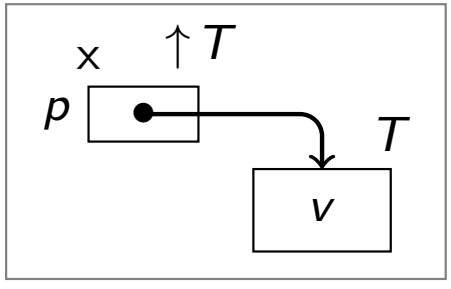


schéma pour le pointeur p qui repère la VD d'adresse a, de type T et de valeur v



le lien dynamique entre le pointeur p et la VD qu'il repère est illustré par une flèche



Les pointeurs nuls

Retenir

Un pointeur p peut valoir `NULL` *: il ne repère aucune VD.*

schéma pour le pointeur p de type $\uparrow T$ qui ne repère aucune VD

l'accès à aucune VD pour le pointeur p de type $\uparrow T$ est illustré par une croix

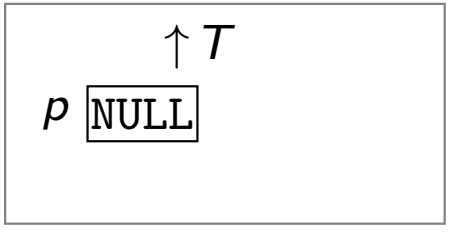
`NULL` est une valeur commune à tous les pointeurs, à ceux du type $\uparrow T$ comme à ceux des autres types.

Les pointeurs nuls

Retenir

Un pointeur p peut valoir `NULL` *: il ne repère aucune VD.*

schéma pour le pointeur p de type $\uparrow T$ qui ne repère aucune VD



l'accès à aucune VD pour le pointeur p de type $\uparrow T$ est illustré par une croix

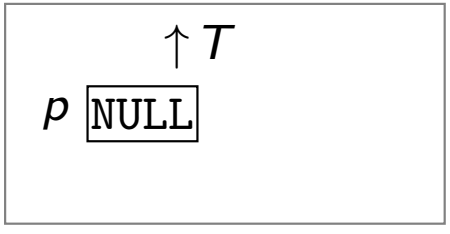
`NULL` est une valeur commune à tous les pointeurs, à ceux du type $\uparrow T$ comme à ceux des autres types.

Les pointeurs nuls

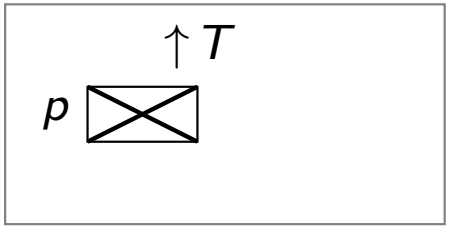
Retenir

Un pointeur p peut valoir `NULL` *: il ne repère aucune VD.*

schéma pour le pointeur p de type $\uparrow T$ qui ne repère aucune VD



l'accès à aucune VD pour le pointeur p de type $\uparrow T$ est illustré par une croix



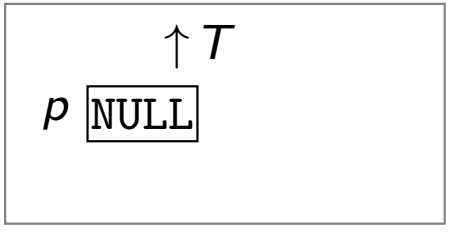
`NULL` est une valeur commune à tous les pointeurs, à ceux du type $\uparrow T$ comme à ceux des autres types.

Les pointeurs nuls

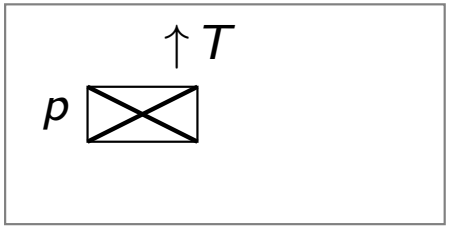
Retenir

Un pointeur p peut valoir `NULL` *: il ne repère aucune VD.*

schéma pour le pointeur p de type $\uparrow T$ qui ne repère aucune VD



l'accès à aucune VD pour le pointeur p de type $\uparrow T$ est illustré par une croix



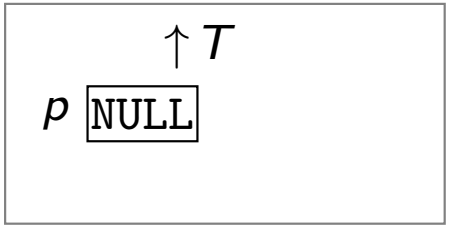
`NULL` est une valeur commune à tous les pointeurs, à ceux du type $\uparrow T$ comme à ceux des autres types.

Les pointeurs nuls

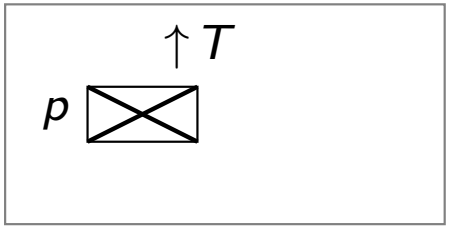
Retenir

Un pointeur p peut valoir `NULL` *: il ne repère aucune VD.*

schéma pour le pointeur p de type $\uparrow T$ qui ne repère aucune VD



l'accès à aucune VD pour le pointeur p de type $\uparrow T$ est illustré par une croix



`NULL` est une valeur commune à tous les pointeurs, à ceux du type $\uparrow T$ comme à ceux des autres types.

Taille des variables

La taille d'une VD de type T est celle de toute variable de type T.

La taille d'un pointeur est fixée lors de la compilation, elle ne dépend pas du type T. C'est la principale limitation quand à la mémoire disponible dans une machine.

- 32 bits, espace adressable $\leq$ 4 Gio (gibioctets) $\approx 10^9$.
- 64 bits, espace adressable $\leq$ 16 Eio (exbioctets) $\approx 10^{18}$.

Début de vie d'une VD

Soit p une variable du type $\uparrow T$.

Retenir

*Durant l'exécution du programme, l'**action d'allocation***

allouer(p)

provoque :

1. *la création d'une nouvelle VD de type T et de valeur indéterminée, par réservation d'une nouvelle zone de mémoire ;*
2. *l'affectation à p de l'adresse de cette VD.*

Début de vie d'une VD

Soit p une variable du type $\uparrow T$.

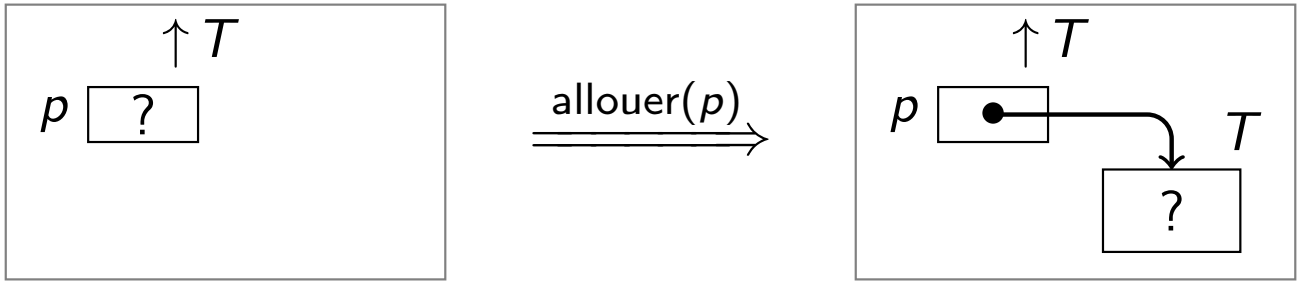
Retenir

*Durant l'exécution du programme, l'**action d'allocation***

allouer(p)

provoque :

1. *la création d'une nouvelle VD de type T et de valeur indéterminée, par réservation d'une nouvelle zone de mémoire ;*
2. *l'affectation à p de l'adresse de cette VD.*



Utilisations

Soit p un pointeur du type $\uparrow T$.

Retenir

Si p repère une VD, cette variable est notée $*p$.

la VD de type T et de valeur v repérée par p est notée $*p$

Toutes les opérations licites sur les variables et les valeurs de type T sont licites sur la variable $*p$ et la valeur $*p$.

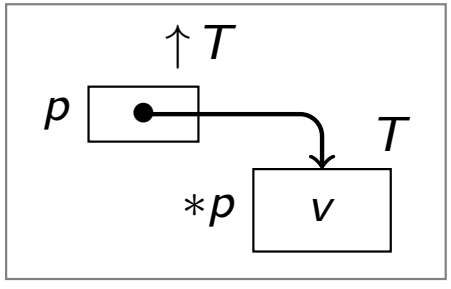
Utilisations

Soit p un pointeur du type $\uparrow T$.

Retenir

Si p repère une VD, cette variable est notée $*p$.

la VD de type T et de valeur v repérée par p est notée $*p$



Toutes les opérations licites sur les variables et les valeurs de type T sont licites sur la variable $*p$ et la valeur $*p$.

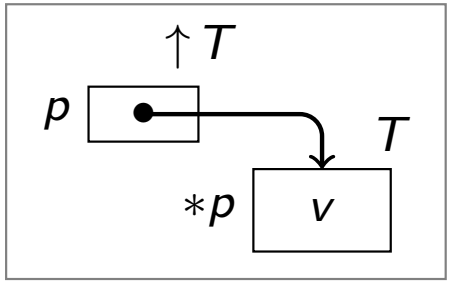
Utilisations

Soit p un pointeur du type $\uparrow T$.

Retenir

Si p repère une VD, cette variable est notée $*p$.

la VD de type T et de valeur v repérée par p est notée $*p$



Toutes les opérations licites sur les variables et les valeurs de type T sont licites sur la variable $*p$ et la valeur $*p$.

Durée de vie d'une VD

Une VD existe de l'instant où elle a été créée à la fin de l'exécution du programme, sauf si elle est explicitement désallouée.

Retenir

*Si le pointeur p repère une VD, l'**action de désallocation explicite***

désallouer(p)

met fin à l'existence de la VD $*p$ et rend disponible l'espace mémoire qu'elle occupait.

Après l'action de désallocation, la valeur de p est **indéterminée**.

Durée de vie d'une VD

Une VD existe de l'instant où elle a été créée à la fin de l'exécution du programme, sauf si elle est explicitement désallouée.

Retenir

*Si le pointeur p repère une VD, l'**action de désallocation explicite***

désallouer(p)

met fin à l'existence de la VD $*p$ et rend disponible l'espace mémoire qu'elle occupait.

Après l'action de désallocation, la valeur de p est **indéterminée**.

Durée de vie d'une VD

Une VD existe de l'instant où elle a été créée à la fin de l'exécution du programme, sauf si elle est explicitement désallouée.

Retenir

*Si le pointeur p repère une VD, l'**action de désallocation explicite***

désallouer(p)

met fin à l'existence de la VD ∗p et rend disponible l'espace mémoire qu'elle occupait.

Après l'action de désallocation, la valeur de p est **indéterminée**.

Durée de vie d'une VD

Une VD existe de l'instant où elle a été créée à la fin de l'exécution du programme, sauf si elle est explicitement désallouée.

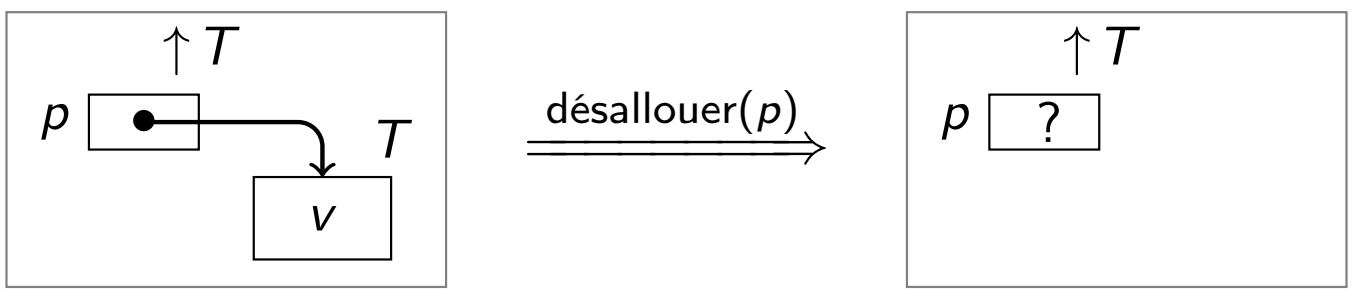
Retenir

*Si le pointeur p repère une VD, l'**action de désallocation explicite***

désallouer(p)

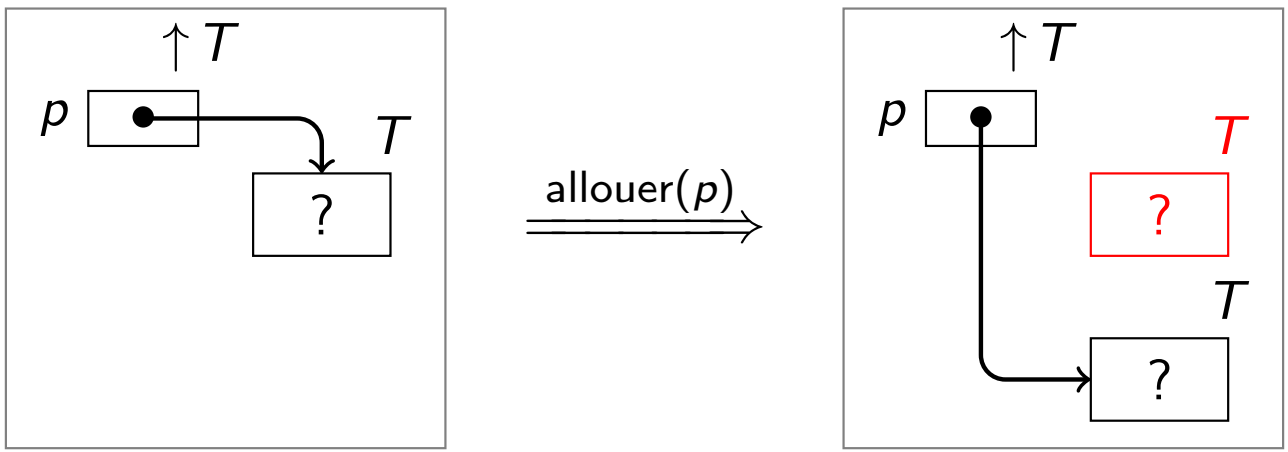
met fin à l'existence de la VD ∗p et rend disponible l'espace mémoire qu'elle occupait.

Après l'action de désallocation, la valeur de p est **indéterminée**.



Double allocation, fuite de mémoire

Attention à ne pas perdre l'accès aux VDs : par exemple, si on exécute deux allouer(p) à la suite, on ne peut plus accéder à la première VD allouée :



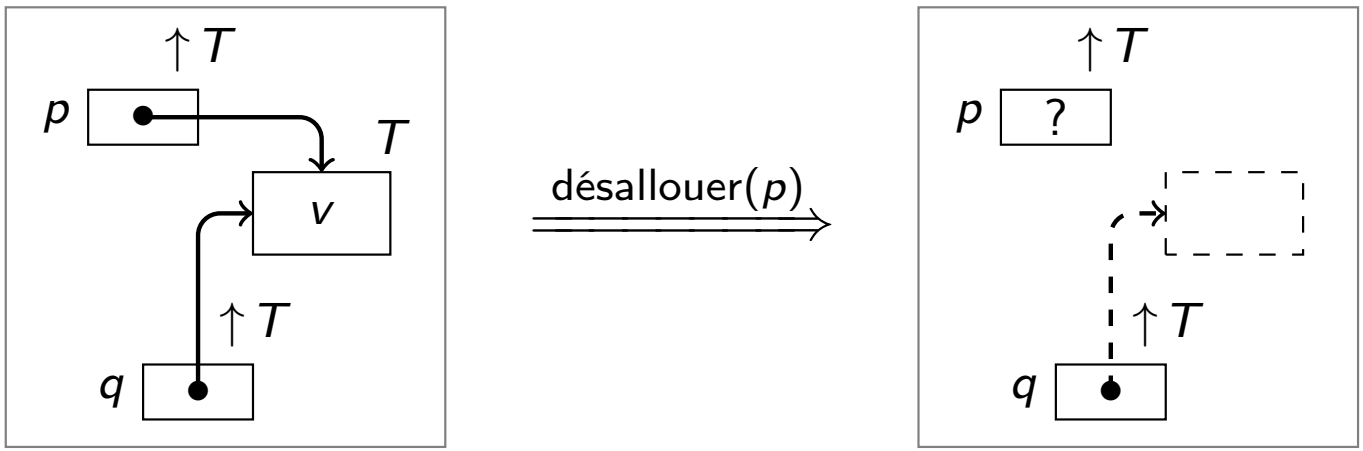
S'il n'existe pas d'autre pointeur dessus, la mémoire de la VD en rouge est perdue !

Note : certain langage (Java, Python, ...) utilise un composant particulier appelé **ramasse miettes** (Garbage Collector en anglais) pour récupérer la mémoire ainsi perdue.

Double pointeur et désallocation

Attention aux **références fantômes** !

À la suite de l'exécution de l'action désallouer(p), la valeur des éventuels autres pointeurs qui repéraient $*p$ est indéfinie.

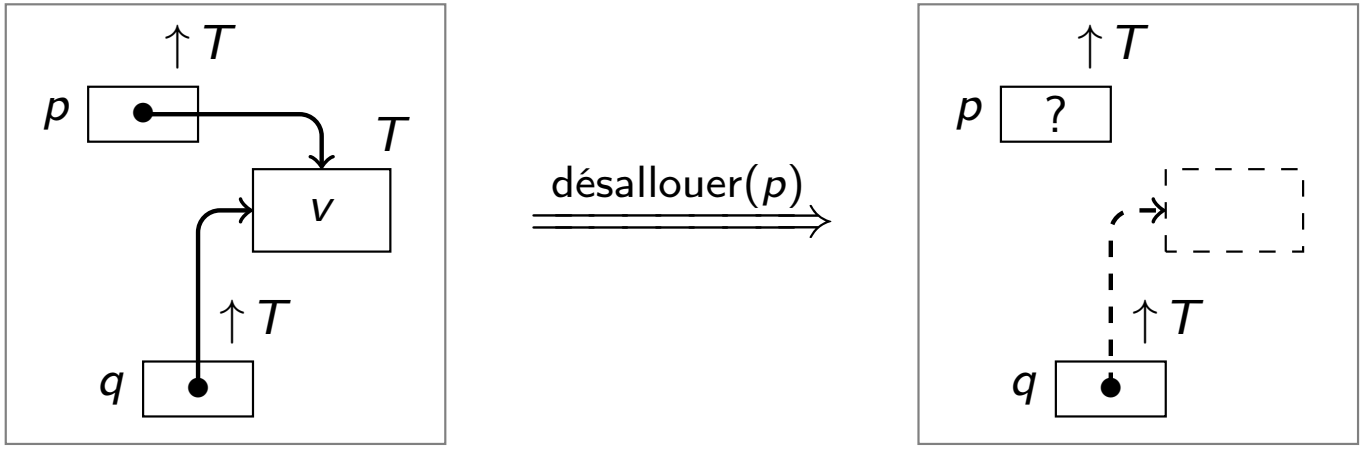


Chacune de ces valeurs constitue une référence au « fantôme » d'une VD.

Double pointeur et désallocation

Attention aux **références fantômes** !

À la suite de l'exécution de l'action désallouer(p), la valeur des éventuels autres pointeurs qui repéraient $*p$ est indéfinie.



Chacune de ces valeurs constitue une référence au « fantôme » d'une VD.

Variable dynamique en C

Retenir

- *Déclaration d'un pointeur* `p` *de type* ↑`T` *:* `T *p;`
- *Allocation d'une VD pointée par p :*

```
p = (T *) malloc(sizeof(T));
```

note : en cas d'échec de l'allocation `malloc` *retourne* `NULL`.

- *Accès à la VD et à sa valeur :*

```
*p = ...;      ... = (*p) + 1;
```

- *Désallocation de la VD pointée par* `p` *:*

```
free(p);
```

Les pointeurs en C

Retenir

Tout type de pointeur

- *supporte l'opération d'affectation =*
- *peux être utilisé comme type de retour d'une fonction*
- *Note : ajout d'un pointeur à un entier (en cas de variable dynamique multiple ; tableau)*

Pour deux pointeurs de même type :

- *test d'égalité ==, de différence* `!=`
- *Note : comparaison <,<=,>,>= (en cas de variable dynamique multiple ; tableau)*

Le programme :

```
char *p, *q

p  = (char *) malloc(sizeof(char));
*p = 'A';
q  = (char *) malloc(sizeof(char));
*q = 'B';
*p = *q;
printf("%i, %i\n", p == q, *p == *q);
```

affiche :

```
0, 1
```

Le programme :

```
char *p, *q

p  = (char *) malloc(sizeof(char));
*p = 'A';
q  = (char *) malloc(sizeof(char));
*q = 'B';
*p = *q;
printf("%i, %i\n", p == q, *p == *q);
```

affiche :

```
0, 1
```

Le programme :

```
char *p, *q

p  = (char *) malloc(sizeof(char));
*p = 'A';
q  = (char *) malloc(sizeof(char));
*q = 'B';
*p = *q;
printf("%i, %i\n", p == q, *p == *q);
```

affiche :

```
0, 1
```

Cas des langages objets avec désallocation automatique

Exemple : Java, Python, ...

- type de base : (`int, float`)
- autres types : objet, tableau...

Retenir

Sauf pour les types de base,

- *variables = **référence** = pointeurs cachés sur var. dyn.*
- *allocation avec la commande `new`*
- *désallocation automatique si plus aucune référence*
- *pas accès à l'adresse, **déréférencement automatique***
- *objet `Null` ou `None` = pointeur invalide*
- *pas d'appel de méthode sur `Null`*

Passage de paramètres

Retenir

Tous les paramêtres (type de base, objets, tableaux, ...), sont passés ***par valeur****.*

Sauf pour types de base (`int`, `float`), les valeurs sont des ***références****.*

ATTENTION : Souvent confondu avec un passage par référence. C'est FAUX !
Explication : si l'on réalloue la variable, la réallocation est faite sur la copie locale, la variable du programme appelant n'est pas modifiée.

Passage de paramètres

Retenir

Tous les paramêtres (type de base, objets, tableaux, ...), sont passés ***par valeur****.*

Sauf pour types de base (`int`, `float`), les valeurs sont des ***références****.*

ATTENTION : Souvent confondu avec un passage par référence. C'est FAUX !
Explication : si l'on réalloue la variable, la réallocation est faite sur la copie locale, la variable du programme appelant n'est pas modifiée.

Exemple en Java

```
public class RefDemo {

    public static void changeContenu(int[] ar, int v) {
                    // Si l'on modifie le contenu de arr...
        ar[0] = v;  // ça change le contenu du tableau dans main.
    }

    public static void changeRef(int[] ar, int v) {
        ar = new int[2];  // Si l'on modifie la référence arr...
        ar[0] = v;        // ça ne change pas le contenu du tableau dans main.
    }

    public static void main(String[] args) {
        int [] arr = new int[2];
        arr[0] = 4;
        arr[1] = 5;
        int [] arr_pas_copy = arr;       // arr et arr_pas_copy se réfère au même tableau

        changeContenu(arr, 10);
        System.out.println(arr[0]);      // Affiche 10..

        changeContenu(arr_pas_copy, 15); // modifie arr_pas_copy, affiche arr
        System.out.println(arr[0]);      // Affiche 15..

        changeRef(arr, 12);              // changement de la référence dans la fonction pas reporté ici.
        System.out.println(arr[0]);      // Affiche encore 15..
    }

}
```

Variables structurées, enregistrements

type structuré

Il est souvent pratique de regrouper logiquement plusieurs variables en une seule variable composée. On parle alors de structure ou d'enregistrement.

Retenir

*Un **type enregistrement** ou **type structuré** est un type T de variable v obtenu en juxtaposant plusieurs variables $v_1, v_2, \ldots$ ayant chacune un type $T_1, T_2, \ldots$*

- *les différentes variables v_i sont appelées **champs** de v*
- *elles sont repérées par un **identificateur de champ***
- *si v est une variable de type structuré T possédant le champ ch, alors la variable $v.ch$ est une variable comme les autres :*

  (type, adresse, valeur)

Les types structurés en algorithmique

Syntaxe

Déclaration de type structuré :

```
nom_de_type = structure:
    nom_du_champ_1 : type_du_champ_1;
    nom_du_champ_2 : type_du_champ_2;
    ...
```

Déclaration de variable structurée :

```
v: nom_de_type;
```

Les types structurés en C

Syntaxe

Déclaration de type structuré :

```
struct nom_de_struct {
  nom_du_champ_1 : type_du_champ_1;
  nom_du_champ_2 : type_du_champ_2;
  ...
};
```

Déclaration de variable structurée :

```
struct nom_de_struct v;
```

Ou avec une définition de type :

```
typedef struct nom_de_struct nom_type;
nom_type v;
```

Exemple de déclaration de type structuré

```
struct s_date {
  char nom_jour[9]; // lundi, mardi, ..., dimanche
  int num_jour;     // 1, 2, ..., 31
  int mois;         // 1, 2, ..., 12
  int annee;
}

struct s_date date = {"vendredi", 21, 10, 2011};
```

Utilisation des types structurés

On suppose déclarées des variables v, w d'un type structuré.

On dispose donc de variables

`v.nom_du_champ_i` de type `type_du_champ_i`

Retenir

Toute opération valide sur une variable de type `type_du_champ_i` *est valide sur* `v.nom_du_champ_i`.

De plus, l'affectation `v = w` *est valide. Elle est équivalente aux affectations*

```
v.nom_du_champ_1 = w.nom_du_champ_1
v.nom_du_champ_2 = w.nom_du_champ_2
...
```

Coût des accès :

Les champs ont toujours la même taille et sont toujours dans le même ordre.

On calcule donc l'emplacement d'un champ d'une variable en rajoutant une constante (le *Déplacement*) à l'emplacement de la variable.

Retenir

Accès à un champ en temps constant : $O(1)$.

Langages Objets

Retenir

Les objets sont des structures avec,

- *une syntaxe particulière pour l'appel de fonction*
- *des mécanismes de contrôle de type et de réutilisation de code amélioré (Héritage)*

En conséquence,

- *Accès à un attribut en temps constant : $O(1)$.*
- *Appel de méthode en temps constant (hors coût des copies si passage de paramètre par valeur).*

Langages Objets : cas de JAVA

Retenir

En JAVA, comme toutes les valeurs sont des références, le coût d'un passage de paramêtre est le coût de la copie d'une référence (ie : pointeur = adresse) : $O(1)$.

Notion d'invariant de structure/classe

Définition

*Ensemble des **règles** qui définissent si un objet d'une classe est dans un état **valide***

- ***mise en place** par les constructeurs publiques*
- ***supposé valide en entrée** de chaque méthode publique*
- *peut être **cassé en cours** de méthode*
- *doit être **restauré en sortie** de chaque méthode publique*

Que mettre dans les invariants :

- plage de valeurs pour certains attributs
- allocation de portion de mémoire
- cohérence entre les différents attributs

Notion d'invariant de structure/classe (2)

Exemples :

- liste triée
- largeur == longueur pour un carré
- pour une classe chaîne, emplacement mémoire alloués et dernier élément égal à `'\0'`
- le dénominateur d'un nombre rationnel ne sera jamais nul

Retenir (Comment écrire les invariants :)

- *dans les commentaires pour la maintenance du code*
- *par des assertions dans le code*
- *formalisation : **programmation par contrat***

Notion d'invariant de structure/classe (2)

Exemples :

- liste triée
- largeur == longueur pour un carré
- pour une classe chaîne, emplacement mémoire alloués et dernier élément égal à `'\0'`
- le dénominateur d'un nombre rationnel ne sera jamais nul

Retenir (Comment écrire les invariants :)

- *dans les commentaires pour la maintenance du code*
- *par des assertions dans le code*
- *formalisation : **programmation par contrat***

Contrexemple

Les énoncés suivants sont de mauvais invariants :

- «la valeur est petite»
  pas une affirmation logique : trop vague

- «la valeur ne diminue jamais»
  même si c'est vrai, ça ne dit par si l'objet est à un instant t dans un état correct

- «la valeur est un entier»
  inutile, si le système de typage l'affirme déjà

Contrexemple

Les énoncés suivants sont de mauvais invariants :

- «la valeur est petite»
  pas une affirmation logique : trop vague

- «la valeur ne diminue jamais»
  même si c'est vrai, ça ne dit par si l'objet est à un instant t dans un état correct

- «la valeur est un entier»
  inutile, si le système de typage l'affirme déjà

Contrexemple

Les énoncés suivants sont de mauvais invariants :

- «la valeur est petite»
  pas une affirmation logique : trop vague

- «la valeur ne diminue jamais»
  même si c'est vrai, ça ne dit par si l'objet est à un instant t dans un état correct

- «la valeur est un entier»
  inutile, si le système de typage l'affirme déjà

Exemple d'invariant : tableau dynamique

Attributs :

- size : entier
- capacite : entier
- tab : tableau d'éléments `elem`

Exemple (Invariants de tableau dynamique :)

- $0 \leq$ size $\leq$ capacite
- tab alloué de taille capacite
- pour $0 \leq i <$ size, l'élement tab[i] est initialisés
- pour size $\leq i <$ capacite, alors tab[i] $=$ `NULL`

C++ bitset :

```
*  It is a class invariant that _Nw will be nonnegative.
*  It is a class invariant that those unused bits are always zero.
```

Java : LinkedList.java

```
* Invariant: (first == null && last == null) ||
*            (first.prev == null && first.item != null)

* Invariant: (first == null && last == null) ||
*            (last.next == null && last.item != null)
```

Java : HashMap.java

```
/**
 * Recursive invariant check
 */
static <K,V> boolean checkInvariants(TreeNode<K,V> t) {
    TreeNode<K,V> tp = t.parent, tl = t.left, tr = t.right,
        tb = t.prev, tn = (TreeNode<K,V>)t.next;
    if (tb != null && tb.next != t)                          return false;
    if (tn != null && tn.prev != t)                          return false;
    if (tp != null && t != tp.left && t != tp.right)         return false;
    if (tl != null && (tl.parent != t || tl.hash > t.hash))  return false;
    if (tr != null && (tr.parent != t || tr.hash < t.hash))  return false;
    if (t.red && tl != null && tl.red && tr != null && tr.red) return false;
    if (tl != null && !checkInvariants(tl))                  return false;
    if (tr != null && !checkInvariants(tr))                  return false;
    return true;
}
```

C++ DeQueue :

```
*  Class invariants:
* - For any nonsingular iterator i:
*    - i.node points to a member of the %map array.        [...]
*    - i.first == *(i.node)    (This points to the node (first Tp element).)
*    - i.last  == i.first + node_size
*    - i.cur is a pointer in the range [i.first, i.last).  [...]
* - Start and Finish are always nonsingular iterators.     [...]
* - For every node other than start.node and finish.node, every
* element in the node is an initialized object.  If start.node ==
* finish.node, then [start.cur, finish.cur) are initialized
* objects, and the elements outside that range are uninitialized
* storage.  Otherwise, [start.cur, start.last) and [finish.first,
* finish.cur) are initialized objects, and [start.first, start.cur)
* and [finish.cur, finish.last) are uninitialized storage.
* - [%map, %map + map_size) is a valid, non-empty range.
* - [start.node, finish.node] is a valid range contained within
*   [%map, %map + map_size).
* - A pointer in the range [%map, %map + map_size) points to an allocated
*   node if and only if the pointer is in the range
*   [start.node, finish.node].
```

Structures linéaires : les listes chaînées

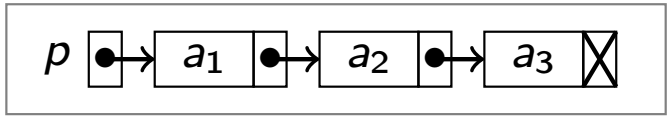
Idée

Une variable dynamique peut elle même être ou contenir un pointeur !

Chaînages dynamiques

Listes Dynamiques simplement chaînées (LDSC)

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



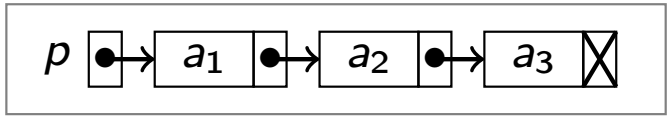
Dans le schéma, trois types sont à distinguer :

- le type des éléments de la suite :
- le type des pointeurs :
- le type des éléments de la liste dynamique, composition des deux types précédents :

Chaînages dynamiques

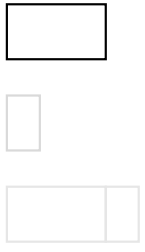
Listes Dynamiques simplement chaînées (LDSC)

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



Dans le schéma, trois types sont à distinguer :

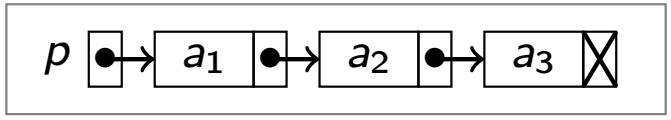
- le type des éléments de la suite :
- le type des pointeurs :
- le type des éléments de la liste dynamique, composition des deux types précédents :



Chaînages dynamiques

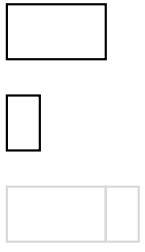
Listes Dynamiques simplement chaînées (LDSC)

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



Dans le schéma, trois types sont à distinguer :

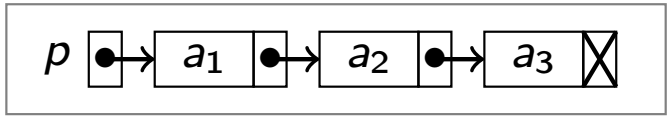
- le type des éléments de la suite :
- le type des pointeurs :
- le type des éléments de la liste dynamique, composition des deux types précédents :



Chaînages dynamiques

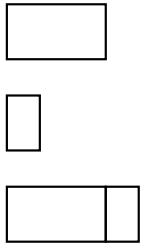
Listes Dynamiques simplement chaînées (LDSC)

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



Dans le schéma, trois types sont à distinguer :

- le type des éléments de la suite :
- le type des pointeurs :
- le type des éléments de la liste dynamique, composition des deux types précédents :



Déclaration des types cellule et liste

Soit `element` le type des éléments de la suite.

Retenir

Une liste chaînée est obtenue à partir du type cellule définie par

```
cellule = structure:
    val: element
    next : ^cellule
liste = ^cellule
```

En C :

```
struct s_cell
{
  element val;
  struct s_cell * next;
};
typedef struct s_cell cell;  // Cellule
typedef struct s_cell *list; // Liste Chaînée
```

Déclaration des types cellule et liste

Soit `element` le type des éléments de la suite.

Retenir

Une liste chaînée est obtenue à partir du type cellule définie par

```
cellule = structure:
    val: element
    next : ^cellule
liste = ^cellule
```

En C :

```
struct s_cell
{
  element val;
  struct s_cell * next;
};
typedef struct s_cell cell;  // Cellule
typedef struct s_cell *list; // Liste Chaînée
```

Pointeur et structure

Syntaxe

Accès aux données d'une liste chaînée :

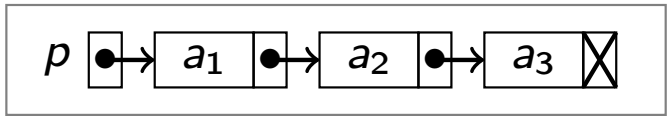
- *VD pointée par* `lst` *:* `*lst`
- *champ* `val` *de* `cell` *:* `cell.val`
- *champ* `val` *de la VD pointée par* `lst` *:*

`(*lst).val` *ou le raccourci* `lst->val`

invalide si `lst` *vaut* `NULL`

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

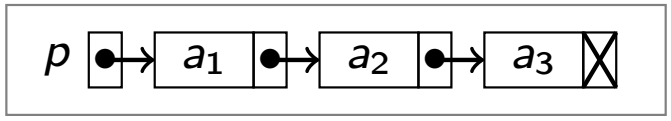
$$p \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{val} = a_1 ;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

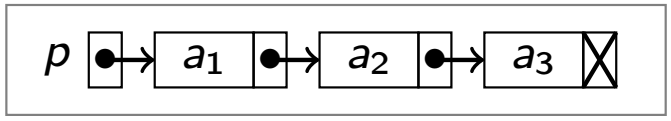
$$p \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{val} = a_1 ;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

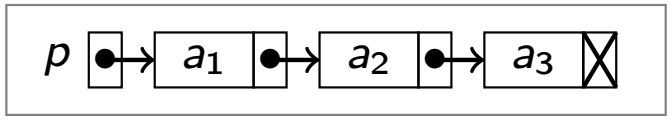
$$p \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{val} = a_1 ;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL} ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3 ;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3 ;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

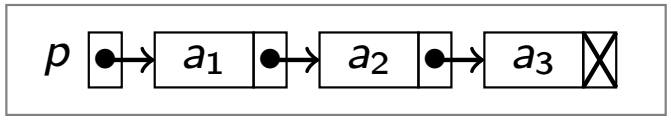
$$p \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{val} = a_1\,;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

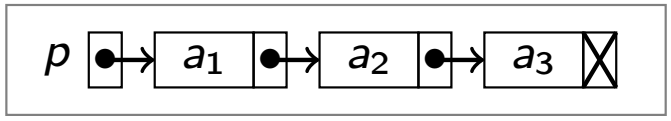
$$p \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{val} = a_1\,;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

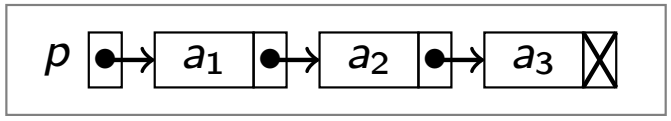
$$p \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{val} = a_1\,;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

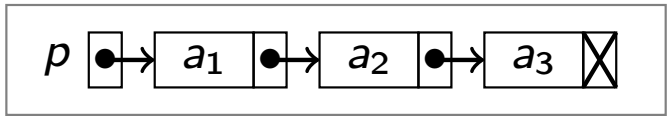
$$p \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{val} = a_1\,;$$
$$p \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{val} = a_2\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \neq \texttt{NULL}\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} = a_3\,;$$
$$p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} = \texttt{NULL}.$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$p(\to \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} = a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,;$$
$$p(\to \text{next})^3 = \texttt{NULL}.$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

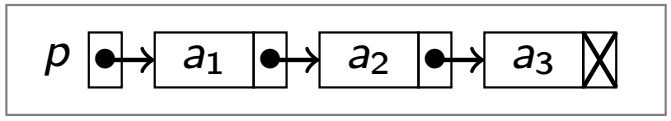
$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^3 &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

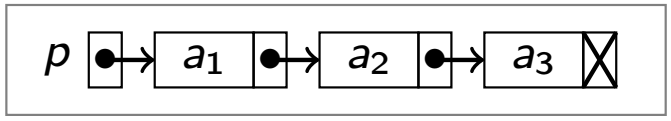
$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{3} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

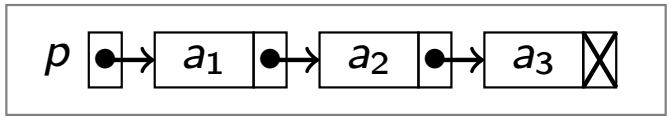
$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^3 &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

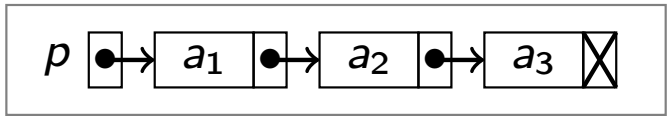
$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{3} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

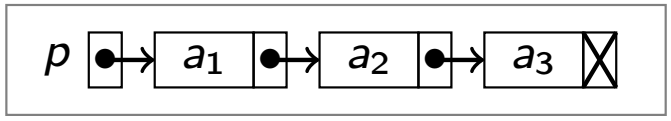
$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^3 &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Revenons à l'exemple schématisé plus haut :

le pointeur p repère la LDSC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$



On a :

$$\begin{aligned} p &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{val} &= a_1\,; \\ p \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{val} &= a_2\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} &\neq \texttt{NULL}\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{val} &= a_3\,; \\ p \to \text{next} \to \text{next} \to \text{next} &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Soit, en convenant de noter « f^p » p répétitions de l'opérateur f :

$$\begin{aligned} p(\to \text{next})^{k-1} &\neq \texttt{NULL}, \quad && \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^{k-1} \to \text{val} &= a_k, && \text{pour } 1 \leq k \leq 3\,; \\ p(\to \text{next})^3 &= \texttt{NULL}. \end{aligned}$$

Deux définitions équivalentes des LDSC

Définition (LDSC définie itérativement)

*La suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ est implantée par la **LDSC** repérée par le pointeur p lorsque :*

- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \rightarrow \text{val} = a_k$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{n} = \texttt{NULL}$.

Définition (LDSC définie récursivement)

*La suite U est implantée par la **LDSC** repérée par le p lorsque :*

- *soit* $U = \langle\rangle$ *et* $p = \texttt{NULL}$;
- *soit U est de la forme $U = \langle a \rangle \cdot V$ avec :*
  - $p \neq \texttt{NULL}$
  - $p \rightarrow \text{val} = a$;
  - *la suite V est implantée par la LDSC pointée par* $p \rightarrow \text{next}$.

Deux définitions équivalentes des LDSC

Définition (LDSC définie itérativement)

La suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ *est implantée par la* ***LDSC*** *repérée par le pointeur* p *lorsque :*

- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \rightarrow \text{val} = a_k$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{n} = \texttt{NULL}$.

Définition (LDSC définie récursivement)

La suite U *est implantée par la* ***LDSC*** *repérée par le* p *lorsque :*

- *soit* $U = \langle\rangle$ *et* $p = \texttt{NULL}$;
- *soit* U *est de la forme* $U = \langle a \rangle \cdot V$ *avec :*
  - $p \neq \texttt{NULL}$
  - $p \rightarrow \text{val} = a$;
  - *la suite* V *est implantée par la LDSC pointée par* $p \rightarrow \text{next}$.

Deux définitions équivalentes des LDSC

Définition (LDSC définie itérativement)

La suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ *est implantée par la* ***LDSC*** *repérée par le pointeur p lorsque :*

- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \neq \texttt{NULL}$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{k-1} \rightarrow \text{val} = a_k$, *pour* $1 \leq k \leq n$
- $p(\rightarrow \text{next})^{n} = \texttt{NULL}$.

Définition (LDSC définie récursivement)

La suite U est implantée par la ***LDSC*** *repérée par le p lorsque :*

- *soit* $U = \langle\rangle$ *et* $p = \texttt{NULL}$ *;*
- *soit U est de la forme* $U = \langle a \rangle \cdot V$ *avec :*
  - $p \neq \texttt{NULL}$
  - $p \rightarrow \text{val} = a$ *;*
  - *la suite V est implantée par la LDSC pointée par* $p \rightarrow \text{next}$.

Les notions sur les suites finies passent aux listes dynamiques qu'elles implantent : longueur, concaténation, position...

Calcul itératif :

```
int longueur(list lst) {
   int  k = 0;
   list q = lst;
   while (q != NULL) {
        q = q->next;  k++;
   }
   return k;
}
```

Calcul récursif :

```
int longueur(list lst) {
   if (lst == NULL) return 0;
   else return 1 + longueur(lst->next);
}
```

Les notions sur les suites finies passent aux listes dynamiques qu'elles implantent : longueur, concaténation, position...

Calcul itératif :

```
int longueur(list lst) {
   int  k = 0;
   list q = lst;
   while (q != NULL) {
        q = q->next;  k++;
   }
   return k;
}
```

Calcul récursif :

```
int longueur(list lst) {
   if (lst == NULL) return 0;
   else return 1 + longueur(lst->next);
}
```

Les notions sur les suites finies passent aux listes dynamiques qu'elles implantent : longueur, concaténation, position...

Calcul itératif :

```
int longueur(list lst) {
   int  k = 0;
   list q = lst;
   while (q != NULL) {
        q = q->next;  k++;
   }
   return k;
}
```

Calcul récursif :

```
int longueur(list lst) {
   if (lst == NULL) return 0;
   else return 1 + longueur(lst->next);
}
```

Définition (mode de programmation constructif)

*Dans le mode de programmation **constructif** (ou **pure**), les opérations laissent intacts leurs arguments.*

insertion en tête d'une LDSC, en mode constructif :

au début

à la fin


```
list insertion_en_tete(element x, list lst) {
   list res = alloue_cellule();
   res->val = x;
   res->next = lst;
   return res;
}
```

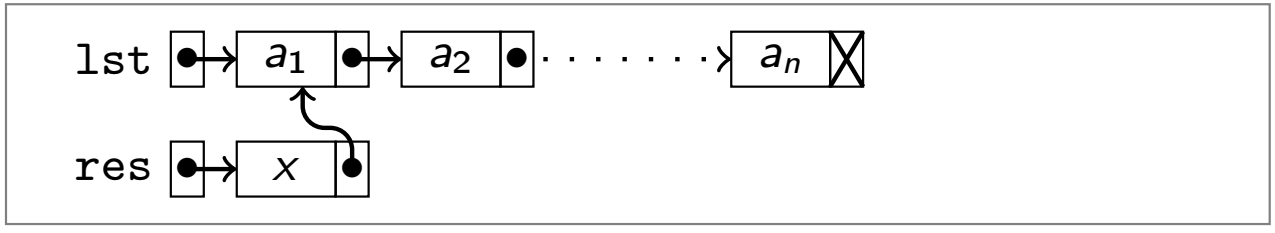
Définition (mode de programmation constructif)

*Dans le mode de programmation **constructif** (ou **pure**), les opérations laissent intacts leurs arguments.*

insertion en tête d'une LDSC, en mode constructif :

au début

à la fin




```
list insertion_en_tete(element x, list lst) {
   list res = alloue_cellule();
   res->val = x;
   res->next = lst;
   return res;
}
```

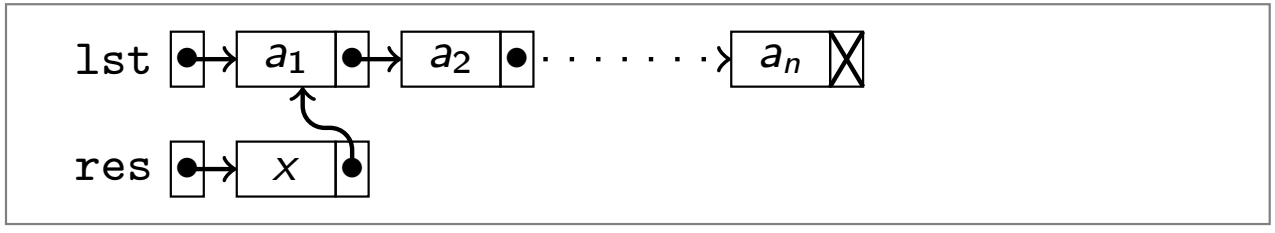
Définition (mode de programmation constructif)

*Dans le mode de programmation **constructif** (ou **pure**), les opérations laissent intacts leurs arguments.*

insertion en tête d'une LDSC, en mode constructif :

au début

à la fin




```
list insertion_en_tete(element x, list lst) {
   list res = alloue_cellule();
   res->val = x;
   res->next = lst;
   return res;
}
```

Définition (mode de programmation mutatif)

*Dans le mode de programmation **mutatif** (ou **avec mutation**), ou **avec modification**), les opérations **modifient** leurs arguments.*
Il faut donc passer un pointeur ou une référence vers l'argument à modifier.

insertion en tête d'une LDSC, en mode mutatif

au début

à la fin


```
void insertion_en_tete(element x, list *plst) {
  list tmp = alloue_cellule();
  tmp->val = x;
  tmp->next = *plst;
  *plst = tmp;
}
```

Définition (mode de programmation mutatif)

*Dans le mode de programmation **mutatif** (ou **avec mutation**), ou **avec modification**), les opérations **modifient** leurs arguments.*
Il faut donc passer un pointeur ou une référence vers l'argument à modifier.

insertion en tête d'une LDSC, en mode mutatif

au début

à la fin

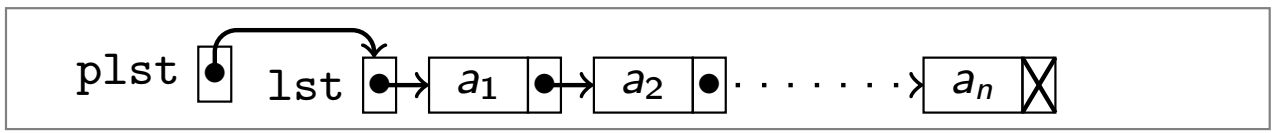

```
void insertion_en_tete(element x, list *plst) {
  list tmp = alloue_cellule();
  tmp->val = x;
  tmp->next = *plst;
  *plst = tmp;
}
```

Définition (mode de programmation mutatif)

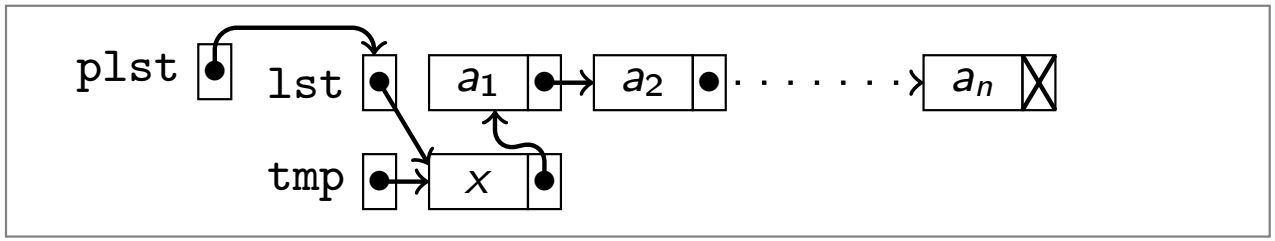
*Dans le mode de programmation **mutatif** (ou **avec mutation**), ou **avec modification**), les opérations **modifient** leurs arguments.*
Il faut donc passer un pointeur ou une référence vers l'argument à modifier.

insertion en tête d'une LDSC, en mode mutatif

au début



à la fin



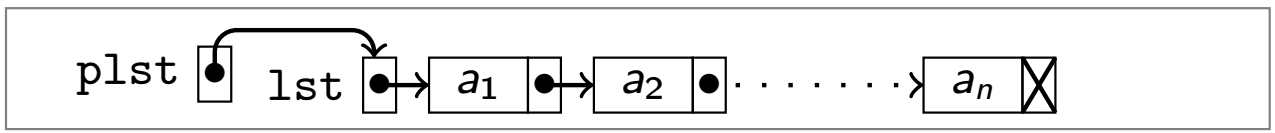

```
void insertion_en_tete(element x, list *plst) {
   list tmp = alloue_cellule();
   tmp->val = x;
   tmp->next = *plst;
   *plst = tmp;
}
```

Définition (mode de programmation mutatif)

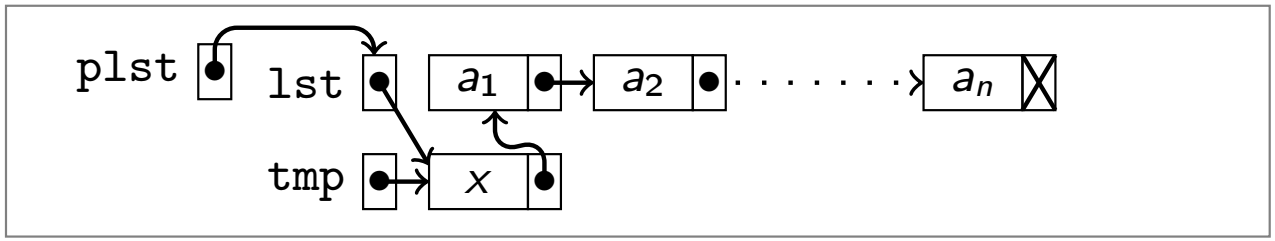
*Dans le mode de programmation **mutatif** (ou **avec mutation**), ou **avec modification**), les opérations **modifient** leurs arguments.*
Il faut donc passer un pointeur ou une référence vers l'argument à modifier.

insertion en tête d'une LDSC, en mode mutatif

au début



à la fin

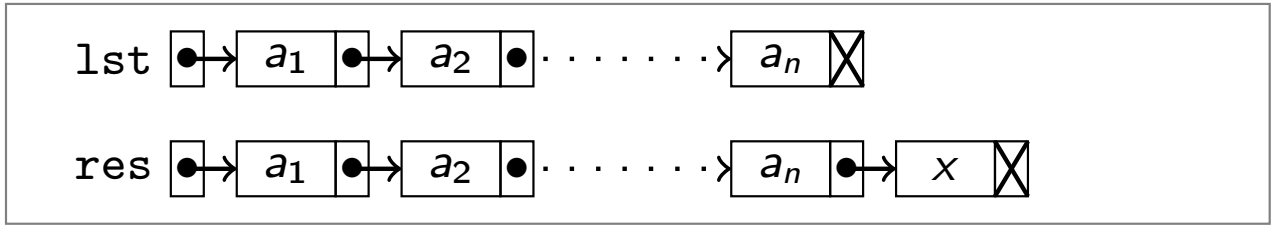



```
void insertion_en_tete(element x, list *plst) {
   list tmp = alloue_cellule();
   tmp->val = x;
   tmp->next = *plst;
   *plst = tmp;
}
```

insertion en queue d'une LDSC, constructive, récursive

au début

à la fin

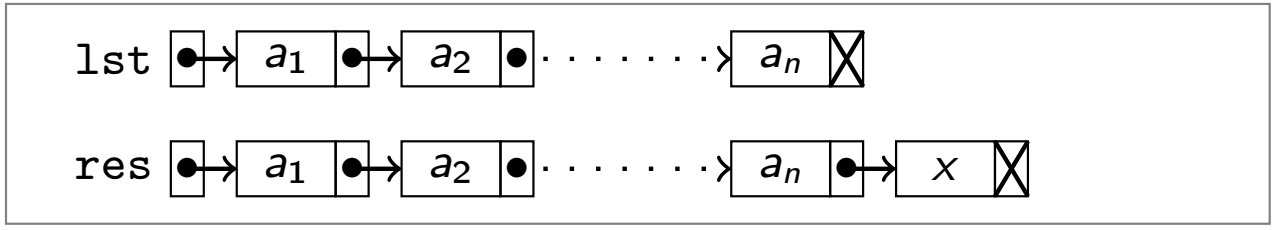



```
list insertion_en_queue(element x, list lst) {
   list res = alloue_cellule();
   if (lst == NULL) {
      res->val = x; res->next = NULL;
      return res;
   } else {
      res->val = lst->val;
      res->next = insertion_en_queue(x, lst->next);
      return res
   }
}
```

insertion en queue d'une LDSC, constructive, récursive

au début

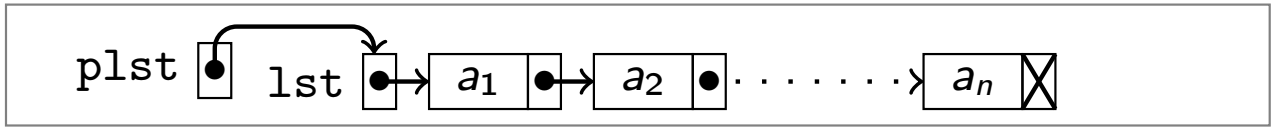
à la fin



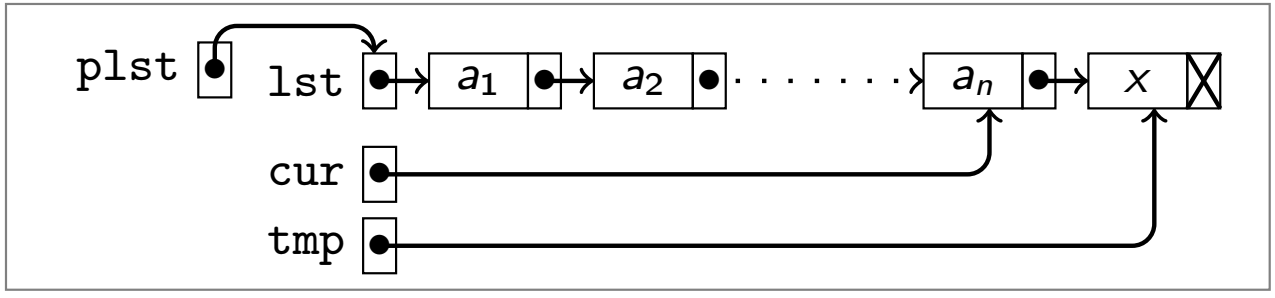

```
list insertion_en_queue(element x, list lst) {
   list res = alloue_cellule();
   if (lst == NULL) {
      res->val = x; res->next = NULL;
      return res;
   } else {
      res->val = lst->val;
      res->next = insertion_en_queue(x, lst->next);
      return res
   }
}
```

insertion en queue d'une LDSC, mutative, itérative

au début



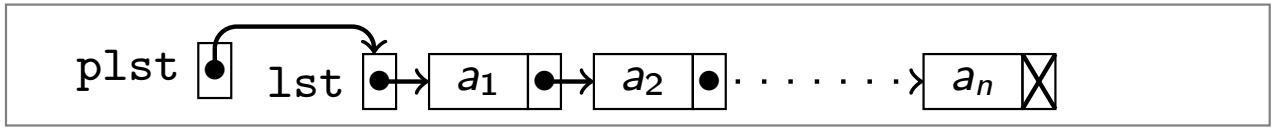
à la fin



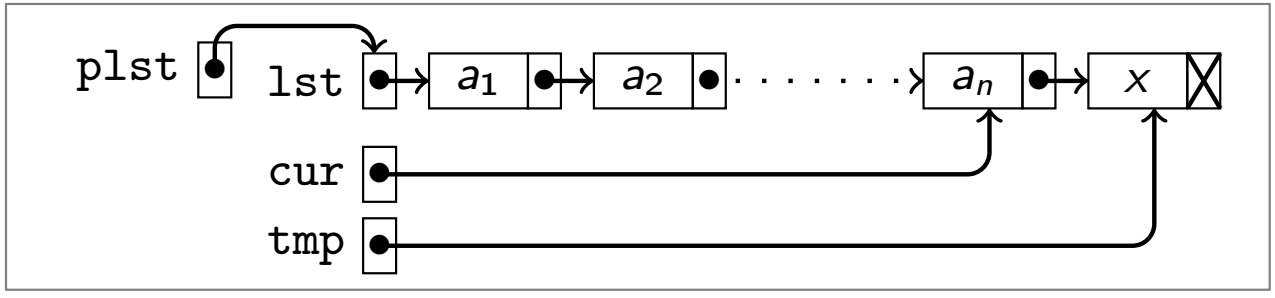

```
void insertion_en_queue(element x, list *plst) {
   list tmp = alloue_cellule();
   tmp->val = x; tmp->next = NULL;
   if (*plst == NULL) *plst = tmp;
   else {
     list cur = *plst;
     while (cur->next != null) cur = cur->next;
     cur->next = tmp;
   }
}
```

insertion en queue d'une LDSC, mutative, itérative

au début



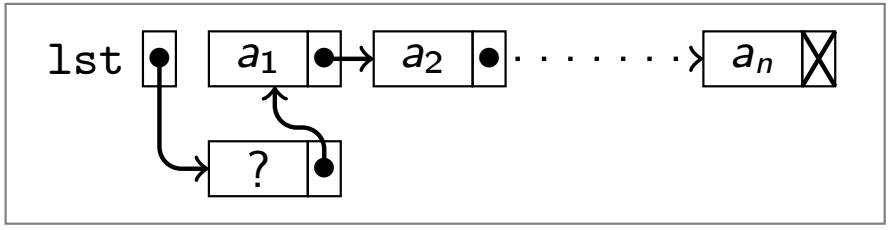
à la fin




```
void insertion_en_queue(element x, list *plst) {
   list tmp = alloue_cellule();
   tmp->val = x; tmp->next = NULL;
   if (*plst == NULL) *plst = tmp;
   else {
     list cur = *plst;
     while (cur->next != null) cur = cur->next;
     cur->next = tmp;
   }
}
```

Technique : LDSC avec une fausse tête

le pointeur p repère la LDSC avec une fausse tête qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

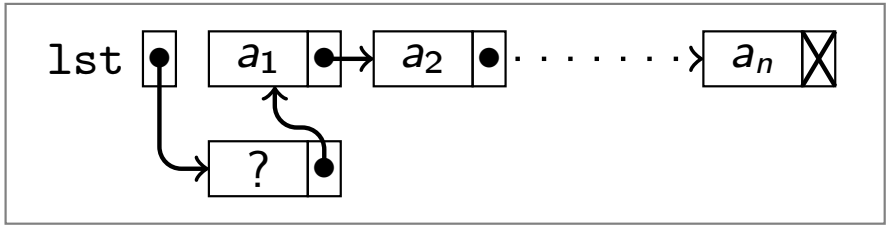


Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- évite d'avoir à distinguer les cas de l'élément de tête ou de la liste vide dans les opérations d'insertion et de suppression.

Technique : LDSC avec une fausse tête

le pointeur p repère la LDSC avec une fausse tête qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

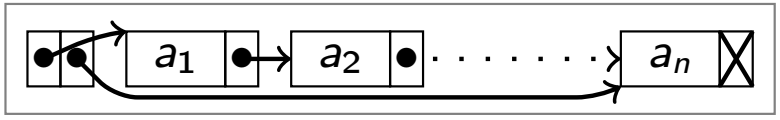


Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- évite d'avoir à distinguer les cas de l'élément de tête ou de la liste vide dans les opérations d'insertion et de suppression.

Technique : LDSC avec pointeurs de tête et de queue

pointeurs repérant
respectivement la tête et la
queue de la LDSC qui implante
la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$



Intérêts :

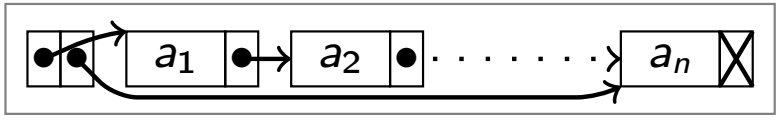
- en mode avec mutation ;
- ajout en queue sans parcours de la LDSC ;
- concaténation sans parcours des LDSC.

À définir, après la déclaration du type Liste, par :

```
struct s_list_tq {
    struct s_cell *first, *last;
}
```

Technique : LDSC avec pointeurs de tête et de queue

pointeurs repérant
respectivement la tête et la
queue de la LDSC qui implante
la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$



Intérêts :

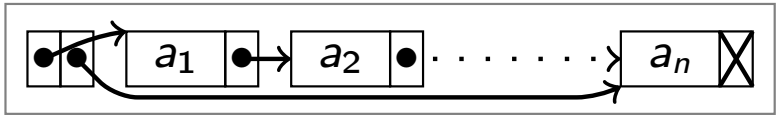
- en mode avec mutation ;
- ajout en queue sans parcours de la LDSC ;
- concaténation sans parcours des LDSC.

À définir, après la déclaration du type Liste, par :

```
struct s_list_tq {
    struct s_cell *first, *last;
}
```

Technique : LDSC avec pointeurs de tête et de queue

pointeurs repérant
respectivement la tête et la
queue de la LDSC qui implante
la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$



Intérêts :

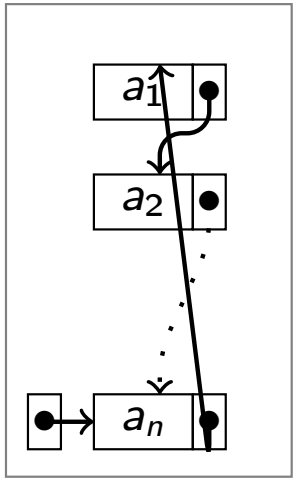
- en mode avec mutation ;
- ajout en queue sans parcours de la LDSC ;
- concaténation sans parcours des LDSC.

À définir, après la déclaration du type Liste, par :

```
struct s_list_tq {
    struct s_cell *first, *last;
}
```

Technique : LDSC circulaire

pointeur repérant la queue de la LDSC circulaire qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

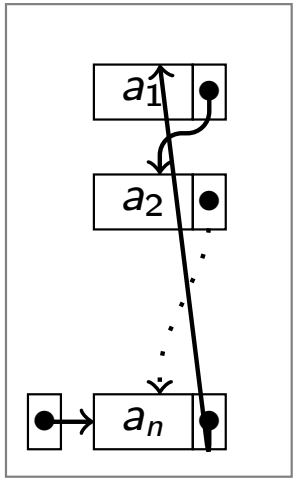


Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- ajout en queue et suppression en tête sans parcours de la LDSC ;
- concaténation sans parcours des LDSC.

Technique : LDSC circulaire

pointeur repérant la queue de la LDSC circulaire qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

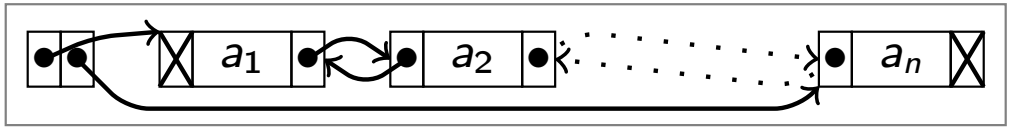


Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- ajout en queue et suppression en tête sans parcours de la LDSC ;
- concaténation sans parcours des LDSC.

Listes dynamiques doublement chaînées (LDDC)

pointeurs repérant respectivement la tête et la queue de la LDDC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$

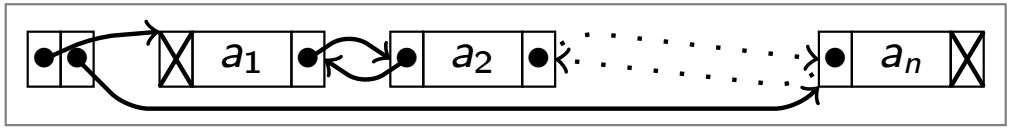


Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- marches avant et arrière ;
- ajout en queue et suppression en tête sans parcours de la LDDC ;
- concaténation sans parcours des LDDC.

Listes dynamiques doublement chaînées (LDDC)

pointeurs repérant respectivement la tête et la queue de la LDDC qui implante la suite $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$



Intérêts :

- en mode avec mutation ;
- marches avant et arrière ;
- ajout en queue et suppression en tête sans parcours de la LDDC ;
- concaténation sans parcours des LDDC.

Listes dynamiques doublement chaînées (LDDC) (2)

La structure peut être déclarée par :

```
struct s_cell
{
  element val;
  struct s_cell * next;
  struct s_cell * prev;
};

struct s_lddc
{
  struct s_cell * first;
  struct s_cell * last;
};
```

Une implémentation en Java

Voir le code complet

Retenir

Nous utiliserons trois classes

- *`class RefCell<Elem>` modélise une référence sur une cellule avec un unique attribut `Cell<Elem> next`*
- *`class Cell<Elem>` modélise une cellule, étend la classe `RefCell` avec un attribut `Elem value`*
- *`class LinkedList<Elem>` la classe représentant une liste chaînée avec un attribut `RefCell<Elem> start` qui représente la position en tête de liste.*

Note : la séparation entre les classes `RefCell` et `Cell` est essentiellement à but pédagogique et n'est pas implantée en général.

Une implémentation en Java (2)

```
1   public class LinkedList<Elem> {
2       static class RefCell<Elem> {
3           public Cell<Elem> next;
4           public RefCell() [...];
5       }
6       static class Cell<Elem> extends RefCell<Elem> {
7           public Elem value;
8           public Cell(Elem value, Cell<Elem> next) [...]
9           }
10      }
11      public RefCell<Elem> begin;
12      public LinkedList() [...]
13  }
```

Une implémentation en Java (2)

Remarque

- *Une `Linked list` contient toujours une `RefCell` qui est créé à la construction et n'est jamais modifiée. Elle joue le rôle de la fausse tête ;*
- *Les `RefCell` que l'on trouve dans les cellules d'une liste modélise les positions dans la liste ;*
- *Pour une liste à n éléments, il y a $n+1$ `RefCell`.*

Une implémentation en Java (2)

Remarque

- *Une `Linked list` contient toujours une `RefCell` qui est créé à la construction et n'est jamais modifiée. Elle joue le rôle de la fausse tête ;*
- *Les `RefCell` que l'on trouve dans les cellules d'une liste modélise les positions dans la liste ;*
- *Pour une liste à n éléments, il y a $n+1$ `RefCell`.*

Une implémentation en Java (2)

Remarque

- *Une `Linked list` contient toujours une `RefCell` qui est créé à la construction et n'est jamais modifiée. Elle joue le rôle de la fausse tête ;*
- *Les `RefCell` que l'on trouve dans les cellules d'une liste modélise les positions dans la liste ;*
- *Pour une liste à n éléments, il y a $n+1$ `RefCell`.*

Applications

Implantation des types de données abstraits :

- piles (dernier entré - premier sorti)
- files d'attente (premier entré - premier sorti)
- double-queues
- ensembles, tables d'associations

Algorithmes de retour sur trace, essais/erreurs (backtracking)

Applications

Implantation des types de données abstraits :

- piles (dernier entré - premier sorti)
- files d'attente (premier entré - premier sorti)
- double-queues
- ensembles, tables d'associations

Algorithmes de retour sur trace, essais/erreurs (backtracking)

Application : exemple d'algorithme essais/erreurs

Problème (liste de candidats)

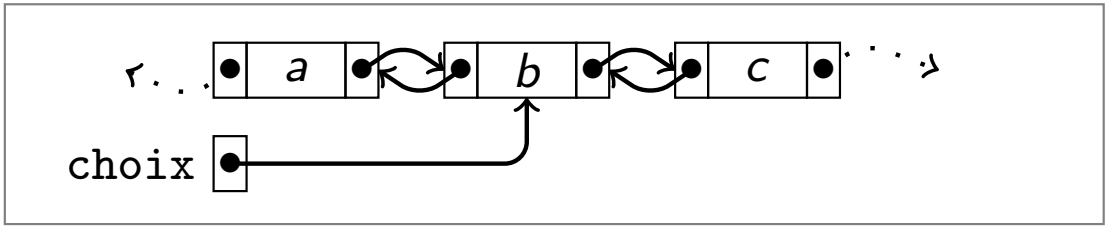
On veux maintenir une **liste ordonnée de candidats**

qui supporte les opérations suivantes :

1. choix d'un candidat avec **suppression** dans la liste (chaque candidat ne peux être choisi qu'une seul fois)
2. retour en arrière par **re-insertion du candidat à sa place** pour choisir un autre candidat

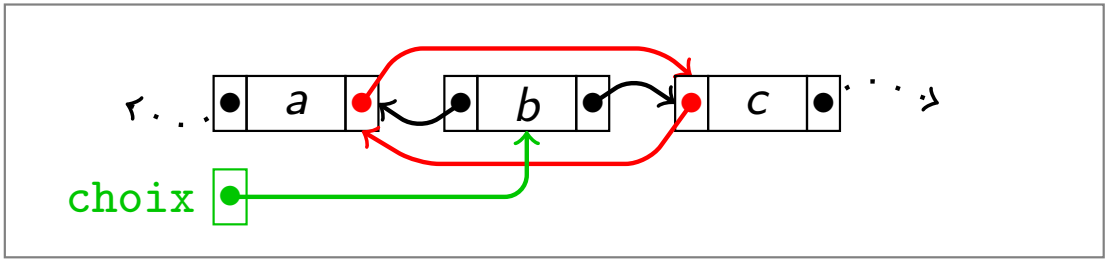
Retour en arrière dans une LDDC

Liste des candidats ; sélection de *b*




```
choix->next->prev = choix->prev;
choix->prev->next = choix->next;
```

Suppression de *b* de la liste

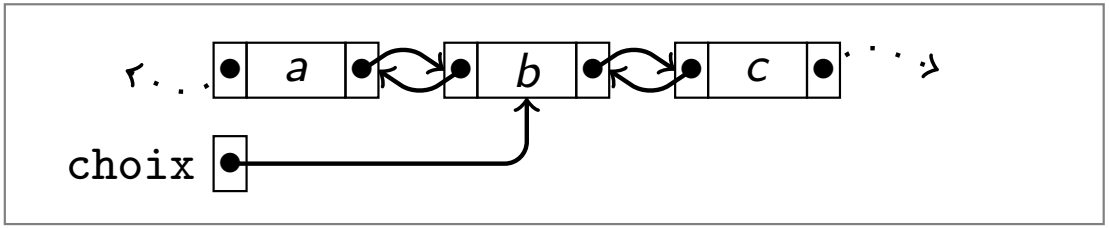


Le pointeur `choix` contient toute l'information nécessaire pour revenir à la position de départ ; il suffit de faire :

```
choix->next->prev = choix;
choix->prev->next = choix;
```

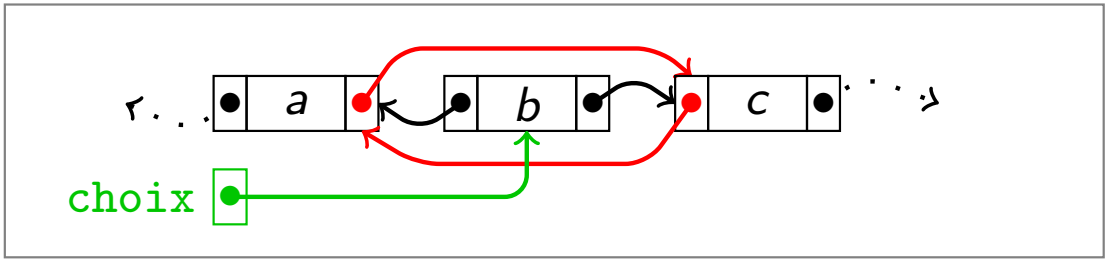
Retour en arrière dans une LDDC

Liste des candidats ; sélection de *b*




```
choix->next->prev = choix->prev;
choix->prev->next = choix->next;
```

Suppression de *b* de la liste



Le pointeur `choix` contient toute l'information nécessaire pour revenir à la position de départ ; il suffit de faire :

```
choix->next->prev = choix;
choix->prev->next = choix;
```

Tables d'associations

Tables d'associations

Définition (table)

*Une **table** est une fonction d'un ensemble d'entrées dans un ensemble de valeurs.*
C'est un objet informatique : il s'agit de ranger une information (valeur) associée à chaque index (entrée), de retrouver l'information à partir de l'index, de la modifier ou de supprimer couple index-information.

Exemple : la table des numéros de département

La table NumDep : Chaine $\to$ Chaine fait correspondre à tout département français son numéro :

- Dom(NumDep) $= \{$“*Ain*“, “*Aisne*“, . . . , “*Yvelines*“$\}$;
- Im(NumDep) $= \{$“01“, . . . , “2*A*“, “2*B*“, . . . , “974“$\}$;
- NumDep(“*Martinique*“) $=$ “972“ ;
- “*Informatique*“ $\notin$ Dom(NumDep). Autrement dit NumDep(“*Informatique*“) n'est pas défini.