Computational types from a logical perspective

P.N. Benton, G.M. Bierman, V.C.V. de Paiva

Mars 1998

Introduction

$$\begin{array}{cl} \lambda ML_T & \text{(Moggi, début 1990)} \\ \downarrow & \\ \text{CL-logique} & \text{(Curry, 1952)} \end{array}$$

λML_T :

- langage fonctionnel incluant des aspects impératifs ;
- λ-calcul simplement typé comportant conjonction, disjonction, et un nouveau constructeur T

Règles de réduction

Règles habituelles, plus :

$$\frac{\Gamma \vdash e : A}{\Gamma \vdash \mathrm{val}(e) : TA} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : TA \qquad \Gamma, x : A \vdash f : TB}{\Gamma \vdash \mathrm{let}\ x \Leftarrow e\ \mathrm{in}\ f : TB}$$

Règles de β-réduction et η-réduction

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.u)v & \rightarrow_\beta & u[v/x] \\
\mathsf{fst}(u, v) & \rightarrow_\beta & u \\
\mathsf{snd}(u, v) & \rightarrow_\beta & v \\
\mathsf{case}\ \mathsf{inl}(e)\mathsf{of}\ \mathsf{inl}(x) \rightarrow f \mid \mathsf{inr}(y) \rightarrow g & \rightarrow_\beta & f[e/x] \\
\mathsf{case}\ \mathsf{inr}(e)\mathsf{of}\ \mathsf{inl}(x) \rightarrow f \mid \mathsf{inr}(y) \rightarrow g & \rightarrow_\beta & g[e/y] \\
\mathsf{let}\ x \Leftarrow \mathsf{val}(u)\ \mathsf{in}\ v & \rightarrow_\beta & v[u/x]
\end{array}
$$

+ η-réduction

Axiomes

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{let}\ x \Leftarrow (\mathsf{val}(e))\ \mathsf{in}\ f & = & f[e/x] \\
\mathsf{let}\ x \Leftarrow e\ \mathsf{in}\ (\mathsf{val}(x)) & = & e \\
\mathsf{let}\ x' \Leftarrow (\mathsf{let}\ x \Leftarrow e\ \mathsf{in}\ f)\ \mathsf{in}\ g & = & \mathsf{let}\ x \Leftarrow e\ \mathsf{in}\ (\mathsf{let}\ x' \Leftarrow f\ \mathsf{in}\ g)
\end{array}
$$

Lemme de substitution

Lemme de substitution :

$$\frac{\Gamma \vdash e : A \qquad \Gamma, x : A \vdash f : B}{\Gamma \vdash f[e/x] : B}$$

Preuve :

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash e : A}{\Gamma \vdash \mathrm{val}(e) : TA} \qquad \Gamma, x : A \vdash f : B}{\Gamma \vdash \mathrm{let}\ x \Leftarrow (\mathrm{val}(e))\ \mathrm{in}\ f : B}$$

+ axiome $\mathrm{let}\ x \Leftarrow (\mathrm{val}(e))\ \mathrm{in}\ f = f[e/x]$

Réduction du sujet

Réduction du sujet :
Si $\Gamma \vdash e : A$ et $e \rightarrow_\beta e'$ alors $\Gamma \vdash e' : A$

Exceptions

$$
\begin{array}{rcl}
T(A) & \longrightarrow & 1 + A \\
\mathsf{val}(e) & \longrightarrow & \mathsf{inr}_{1+A}(e) \\
(\mathsf{let}\ x \Leftarrow e\ \mathsf{in}\ f) & \longrightarrow & \mathsf{case}\ e\ \mathsf{of}\ \mathsf{inl}(*) \rightarrow \mathsf{inl}_{1+A}(*) \mid \mathsf{inr}(x) \rightarrow f
\end{array}
$$

Introduction

Correspondance de Curry-Howard avec :

- $\rightarrow \Leftrightarrow \supset$
- $T \Leftrightarrow \Diamond$

Déduction naturelle

Règles habituelles, plus :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Diamond A}\ \Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Diamond A \qquad \Gamma, A \vdash \Diamond B}{\Gamma \vdash \Diamond B}\ \Diamond_{\mathcal{E}}$$

Calcul des séquents

Règles habituelles, plus :

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Diamond B}{\Gamma, \Diamond A \vdash \Diamond B}\ \Diamond_{\mathcal{L}} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Diamond A}\ \Diamond_{\mathcal{R}}$$

Équivalence (1/3)

Les deux présentations sont équivalentes :

$$\Gamma \vdash_N A \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_S A$$

Preuve :
$\Gamma \vdash_S A \Rightarrow \Gamma \vdash_N A$

Équivalence (2/3)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Diamond A}\ \Diamond_{\mathcal{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \Diamond A}\ \Diamond_{\mathcal{I}}$$

$\hookrightarrow$ évident

Équivalence (3/3)

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Diamond B}{\Gamma, \Diamond A \vdash \Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{L}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash \Diamond A \qquad \Gamma, A \vdash \Diamond B}{\Gamma \vdash \Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E}}$$

$\hookrightarrow$ en effet :

$$\frac{\Gamma \vdash \Diamond A \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Diamond B}{\Gamma, \Diamond A \vdash \Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{L}}}{\Gamma \vdash \Diamond B}\,\mathit{Cut}$$

Introduction

- CL-logique en déduction naturelle : normalisation
- CL-logique en calcul des séquents : élimination des coupures
- $\lambda ML_{\mathcal{T}}$: règles de réduction

But : définir une notion d'égalité entre les preuves.

Élimination des coupures

En déduction naturelle :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\Diamond A}\,\Diamond_{\mathcal{I}} \qquad \Diamond B}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E}} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{matrix}\vdots\\ [A]\\ \vdots\\ \Diamond B\end{matrix}$$

Équivaut à la β-réduction.

Commutation

$$\dfrac{\dfrac{\Diamond A \qquad \Diamond B}{\Diamond B}\,\Diamond_{\mathcal{E}} \qquad \Diamond C}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E}} \quad \longrightarrow \quad \dfrac{\Diamond A \qquad \dfrac{\Diamond B \qquad \Diamond C}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E}}}{\Diamond C}\,\Diamond_{\mathcal{E}}$$

Équivaut à la réduction c.

Règle c

$$\text{let } x' \Leftarrow (\text{let } x \Leftarrow e \text{ in } f) \text{ in } g \quad \rightarrow_c \quad \text{let } x \Leftarrow e \text{ in } (\text{let } x' \Leftarrow f \text{ in } g)$$

$\hookrightarrow$ λ-lifting

Réduction du sujet plus forte

Réduction du sujet :
Si $\Gamma \vdash e : A$ et $e \to_{\beta c} e'$ alors $\Gamma \vdash e' : A$

Propriété

λML_T avec la réduction $\rightarrow_{\beta c}$ est fortement normalisant.
Démonstration : méthode de réduction de Tait.

Preuve (1/3)

- $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$: langages ayant pour règle de réduction $\longrightarrow_1$ et $\longrightarrow_2$.
- On connaît la normalisation forte de $\mathcal{L}_2$.

Il suffit de trouver une traduction :

$$^\circ : \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$$

telle que

$$\forall (e, f) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1,\ e \longrightarrow_1 f \Rightarrow e^\circ \longrightarrow_2^+ f^\circ$$

Preuve (2/3)

Ici :

- $\mathcal{L}_1 = \lambda ML_T$, $\rightarrow_1 = \rightarrow_{\beta c}$
- $\mathcal{L}_2 = \lambda$-calcul simplement typé, $\rightarrow_2 = \rightarrow_{\beta c}$

Lemme (Prawitz, 1971) :
$\mathcal{L}_2$ avec $\rightarrow_2$ est fortement normalisant.

Preuve (3/3)

Traduction :

- sur les types : $(TA)^\circ = 1 + A^\circ$;
- sur les termes :

$$\begin{array}{rcl} (\mathsf{val}(e))^\circ & = & \mathsf{inr}(e^\circ) \\ (\mathsf{let}\ x \Leftarrow e\ \mathsf{in}\ f)^\circ & = & \mathsf{case}\ e^\circ\ \mathsf{of}\ \mathsf{inl}(z) \rightarrow\ \mathsf{inl}(z) \mid \mathsf{inr}(x) \rightarrow f^\circ \end{array}$$

$\hookrightarrow$ lien avec des exceptions.

Introduction des règles

- Connu pour la λ-abstraction, la conjonction et la disjonction.
- Pour T :

$$\dfrac{\dfrac{z : TA, x : A \vdash x : A}{z : TA, x : A \vdash \mathrm{val}(x) : TA}\, T_{\mathcal{R}} \qquad z : TA \vdash z : TA}{z : TA \vdash \mathrm{let}\ x \Leftarrow z\ \mathrm{in}\ \mathrm{val}(x) : TA}\, T_{\mathcal{R}}$$

Donc :

$$\mathrm{let}\ x \Leftarrow z\ \mathrm{in}\ \mathrm{val}(x) \Leftrightarrow z$$

Conclusion

- $\lambda ML_{\mathcal{T}}$ arrive “naturellement” lorsqu’on veut faire apparaître des aspects impératifs.
- On peut donc en déduire une logique, qui est un lien entre logique intuitionniste et logique linéaire.

Des questions ?