

# Dynamique symbolique sur des groupes : une approche informatique

travaux présentés par Nathalie AUBRUN

le vendredi 16 avril 2021 devant le jury composé de

M. Olivier BOURNEZ	(rapporteur)
M. Jérôme BUZZI	
M. Damien GABORIAU	(rapporteur)
Mme Élise JANVRESSE	(présidente)
M. Emmanuel JEANDEL	
Mme Bryna KRA	(rapporteuse)
Mme Anne SIEGEL	

en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches.

The background features a complex diagram of interconnected boxes and lines. At the top, there are three large, light-blue-outlined squares. Below them, a network of green lines connects various smaller boxes. A prominent feature is a large, light-orange-outlined rectangle that encloses a central area containing several vertical, light-blue-outlined rectangles. To the right, another light-purple-outlined rectangle is visible. The overall layout suggests a hierarchical or network structure.

## Dynamique symbolique sur des groupes

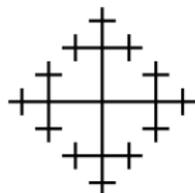
# Espace des configurations

- ▶  $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).

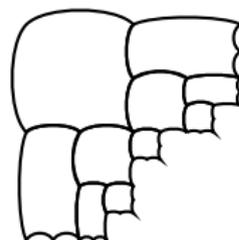
# Espace des configurations

- ▶  $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).

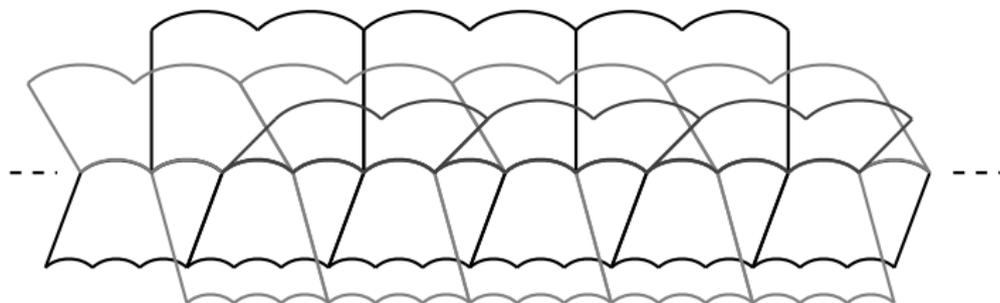
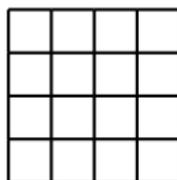
$$\langle a, b | \emptyset \rangle$$



$$\langle a, b | ab^2 = ba^2 \rangle$$



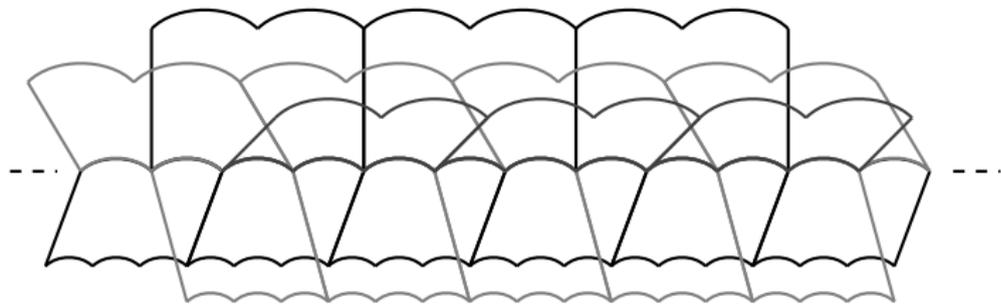
$$\langle a, b | ab = ba \rangle$$



$$\langle a, b | a^2b = ba^3 \rangle$$

# Espace des configurations

- ▶  $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- ▶  $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.

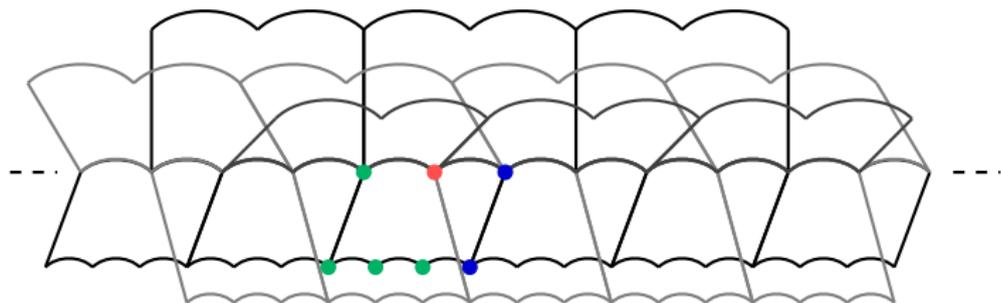


# Espace des configurations

- ▶  $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- ▶  $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.
- ▶ action de  $G$  sur  $A^G$  par **translation** :

$$\mathfrak{S} : \begin{pmatrix} G \times A^G & \rightarrow & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \mathfrak{S}_g(x) \end{pmatrix}$$

avec  $(\mathfrak{S}_g(x))_h = x_{g^{-1}.h}$  pour tout  $h \in G$

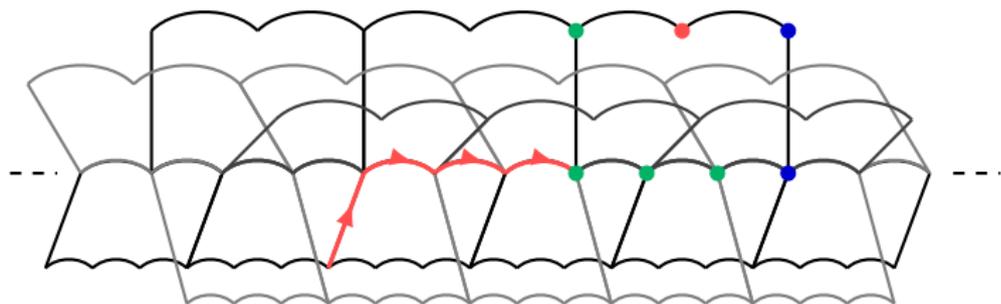


# Espace des configurations

- ▶  $A$  alphabet fini,  $G$  un groupe de type fini (nombre fini de générateurs).
- ▶  $A^G$  : espace des **configurations**, **compact**.
- ▶ action de  $G$  sur  $A^G$  par **translation** :

$$\mathfrak{S} : \begin{pmatrix} G \times A^G & \rightarrow & A^G \\ (g, x) & \mapsto & \mathfrak{S}_g(x) \end{pmatrix}$$

avec  $(\mathfrak{S}_g(x))_h = x_{g^{-1}.h}$  pour tout  $h \in G$



## Sous-décalages

- ▶  $(A^G, \mathfrak{S})$  est un système dynamique, le **full-shift**

## Sous-décalages

- ▶  $(A^G, \mathfrak{S})$  est un système dynamique, le **full-shift**
- ▶ un **sous-décalage** est un sous-système de  $(A^G, \mathfrak{S})$  :

$$(X \subset A^G, \mathfrak{S})$$

où l'ensemble de configuration  $X$  est fermé et stable par  $\mathfrak{S}$ .

## Sous-décalages

- ▶  $(A^G, \mathfrak{S})$  est un système dynamique, le **full-shift**
- ▶ un **sous-décalage** est un sous-système de  $(A^G, \mathfrak{S})$  :

$$(X \subset A^G, \mathfrak{S})$$

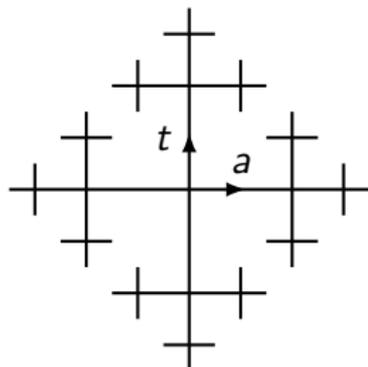
où l'ensemble de configuration  $X$  est fermé et stable par  $\mathfrak{S}$ .

- ▶  $X$  est un sous-décalage s'il existe un ensemble de motifs interdits  $F$  tel que

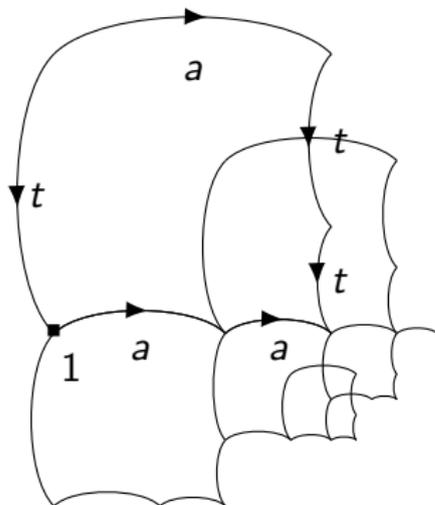
$$X = \left\{ x \in A^G, \mid \text{aucun motif de } F \text{ n'apparaît dans } x \right\}.$$

# Sous-décalages de type fini (SFT)

Sous-décalage **de type fini** (SFT) = on peut choisir  $|F| < \infty$



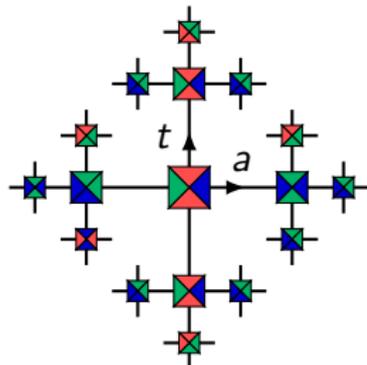
$$\langle a, t \mid \emptyset \rangle$$



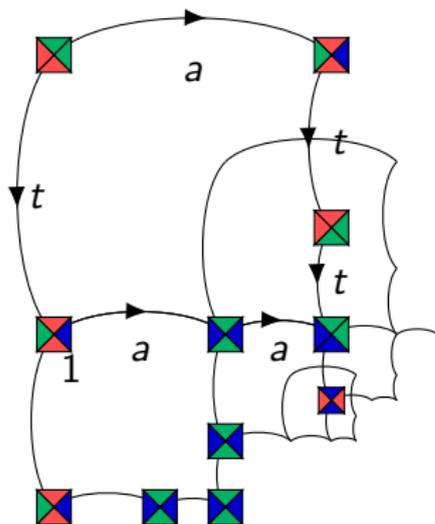
$$\langle a, t \mid at^2 = ta^2 \rangle$$

# Sous-décalages de type fini (SFT)

Sous-décalage **de type fini** (SFT) = on peut choisir  $|F| < \infty$



$\langle a, t \mid \emptyset \rangle$



$\langle a, t \mid at^2 = ta^2 \rangle$

SFT  $\approx$  ensemble de pavages par des **tuiles de Wang**

# Trois grandes questions

- ▶ **Problème du Domino** : quels groupes ont problème du Domino décidable ?
- ▶ **Apériodicité** : quels groupes possèdent un SFT fortement apériodique ?
- ▶ **Effectivité** : quels groupes admettent un décalage effectif qui n'est pas sofique ?

## Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

## Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

Le problème du Domino est **décidable** pour

- ▶  $\mathbb{Z}$ , les groupes libres
- ▶ les groupes virtuellement libres

# Problème du Domino d'un groupe $G$

**Problème du Domino** : étant donné  $F$  fini, le SFT  $X_F$  est-il vide ?

Le problème du Domino est **décidable** pour

- ▶  $\mathbb{Z}$ , les groupes libres
- ▶ les groupes virtuellement libres

Le problème du Domino est **indécidable** pour

- ▶  $\mathbb{Z}^2$  (Berger 1964, Robinson 1971)
- ▶ les groupes polycycliques non cycliques (Jeandel, 2015)
- ▶ les groupes de Baumslag-Solitar (A. & Kari, 2013)
- ▶ les groupes  $G_1 \times G_2$  (Jeandel, 2015) ( $\Rightarrow$  le groupe de Grigorchuk)
- ▶ les groupes de surface (A., Barbieri & Moutot 2019)
- ▶ + propriétés d'hérédité par sous-groupe/quotient/quasi-isométrie/action translation-like

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- ▶ On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- ▶ On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- ▶ Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- ▶ On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- ▶ Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- ▶ Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- ▶ On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- ▶ Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- ▶ Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).
- ▶ Si un groupe n'est pas virtuellement libre, alors il possède des grilles de tailles arbitraires comme mineurs (Robertson & Seymour, 1986).

# La conjecture du Domino

## Conjecture

Le problème du Domino est décidable pour  $G$  ssi  $G$  est virtuellement libre.

Pourquoi ?

- ▶ On peut exprimer le problème du Domino en logique MSO (Wang, 1961).
- ▶ Un groupe est virtuellement libre ssi son graphe de Cayley a largeur arborescente bornée (Muller & Schupp, 1985).
- ▶ Les graphes de largeur arborescente bornée sont exactement ceux avec MSO décidable (Kuske & Lorhey, 2005).
- ▶ Si un groupe n'est pas virtuellement libre, alors il possède des grilles de tailles arbitraires comme mineurs (Robertson & Seymour, 1986).
- ▶ Où sont ces grilles ? Comment les coder dans un SFT ?

## Apériodicité : définition

Si  $x \in A^G$ , son **stabilisateur** est

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid \mathfrak{S}_g(x) = x\}.$$

Un sous-décalage  $X$  est **fortement apériodique** si toutes ses configurations ont stabilisateur trivial.

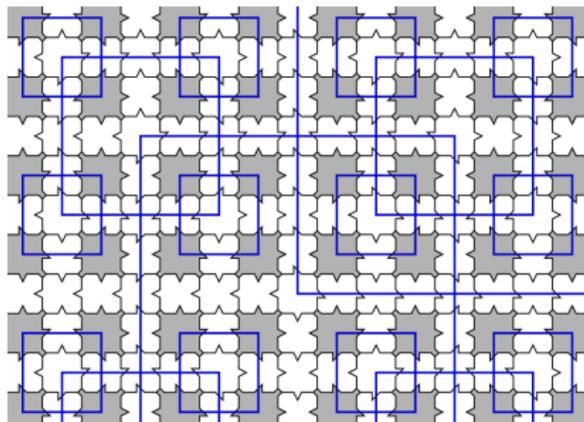
## Apériodicité : définition

Si  $x \in A^G$ , son **stabilisateur** est

$$\text{Stab}(x) := \{g \in G \mid \mathfrak{S}_g(x) = x\}.$$

Un sous-décalage  $X$  est **fortement apériodique** si toutes ses configurations ont stabilisateur trivial.

Exemple sur  $\mathbb{Z}^2$  :



# Apériodicité : résultats

## Résultats positifs :

- ▶  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- ▶ les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- ▶ les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

# Apériodicité : résultats

## Résultats positifs :

- ▶  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- ▶ les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- ▶ les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

## Obstructions :

- ▶ si  $G$  a au moins deux bouts, alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen 2017)
- ▶ si  $G$  a problème du mot indécidable alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel 2015)

# Apériodicité : résultats

## Résultats positifs :

- ▶  $\mathbb{Z}^d$  pour  $d \geq 2$  a un SFT fortement apériodique (Robinson 1971, Kari & Culik 1996)
- ▶ les groupes de surface, les groupes hyperboliques (Cohen, Goodman-Strauss & Rieck 2017)
- ▶ les groupes  $\mathbb{Z}^2 \rtimes_f H$  où  $H$  a problème du mot décidable (Barbieri & Sablik 2019)

## Obstructions :

- ▶ si  $G$  a au moins deux bouts, alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Cohen 2017)
- ▶ si  $G$  a problème du mot indécidable alors il n'a pas de SFT fortement apériodique (Jeandel 2015)

## Question

Un groupe  $G$  possède un SFT fortement apériodique <sup>?</sup>ssi  $G$  a un seul bout et problème du mot décidable.

## Effectivité : définition

- ▶ Un sous-décalage  $X \subset A^{\mathbb{G}}$  est **sofique** s'il existe  $Y \subset B^{\mathbb{G}}$  SFT et  $\phi : B^{\mathbb{G}} \rightarrow A^{\mathbb{G}}$  continue et commutant avec  $\mathfrak{S}$  avec

$$X = \phi(Y).$$

## Effectivité : définition

- ▶ Un sous-décalage  $X \subset A^G$  est **sofique** s'il existe  $Y \subset B^G$  SFT et  $\phi : B^G \rightarrow A^G$  continue et commutant avec  $\mathcal{G}$  avec

$$X = \phi(Y).$$

- ▶ Un sous-décalage  $X \subset A^G$  est **effectif** s'il existe  $F$  énuméré par une machine de Turing avec oracle  $WP(G)$  tel que

$$X = X_F.$$

## Effectivité : définition

- ▶ Un sous-décalage  $X \subset A^G$  est **sofique** s'il existe  $Y \subset B^G$  SFT et  $\phi : B^G \rightarrow A^G$  continue et commutant avec  $\mathcal{G}$  avec

$$X = \phi(Y).$$

- ▶ Un sous-décalage  $X \subset A^G$  est **effectif** s'il existe  $F$  énuméré par une machine de Turing avec oracle  $WP(G)$  tel que

$$X = X_F.$$

**Exemple** : Le sous-décalage

$$X_{\leq 1} := \left\{ x \in \{0, 1\}^G \mid \#\{g \in G \mid x_g = 1\} \leq 1 \right\}$$

est toujours effectif.

## Effectivité : résultats

Groupes avec des **effectifs non-sofiques** (A., Barbieri & Sablik 2017) :

- ▶  $\mathbb{Z}^2$  :  $X_{\text{miroir}}$  (Folklore)
- ▶  $WP(G)$  indécidable :  $X_{\leq 1}$
- ▶  $G$  moyennable :  $X_{\text{mimic}}$
- ▶  $G$  avec au moins deux bouts :  $X_{\text{mimic}}$ ,

## Effectivité : résultats

Groupes avec des **effectifs non-sofiques** (A., Barbieri & Sablik 2017) :

- ▶  $\mathbb{Z}^2$  :  $X_{\text{miroir}}$  (Folklore)
- ▶  $WP(G)$  indécidable :  $X_{\leq 1}$
- ▶  $G$  moyennable :  $X_{\text{mimic}}$
- ▶  $G$  avec au moins deux bouts :  $X_{\text{mimic}}$ ,

Groupes où **tout effectif est sofique** (Barbieri & Sablik 2021 ?) :

- ▶  $G_1 \times G_2$  avec  $G_1$  et  $G_2$  non moyennables

## Effectivité : résultats

Groupes avec des **effectifs non-sofiques** (A., Barbieri & Sablik 2017) :

- ▶  $\mathbb{Z}^2$  :  $X_{\text{miroir}}$  (Folklore)
- ▶  $WP(G)$  indécidable :  $X_{\leq 1}$
- ▶  $G$  moyennable :  $X_{\text{mimic}}$
- ▶  $G$  avec au moins deux bouts :  $X_{\text{mimic}}$ ,

Groupes où **tout effectif est sofique** (Barbieri & Sablik 2021 ?) :

- ▶  $G_1 \times G_2$  avec  $G_1$  et  $G_2$  non moyennables

### Question

Sur quels groupes  $G$  tout effectif est sofique ?



# Trois grandes questions

- ▶ **Problème du Domino** : quels groupes ont problème du Domino décidable ?
- ▶ **Apériodicité** : quels groupes possèdent un SFT fortement apériodique ?
- ▶ **Effectivité** : quels groupes admettent un décalage effectif qui n'est pas sofique ?

# Contributions personnelles

## ▶ **Problème du Domino :**

- ▶ (A. & Kari 2013) : indécidable pour les  $BS(m, n)$
- ▶ (A. , Barbieri & Moutot 2019) : indécidable pour les groupes de surface
- ▶ (A., Esnay & Sablik 2020) : version avec contrainte directionnelle indécidable sur  $\mathbb{Z}^2$

## ▶ **Apériodicité :**

- ▶ (A. & Kari 2013) : SFT faiblement apériodique pour les  $BS(m, n)$
- ▶ (A. & Schraudner 2020) : SFT fortement apériodique pour les  $BS(1, n)$

## ▶ **Effectivité :**

- ▶ (A., Barbieri & Sablik 2017) : décalage effectif pas sofique pour les groupes moyennables, avec au moins deux bouts ou à problème du mot indécidable

# Contributions personnelles

## ▶ **Problème du Domino :**

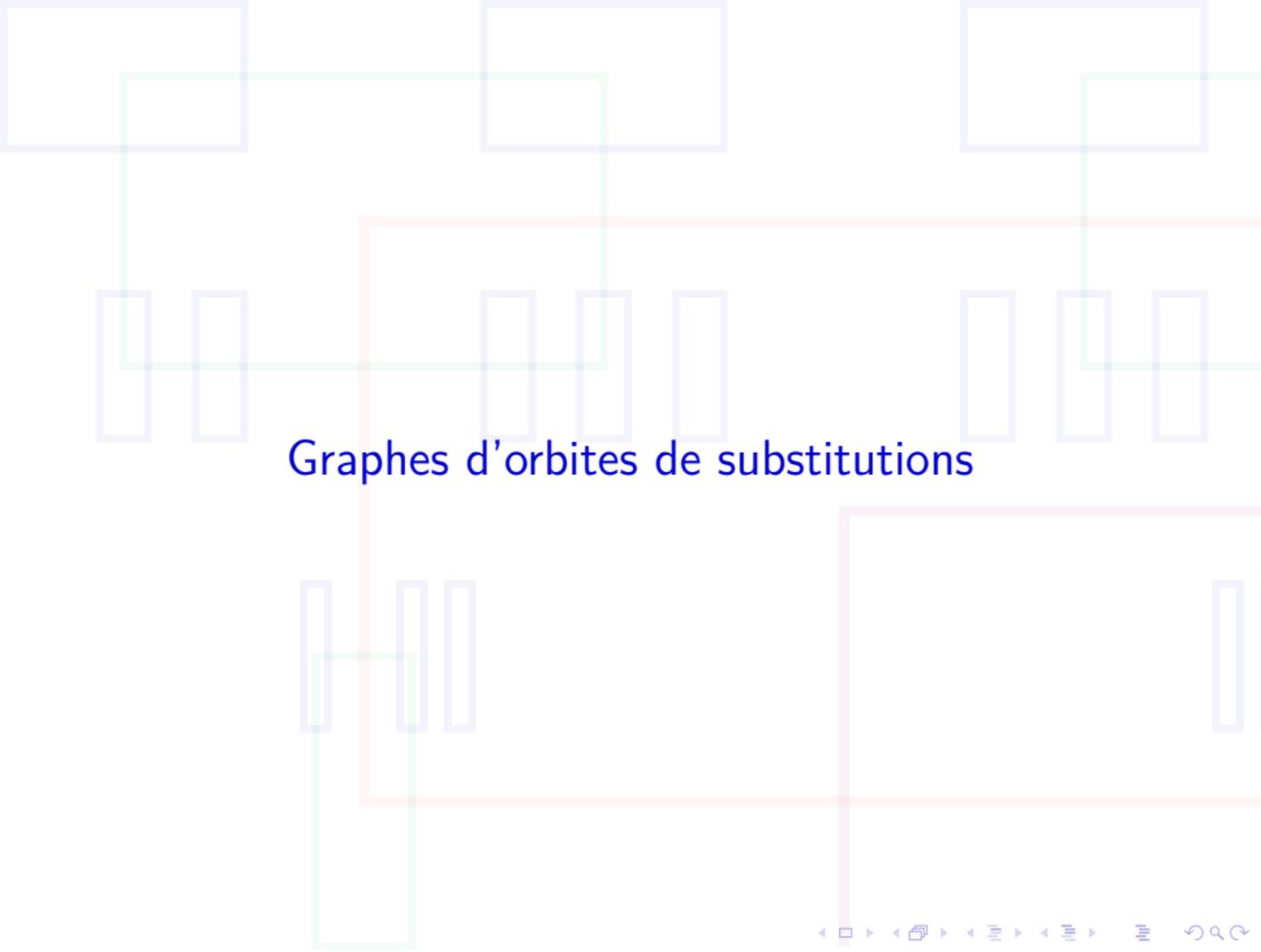
- ▶ (A. & Kari 2013) : indécidable pour les  $BS(m, n)$
- ▶ **(A., Barbieri & Moutot 2019) : indécidable pour les groupes de surface**
- ▶ (A., Esnay & Sablik 2020) : version avec contrainte directionnelle indécidable sur  $\mathbb{Z}^2$

## ▶ **Apériodicité :**

- ▶ (A. & Kari 2013) : SFT faiblement apériodique pour les  $BS(m, n)$
- ▶ **(A. & Schraudner 2020) : SFT fortement apériodique pour les  $BS(1, n)$**

## ▶ **Effectivité :**

- ▶ (A., Barbieri & Sablik 2017) : effectif pas sofique pour les groupes moyennables, avec ou moins deux bouts ou à problème du mot indécidable



Graphes d'orbites de substitutions

# Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$$\left| \begin{array}{ll} A = \{0\} & A = \{a, b\} \\ 0 \mapsto 00 & \sigma(a) = aab \\ & \sigma(b) = ba \end{array} \right.$$

# Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante  
(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) =_P \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{|P^{-1}(i)}$$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

# Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante  
(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) = \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{|P^{-1}(i)}$$

$$M_\sigma = (m_{ij}) \text{ avec } m_{ij} = |\sigma(a_i)|_j$$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

$$M_{0 \mapsto 00} = (2) \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Substitutions

$$\sigma : A \rightarrow A^*$$

$P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  surjective croissante  
(fonction parent)

$$\omega, \omega' \in A^{\mathbb{Z}} :$$

$$\sigma(\omega) = \omega' \text{ si } \forall i, \sigma(\omega_i) = \omega'_{|P^{-1}(i)}$$

$$M_\sigma = (m_{ij}) \text{ avec } m_{ij} = |\sigma(a_i)|_j$$

Si  $\sigma$  est primitive ( $m_{ij} > 0$ ) :

- $\exists \lambda$  v. p. t.q.  $\lambda > |\mu| \forall \mu$  v.p.  $\neq \lambda$
- $\exists v \in (\mathbb{R}^+)^n$  t.q.  $M_\sigma v = \lambda v$

$$A = \{0\}$$

$$0 \mapsto 00$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\sigma(a) = aab$$

$$\sigma(b) = ba$$

$$M_{0 \mapsto 00} = (2) \quad M_\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$v = (1)$$

$$\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Graphe d'orbite

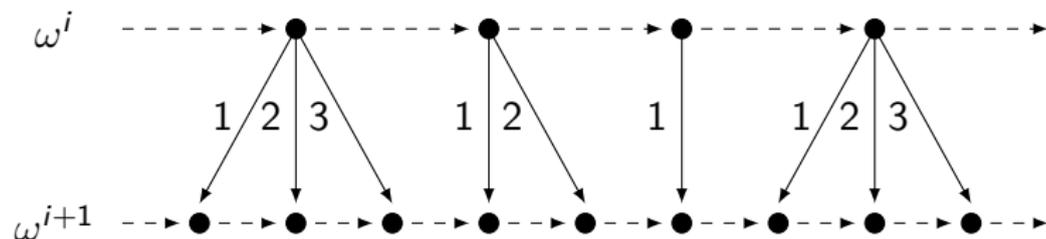
$\sigma : A \rightarrow A^*$  primitive et  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une orbite de  $\sigma$

On associe à l'orbite  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  un graphe dont les sommets sont  $\mathbb{Z}^2$  :

# Graphe d'orbite

$\sigma : A \rightarrow A^*$  primitive et  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  une orbite de  $\sigma$

On associe à l'orbite  $\{(\omega^i, P_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  un graphe dont les sommets sont  $\mathbb{Z}^2$  :

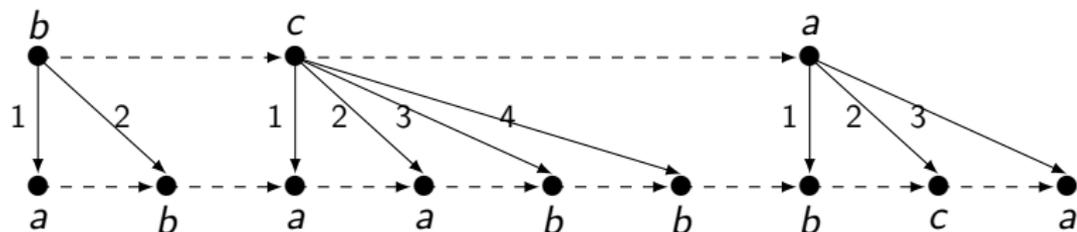


avec

- ▶ une arête pointillée entre  $\omega_j^i$  et  $\omega_{j+1}^i$  ;
- ▶ une arête étiquetée par  $k$  entre  $\omega_j^i$  et son  $k$ ième enfant.

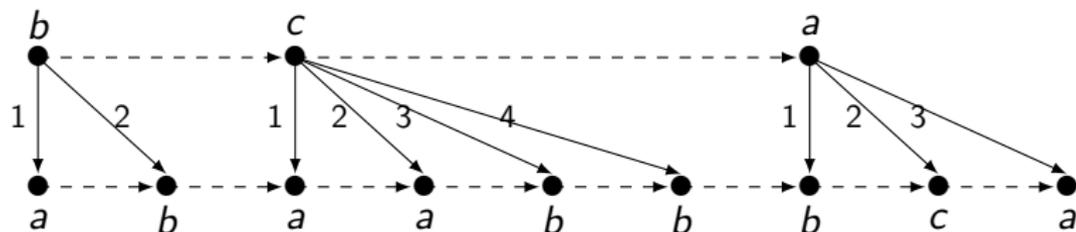
# Graphe d'orbite

Exemple avec  $\sigma(a) = bca$ ,  $\sigma(b) = ab$ ,  $\sigma(c) = aabb$  :

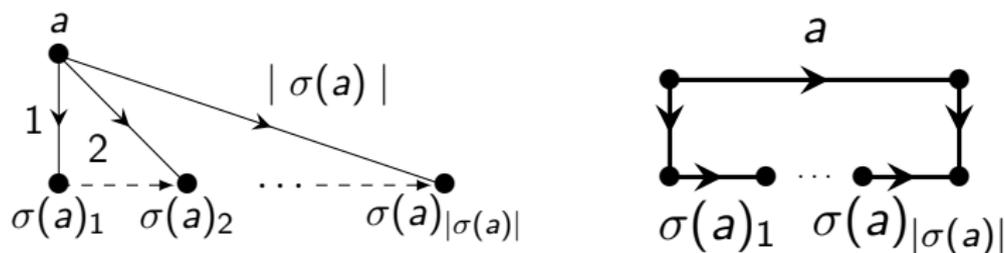


# Graphe d'orbite

Exemple avec  $\sigma(a) = bca$ ,  $\sigma(b) = ab$ ,  $\sigma(c) = aabb$  :

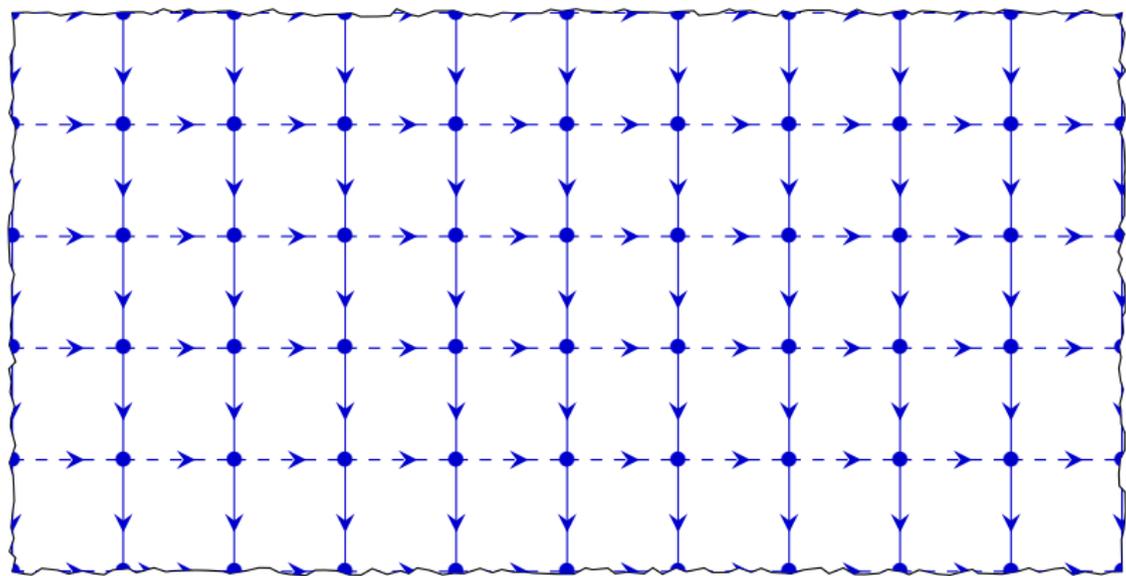


Graphe d'orbite et son dual

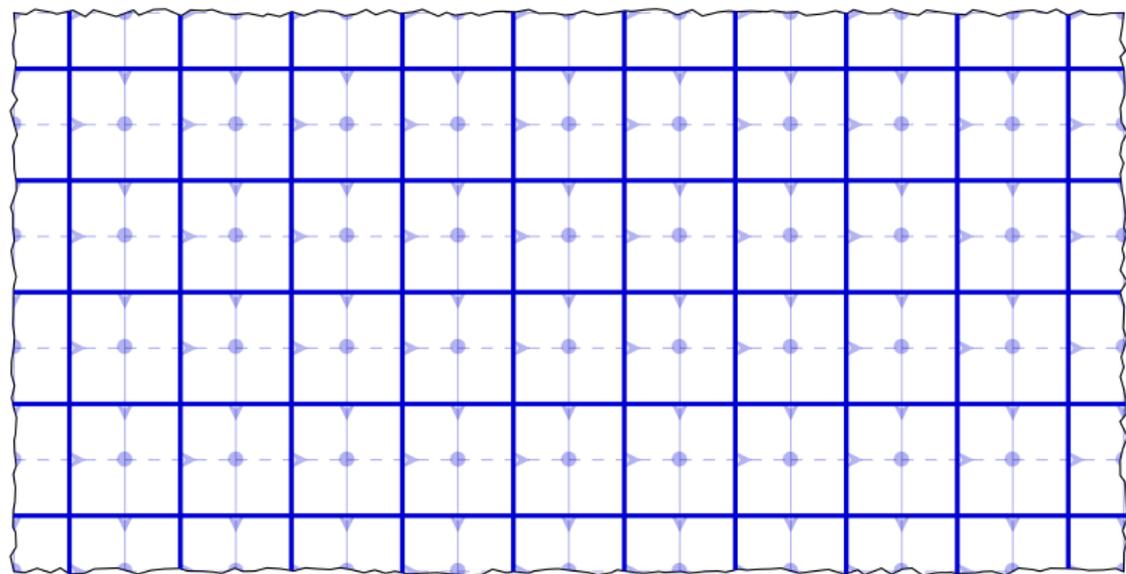


Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$

Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$



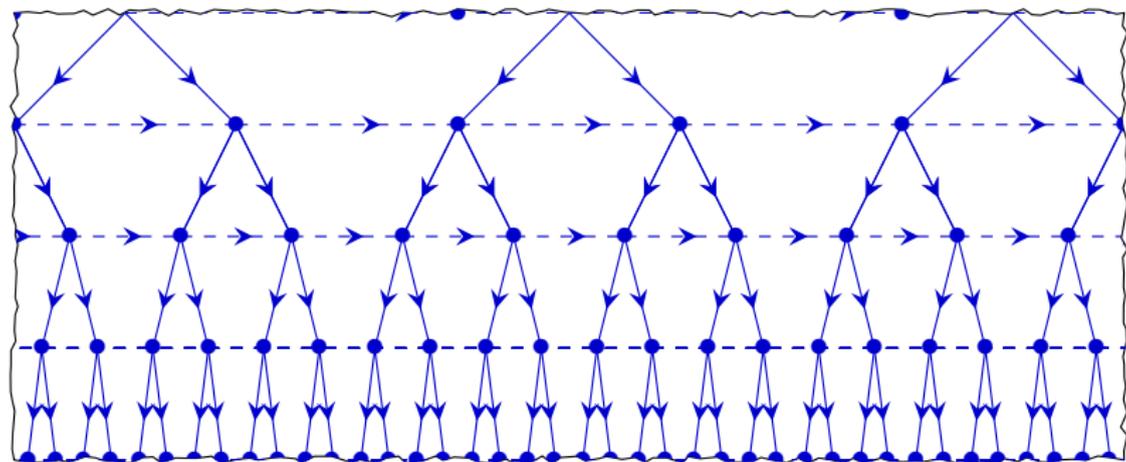
Exemple 1 :  $\sigma(a) = a$



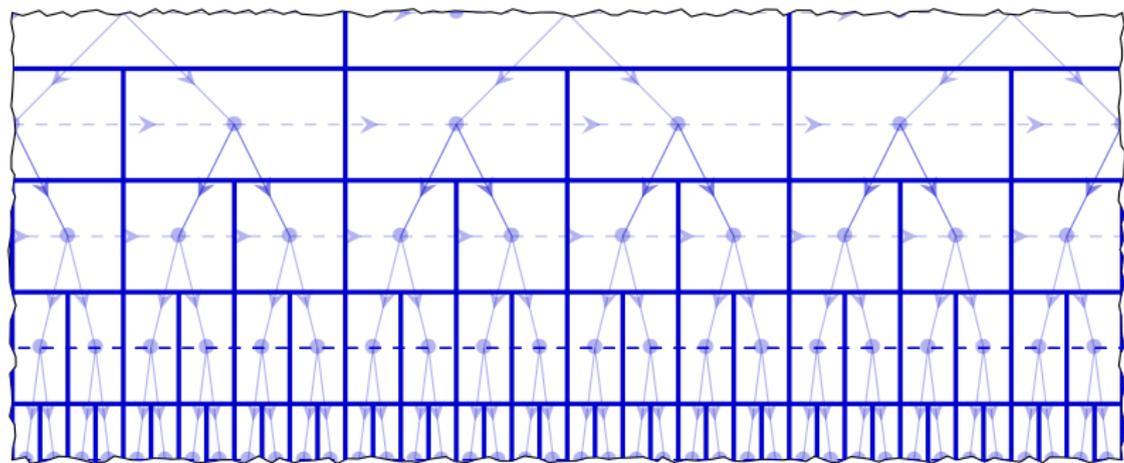
$\mathbb{Z}^2$

Exemple 2 :  $\sigma(a) = aa$

Exemple 2 :  $\sigma(a) = aa$



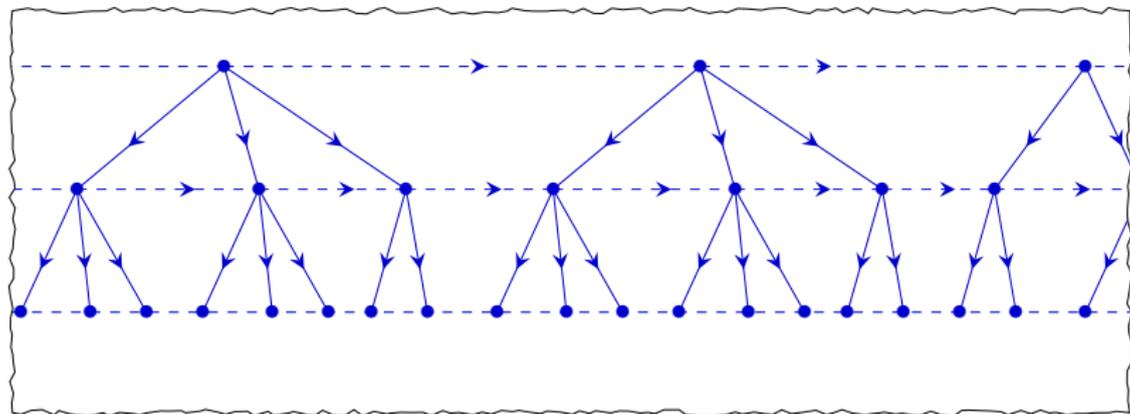
## Exemple 2 : $\sigma(a) = aa$



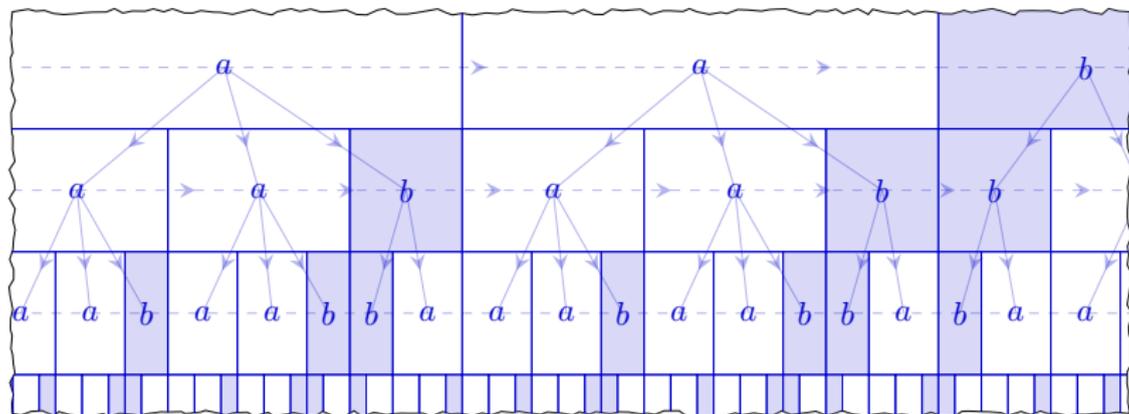
pavage de  $\mathbb{H}_2$  par des pentagones

Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$

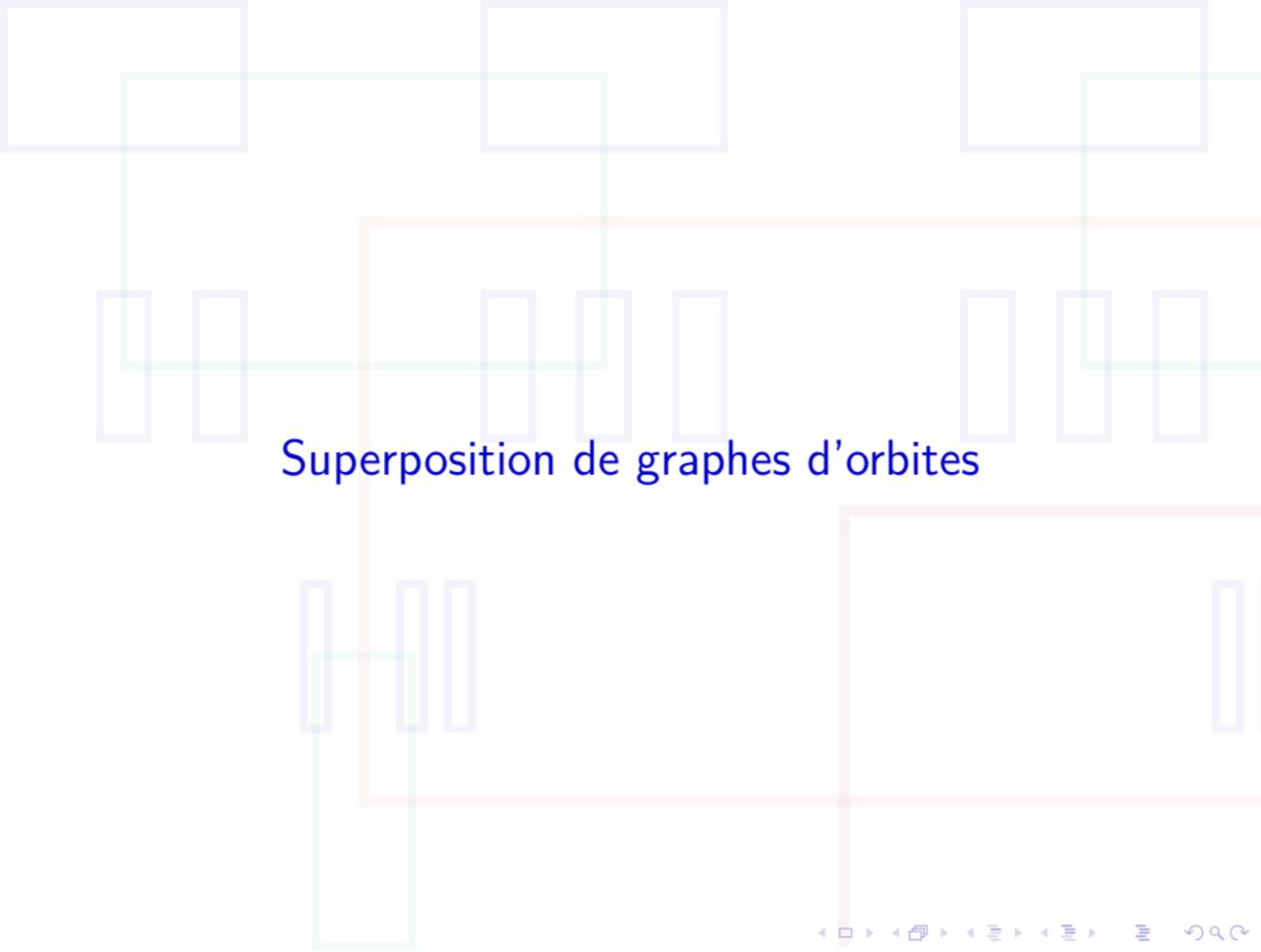
Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$



Exemple 3 :  $\sigma(a) = aab$ ,  $\sigma(b) = ba$

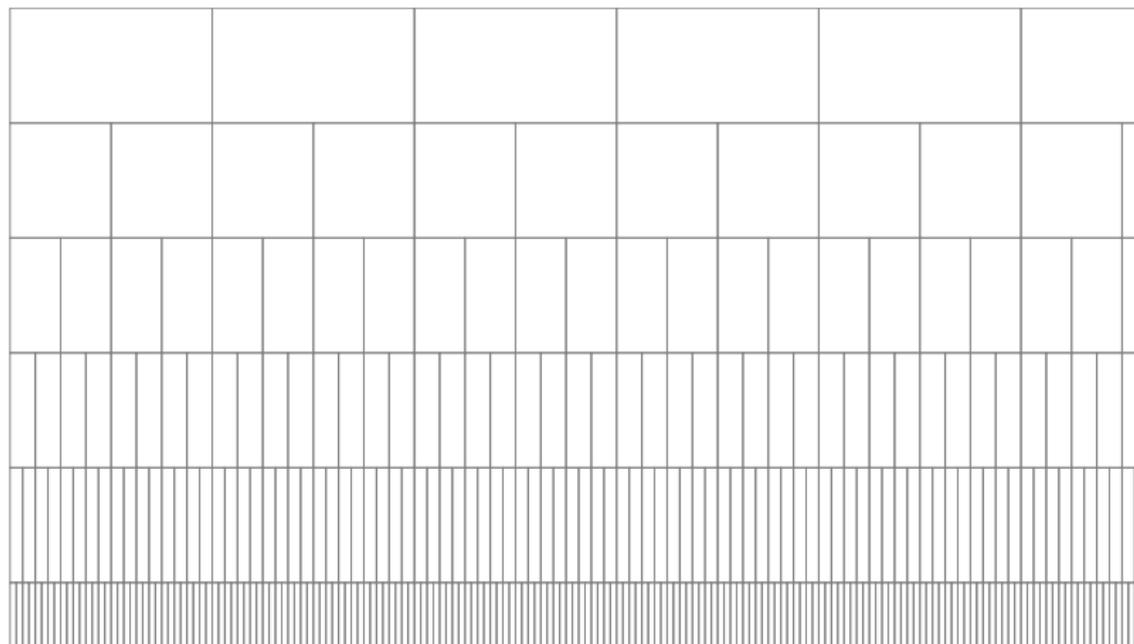


pavage de  $\mathbb{H}_2$  par deux tuiles  $a$  et  $b$

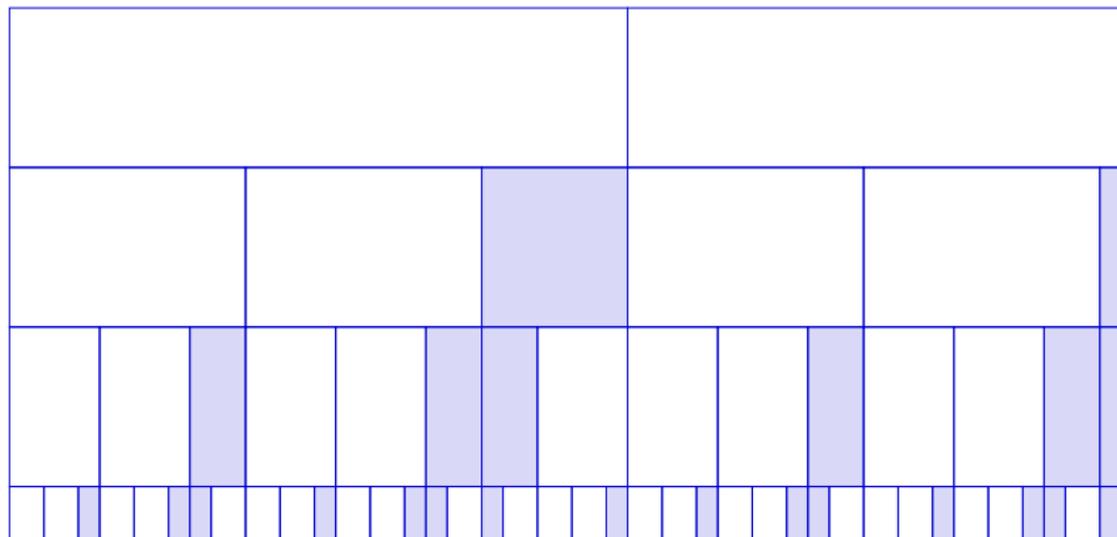


Superposition de graphes d'orbites

# Superposition de graphes d'orbites

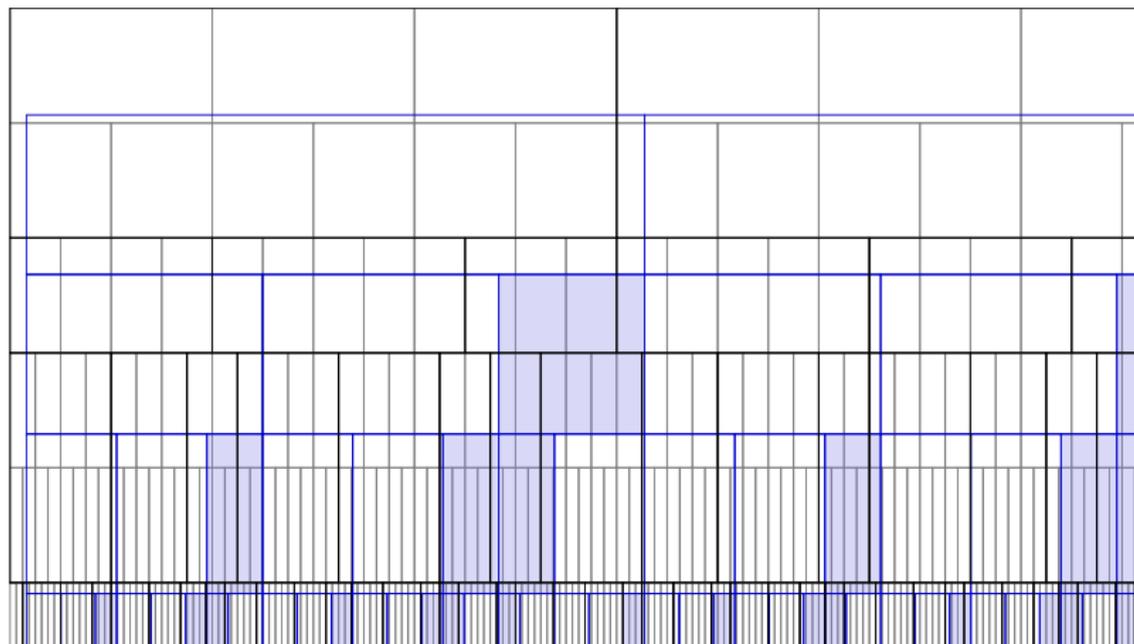


# Superposition de graphes d'orbites

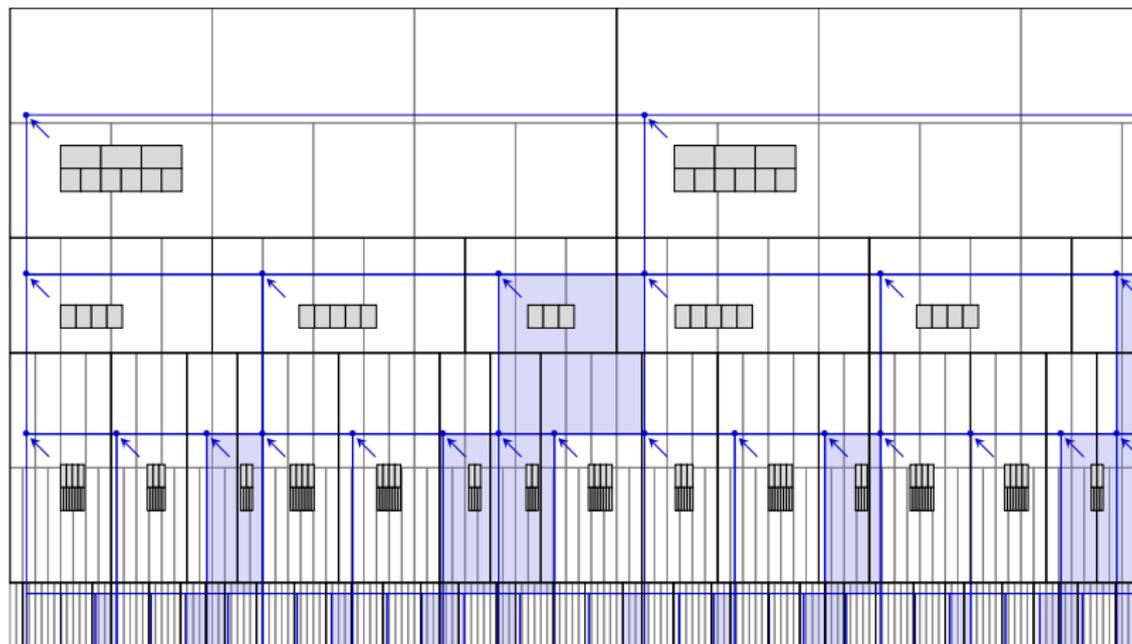




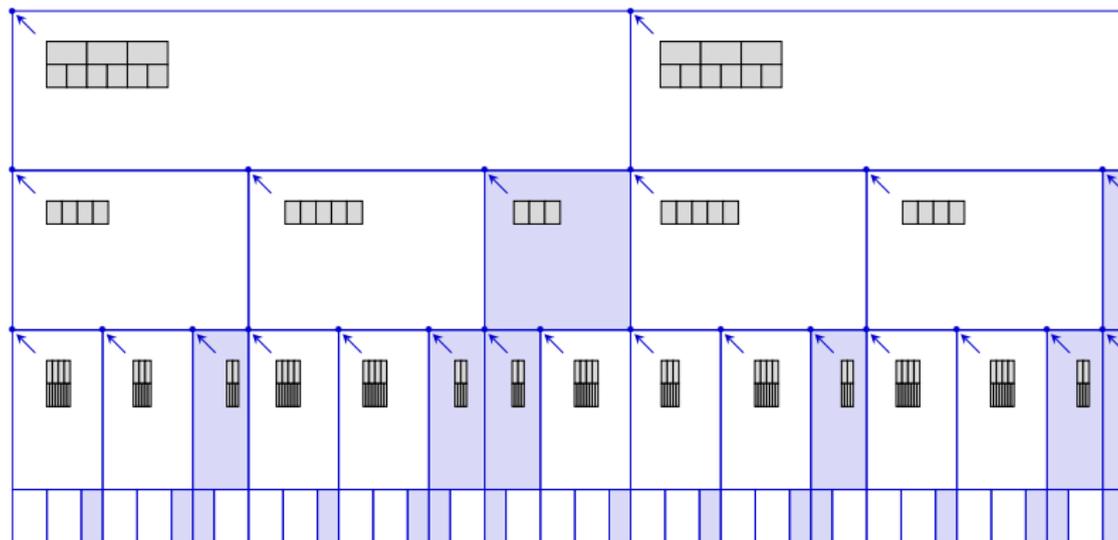
# Superposition de graphes d'orbites



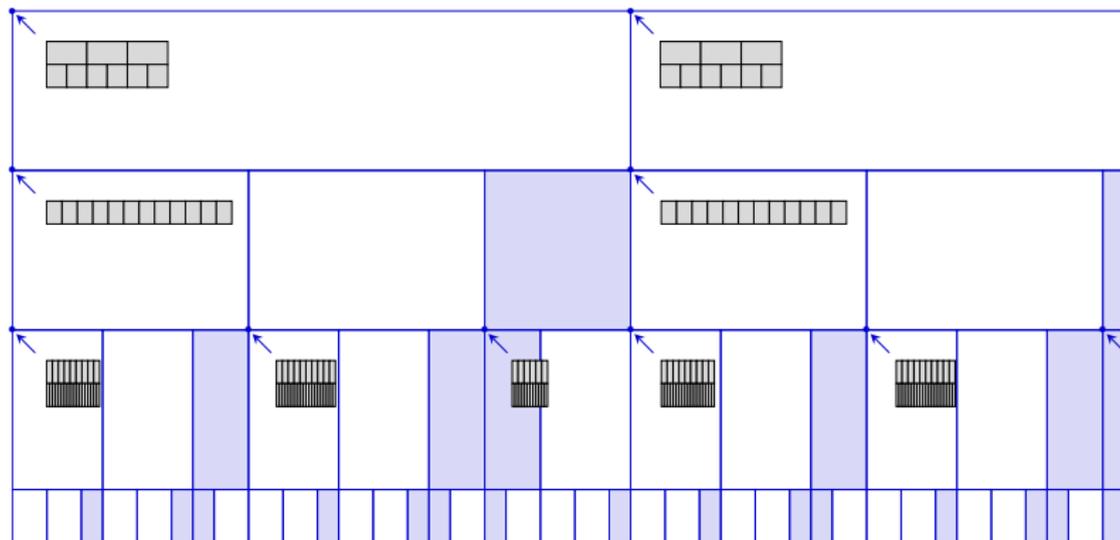
# Superposition de graphes d'orbites



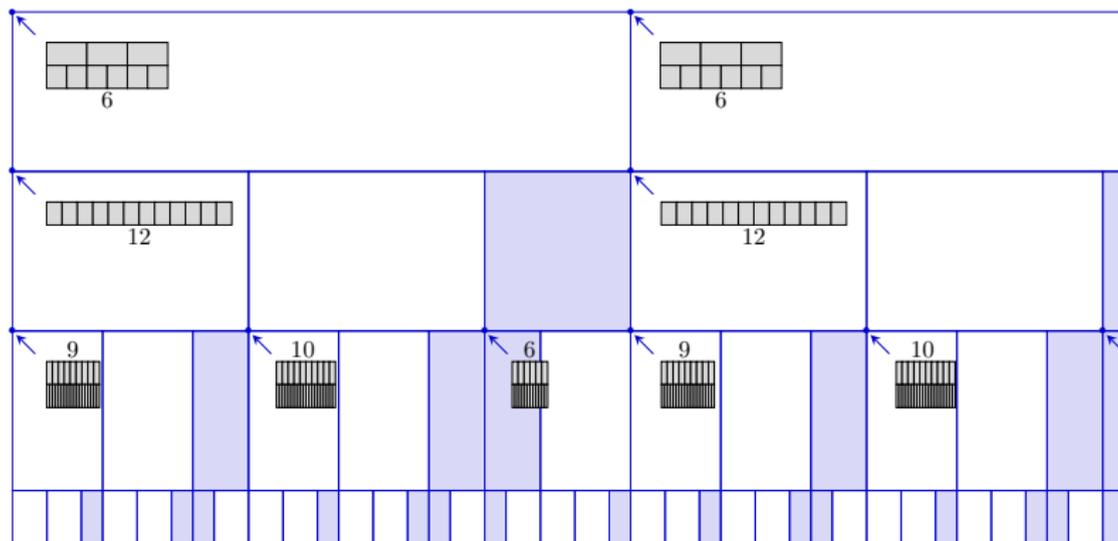
# Superposition de graphes d'orbites



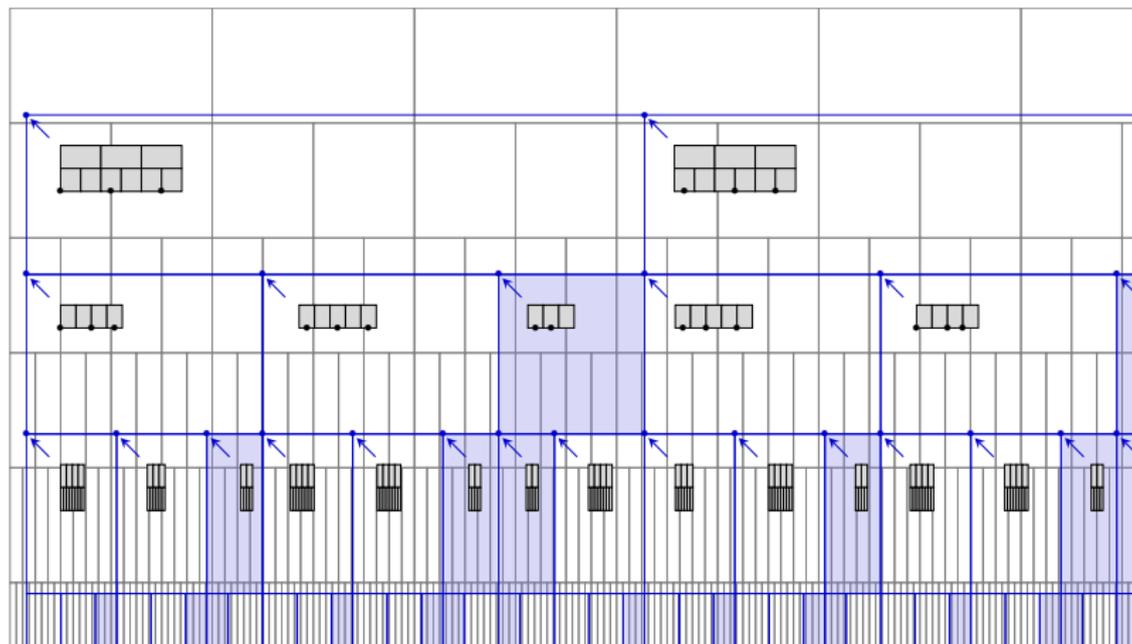
# Superposition de graphes d'orbites



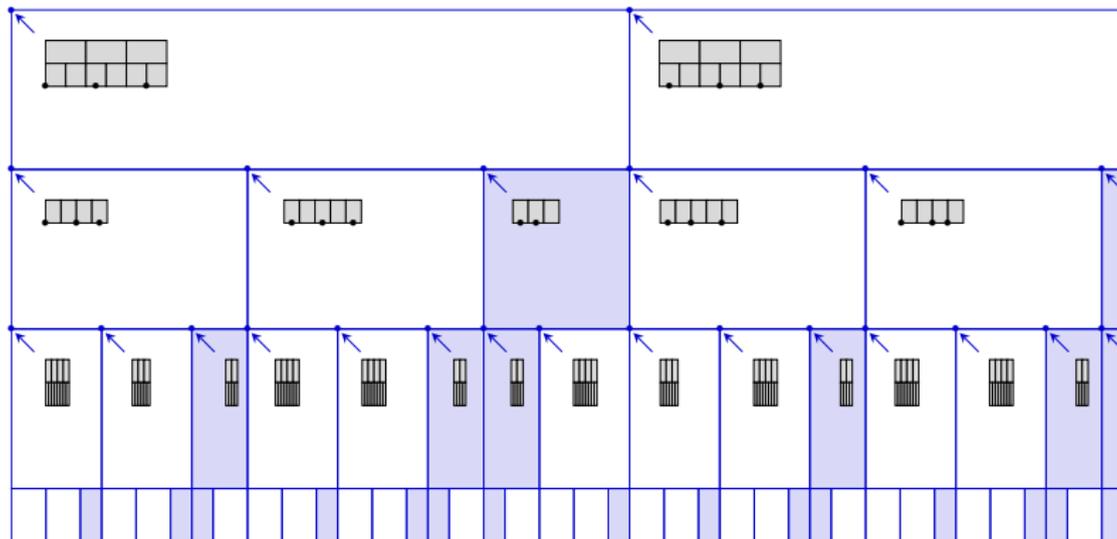
# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



# Superposition de graphes d'orbites



## Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

# Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

combiné avec

Théorème (Kari 2007)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites de  $a \mapsto aa$ .

# Superposition de graphes d'orbites

≈ Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux substitutions avec  $\lambda, \lambda' > 1$ , alors on peut coder un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma'$**  comme un **SFT sur un graphe d'orbite de  $\sigma$** .

combiné avec

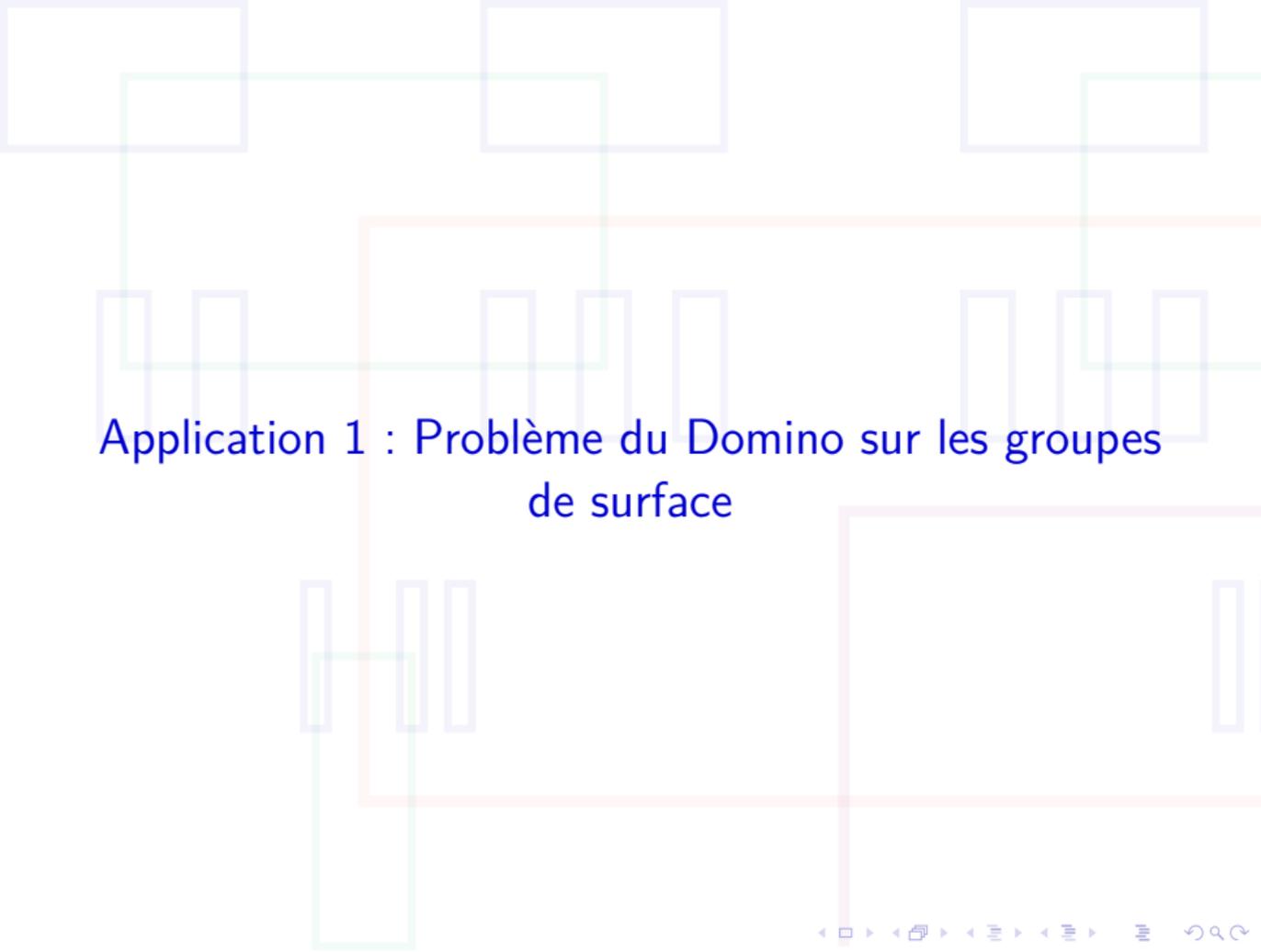
Théorème (Kari 2007)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites de  $a \mapsto aa$ .

on obtient

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

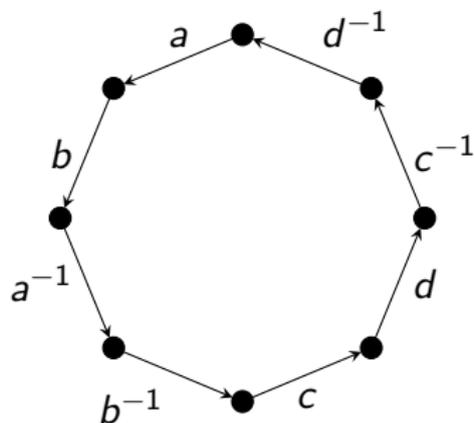
Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

The background features a complex diagram of a surface. It consists of several blue-outlined rectangular shapes arranged in a grid-like pattern. A green path winds through these shapes, connecting them in a specific sequence. A large red-outlined rectangle is superimposed on the diagram, partially enclosing the blue shapes and the green path. The text is centered in the middle of the slide.

Application 1 : Problème du Domino sur les groupes  
de surface

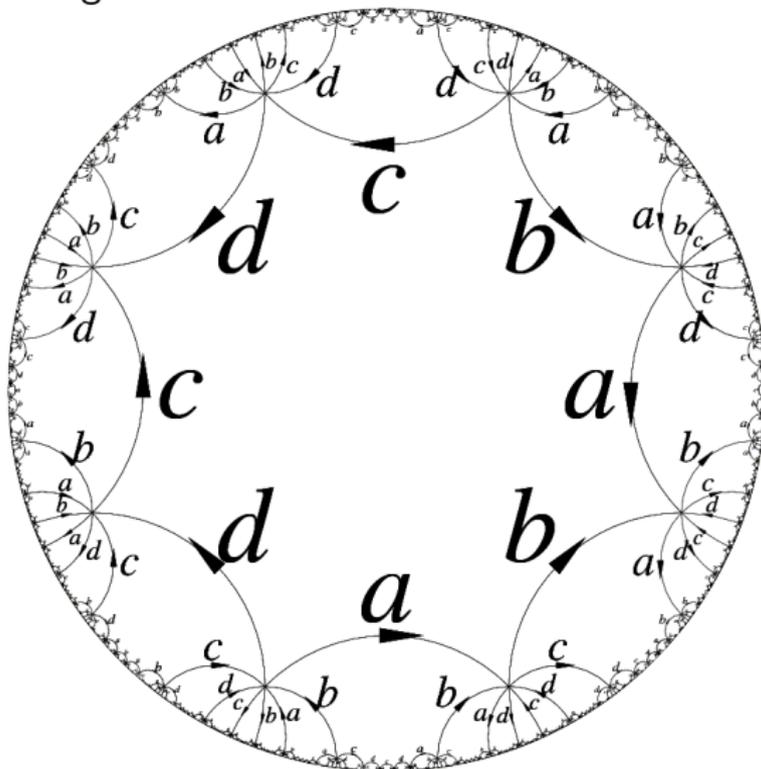
# Graphe de Cayley et graphe d'orbite (I)

Le graphe de Cayley  $G = \langle a, b, c, d \mid [a; b][c; d] = 1 \rangle$  s'obtient en collant des octogones.



# Graphe de Cayley et graphe d'orbite (I)

Le graphe de Cayley  $G = \langle a, b, c, d \mid [a; b][c; d] = 1 \rangle$  s'obtient en collant des octogones.



## Graphe de Cayley et graphe d'orbite (II)

Il y a en fait une substitution cachée dans le groupe !

## Grphe de Cayley et graphe d'orbite (II)

Il y a en fait une substitution cachée dans le groupe !

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \\ \sigma(b) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \end{cases}$$

avec  $\lambda = 17 + 12\sqrt{2} > 1$  .

## Graphe de Cayley et graphe d'orbite (II)

Il y a en fait une substitution cachée dans le groupe !

$$\begin{cases} \sigma(a) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \\ \sigma(b) = ab^5ab^5ab^5ab^5ab^5ab^4 \end{cases}$$

avec  $\lambda = 17 + 12\sqrt{2} > 1$  .

**Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)**

Il existe un SFT sur  $G$  qui encode les graphes d'orbites de  $\sigma$ .

# Problème du Domino sur les groupes de surface

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

# Problème du Domino sur les groupes de surface

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les groupes de surface de genre  $g = 2$ .

# Problème du Domino sur les groupes de surface

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les groupes de surface de genre  $g = 2$ .

- ▶ Les groupes de surface de genre  $g \geq 2$  sont commensurables.
- ▶ L'indécidabilité du problème du Domino est un invariant de commensurabilité.

# Problème du Domino sur les groupes de surface

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbites d'une substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$ .

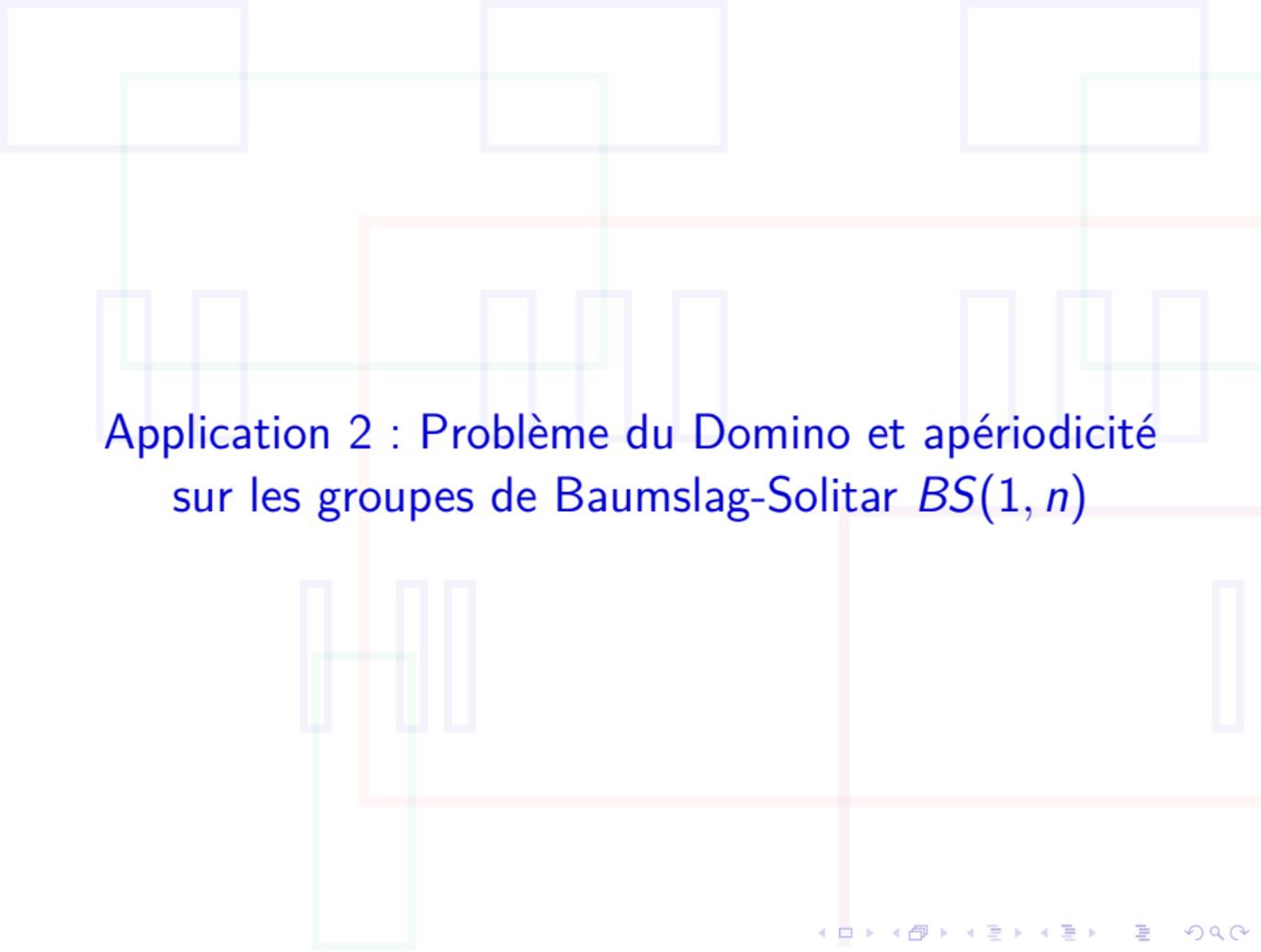
Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

Le problème du Domino est indécidable sur les groupes de surface de genre  $g = 2$ .

- ▶ Les groupes de surface de genre  $g \geq 2$  sont commensurables.
- ▶ L'indécidabilité du problème du Domino est un invariant de commensurabilité.

Théorème (A., Barbieri & Moutot 2019)

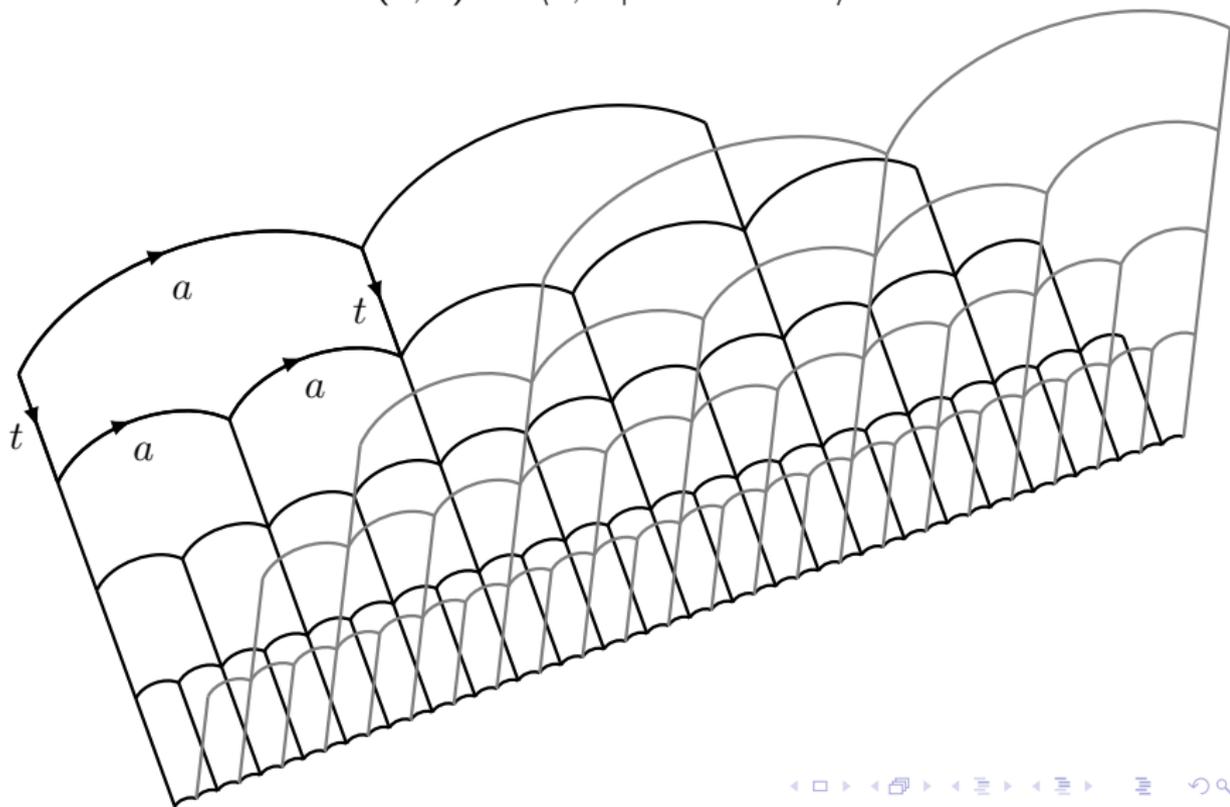
Le problème du Domino est indécidable sur les groupes de surface de genre  $g \geq 2$ .



Application 2 : Problème du Domino et apériodicité  
sur les groupes de Baumslag-Solitar  $BS(1, n)$

# Les groupes $BS(1, n)$

$$BS(1, n) := \langle a, t \mid t^{-1}at = a^n \rangle$$



# Les groupes $BS(1, n)$

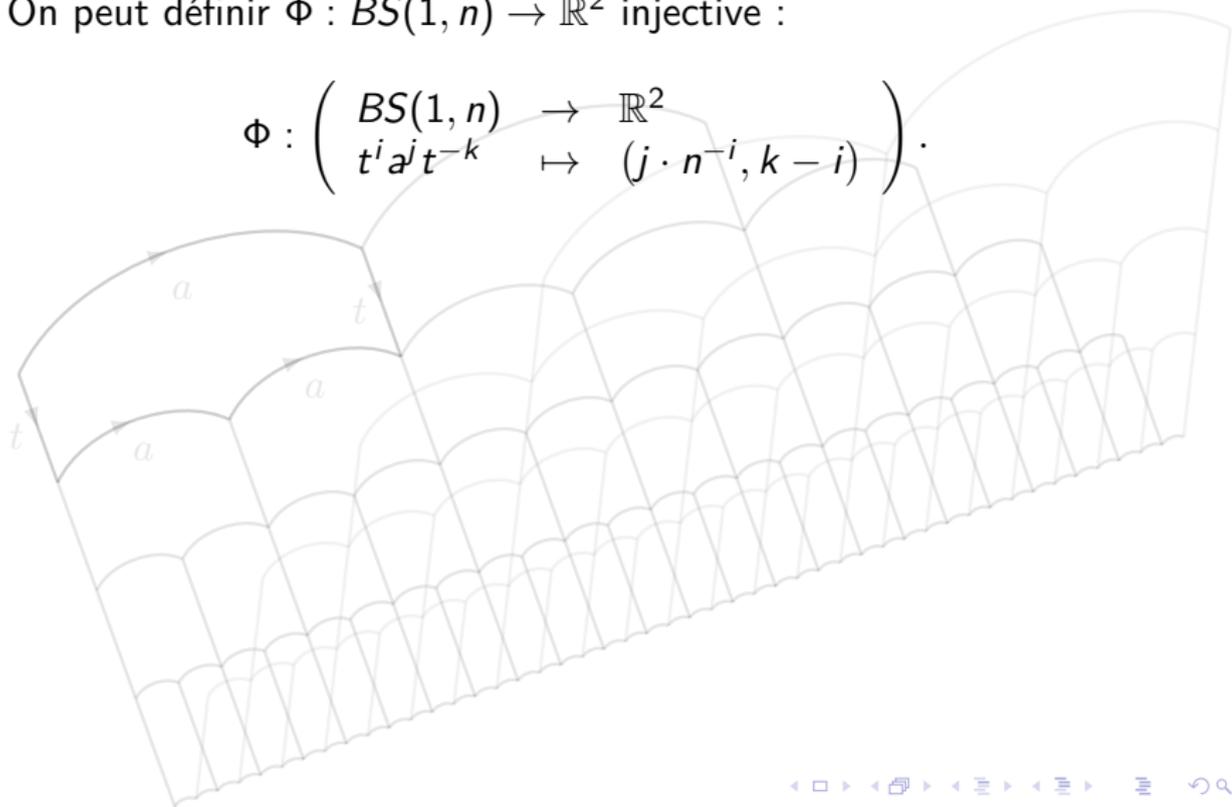
$$BS(1, n) := \langle a, t \mid t^{-1}at = a^n \rangle$$

- ▶ un relateur  $\Rightarrow$  problème du mot décidable
- ▶ moyennable
- ▶ un seul bout
- ▶ chaque feuille est un graphe d'orbite de  $a \mapsto aa$
- ▶ deux feuilles fusionnent toujours
- ▶ forme normale élégante :  $t^i a^j t^{-k}$  avec  $i, k \in \mathbb{N}$  et  $n \nmid j \in \mathbb{Z}$

## $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

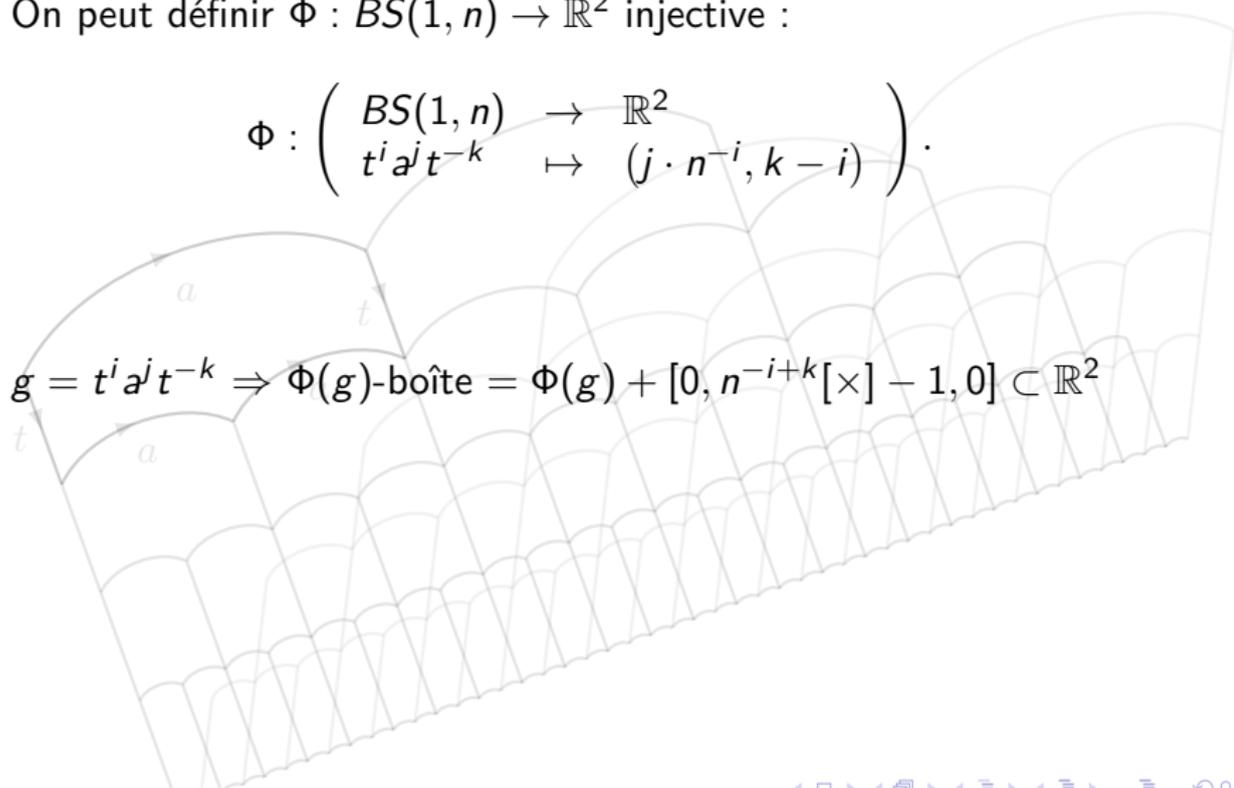
$$\Phi : \left( \begin{array}{l} BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$



# $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

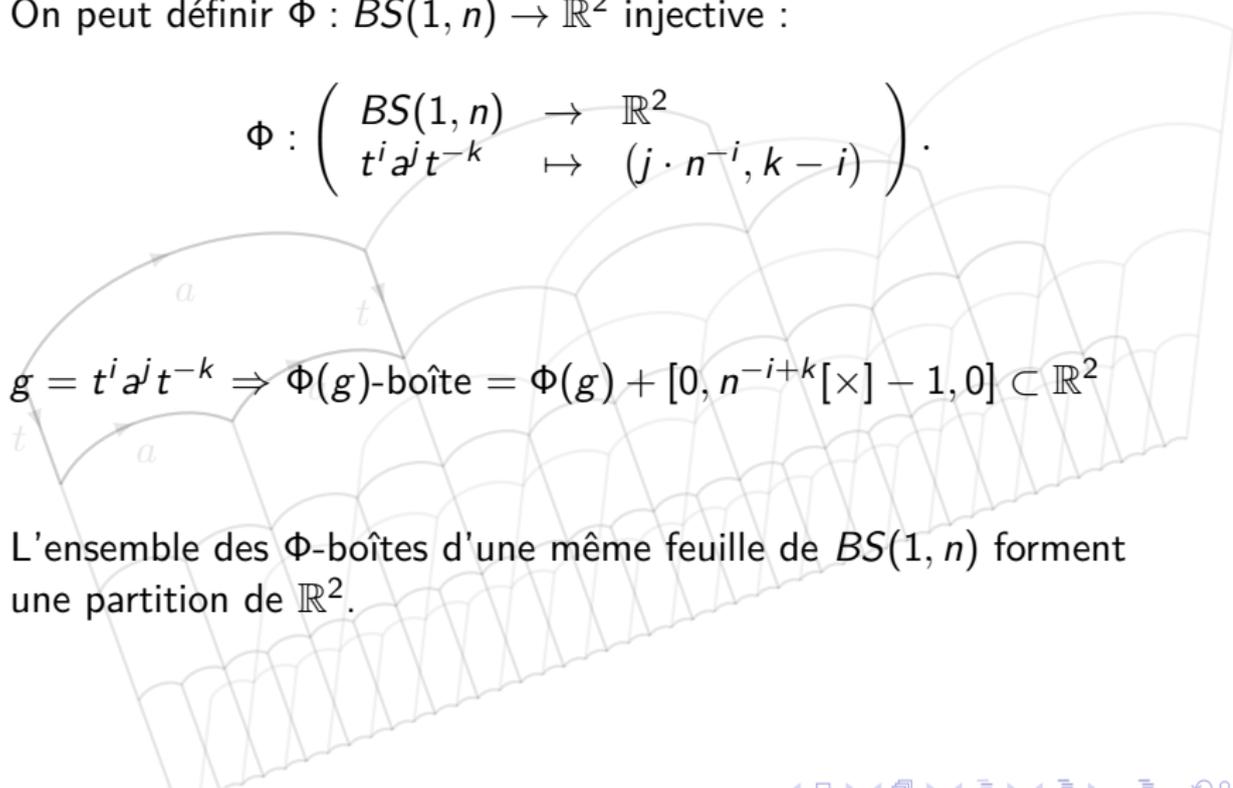
$$\Phi : \left( \begin{array}{l} BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$

$$g = t^i a^j t^{-k} \Rightarrow \Phi(g)\text{-boîte} = \Phi(g) + [0, n^{-i+k}[\times] - 1, 0] \subset \mathbb{R}^2$$


## $BS(1, n)$ plongé dans $\mathbb{R}^2$

On peut définir  $\Phi : BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2$  injective :

$$\Phi : \left( \begin{array}{l} BS(1, n) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t^i a^j t^{-k} \mapsto (j \cdot n^{-i}, k - i) \end{array} \right).$$

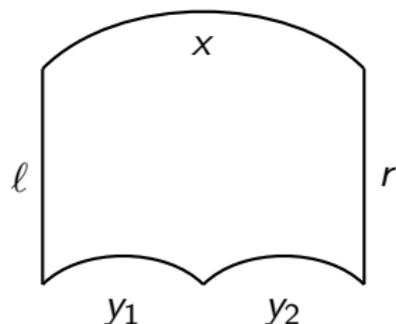

$$g = t^i a^j t^{-k} \Rightarrow \Phi(g)\text{-boîte} = \Phi(g) + [0, n^{-i+k}[\times] - 1, 0] \subset \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des  $\Phi$ -boîtes d'une même feuille de  $BS(1, n)$  forment une partition de  $\mathbb{R}^2$ .

# Problème du Domino pour $a \mapsto aa$

## Théorème (Kari 2007)

Le problème du Domino est indécidable sur les graphes d'orbite de  $a \mapsto aa$ .



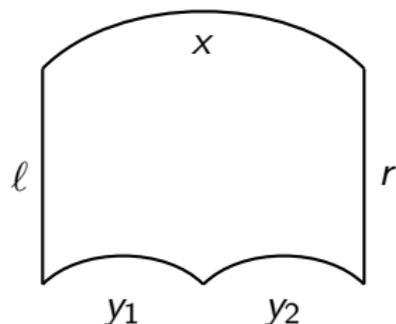
$$\text{avec } f(x) + l = \frac{y_1 + y_2}{2} + r$$

Nombre fini de tuiles pour encoder  $f$  rationnelle affine par morceaux.

## Adaptation sur $BS(1, 2)$

Théorème (A. & Kari 2013)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, 2)$ .



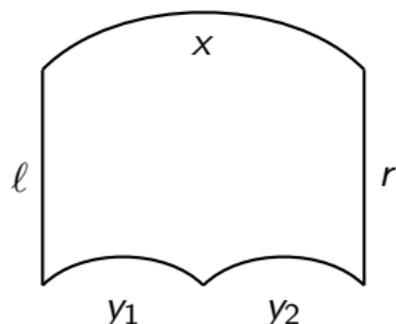
$$\text{avec } f(x) + l = \frac{y_1 + y_2}{2} + r$$

Nombre fini de tuiles pour encoder  $f$  rationnelle affine par morceaux.

## Adaptation sur $BS(1, 2)$

Théorème (A. & Kari 2013)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, 2)$ .



$$\text{avec } f(x) + l = \frac{y_1 + y_2}{2} + r$$

Nombre fini de tuiles pour encoder  $f$  rationnelle affine par morceaux.

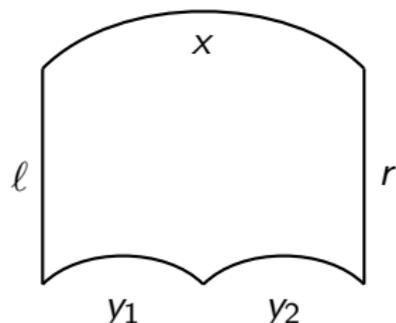
Théorème (A. & Kari 2013)

Il existe un SFT faiblement apériodique sur  $BS(1, 2)$ .

## Adaptation sur $BS(1, 2)$

Théorème (A. & Kari 2013)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, 2)$ .



$$\text{avec } f(x) + l = \frac{y_1 + y_2}{2} + r$$

Nombre fini de tuiles pour encoder  $f$  rationnelle affine par morceaux.

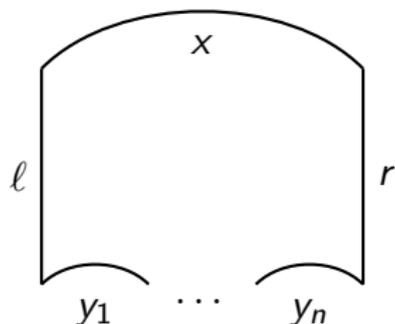
Théorème (Esnay & Moutot 2020)

Il existe un SFT **fortement** aperiodique sur  $BS(1, 2)$ .

## Adaptation sur $BS(1, n)$

Théorème (A. & Kari 2013)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .



$$\text{avec } f(x) + l = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} + r$$

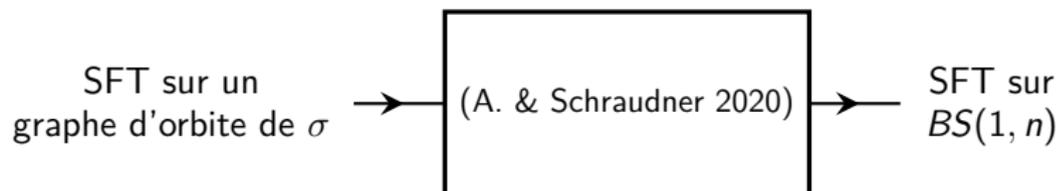
Nombre fini de tuiles pour encoder  $f$  rationnelle affine par morceaux.

Théorème (Esnay & Moutot 2020)

Il existe un SFT **fortement** aperiodique sur  $BS(1, n)$ .

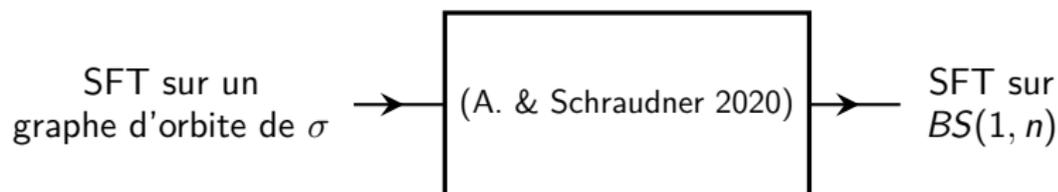
## Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique plus générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



# Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique plus générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



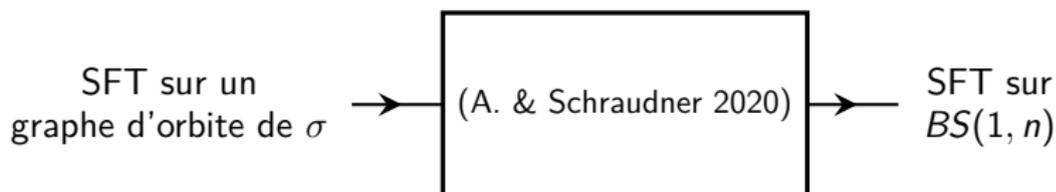
## Applications :

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .

# Des graphes d'orbites à $BS(1, n)$

Technique plus générale pour toute substitution  $\sigma$  avec  $\lambda > 1$  :



## Applications :

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Le problème du Domino est indécidable sur  $BS(1, n)$ .

Théorème (A. & Schraudner 2020)

Il existe un SFT **fortement** apériodique sur  $BS(1, n)$ .

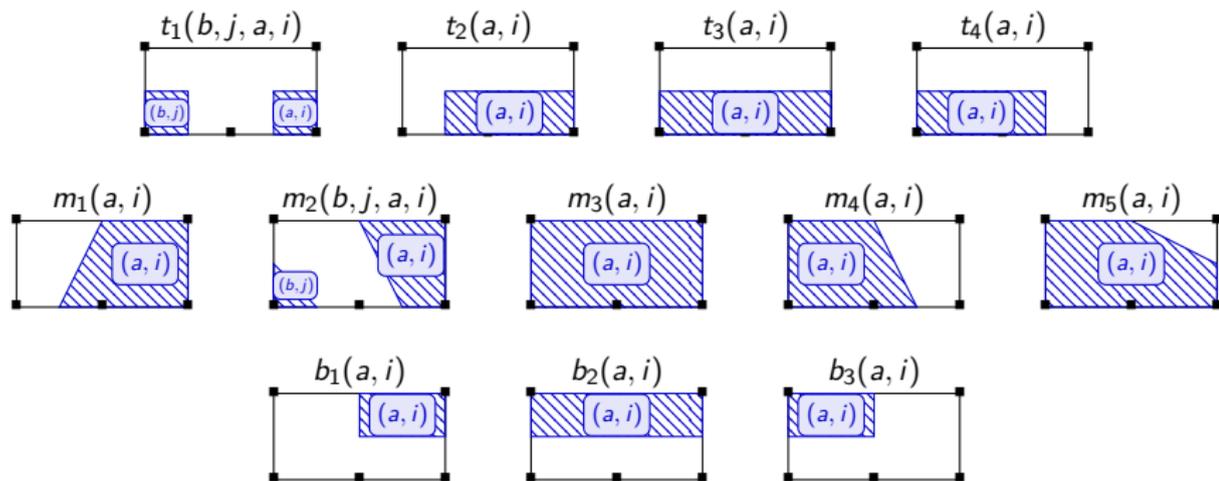
## Idée de la construction (I)

On replie  $BS(1, n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et on superpose un graphe d'orbite.

# Idée de la construction (I)

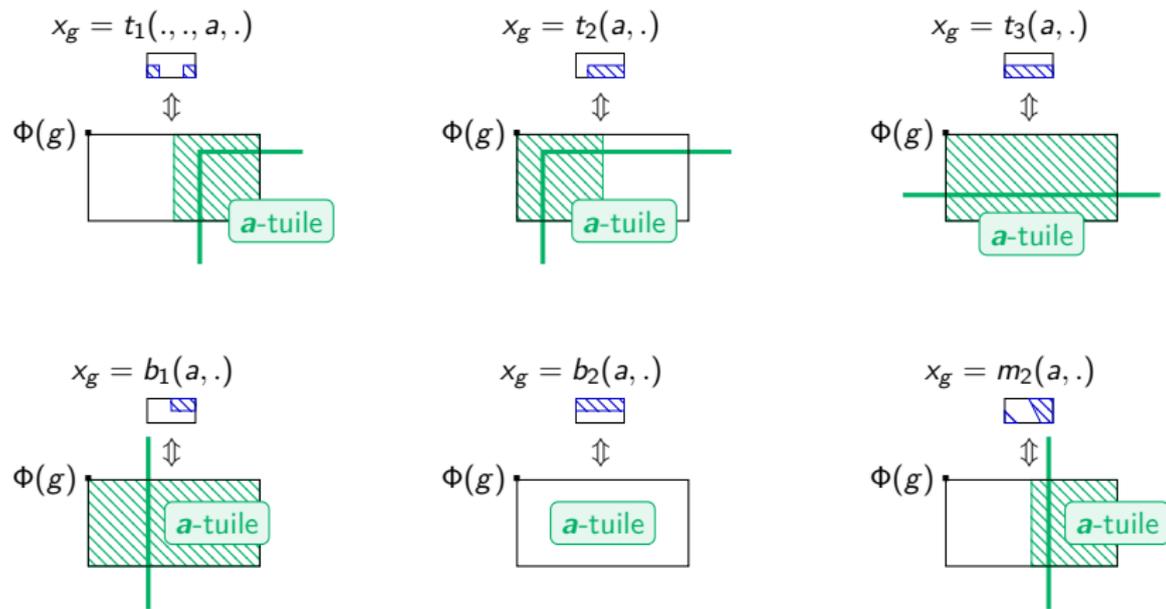
On replie  $BS(1, n)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et on superpose un graphe d'orbite.

Chaque  $g \in BS(1, n)$  code le contenu de sa  $\Phi$ -boîte.



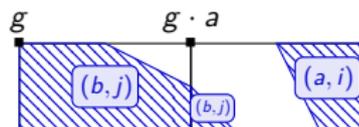
# Idée de la construction (II)

Intuition derrière l'alphabet

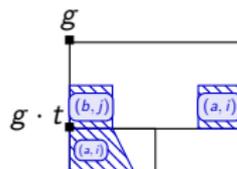


# Idée de la construction (III)

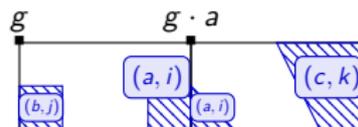
Règles locales pour dessiner des rectangles :



$$\begin{cases} x_g = m_5(b, j) \\ x_{g \cdot a} = m_2(b, j, a, i) \end{cases} \quad \checkmark$$



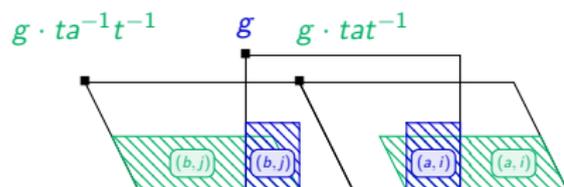
$$\begin{cases} x_g = t_1(b, j, a, i) \\ x_{g \cdot t} = m_4(a, i) \end{cases} \quad \checkmark$$



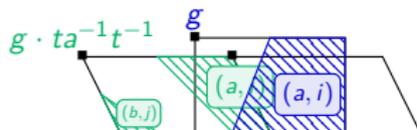
$$\begin{cases} x_g = t_1(b, j, a, i) \\ x_{g \cdot a} = m_2(a, i, c, k) \end{cases} \quad \times$$

# Idée de la construction (III)

Règles locales pour synchroniser les feuilles :



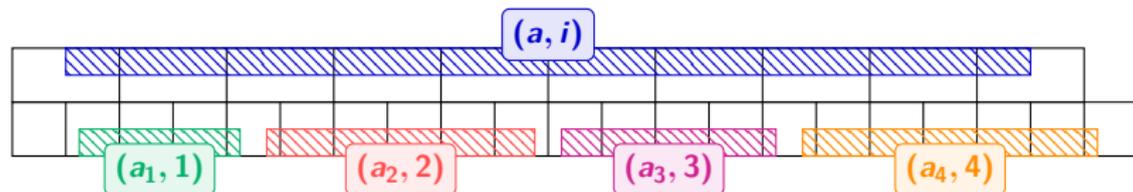
$$x_g = t_1(b, j, a, i) \Rightarrow \begin{cases} x_{g \cdot tat^{-1}} = t_2(a, i) \\ x_{g \cdot ta^{-1}t^{-1}} = t_4(b, j) \end{cases}$$



$$x_g = m_1(a, i) \Leftrightarrow x_{g \cdot ta^{-1}t^{-1}} = m_2(b, j, a, i)$$

## Idée de la construction (IV)

Règles locales pour coder la substitution :



avec  $\sigma(a) = a_1 \dots a_{|\sigma(a)|}$

# Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

# Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

**Sens facile** : d'un graphe d'orbite vers  $BS(1, 2)$

# Idée de la construction (V)

Pourquoi ça marche ?

**Sens facile** : d'un graphe d'orbite vers  $BS(1, 2)$

**Plus délicat** : de  $BS(1, 2)$  vers un graphe d'orbite

- ▶ chaque feuille de  $BS(1, 2)$  code un graphe d'orbite
- ▶ ce sont tous les mêmes !



Utilisation future des graphes d'orbites

## Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

# Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

**Exemples :**  $G = \mathbb{Z}$  avec

- ▶  $H = K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha = Id$

# Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

**Exemples :**  $G = \mathbb{Z}$  avec

- ▶  $H = K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha = Id$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = \mathbb{Z}^2$

# Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

**Exemples :**  $G = \mathbb{Z}$  avec

- ▶  $H = K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha = Id$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = \mathbb{Z}^2$
- ▶  $H = n\mathbb{Z}, K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha(n \cdot k) = k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

# Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

**Exemples :**  $G = \mathbb{Z}$  avec

- ▶  $H = K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha = Id$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = \mathbb{Z}^2$
- ▶  $H = n\mathbb{Z}, K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha(n \cdot k) = k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = BS(1, n)$

## Extensions HNN

$G = \langle S \mid R \rangle$  avec  $H, K$  deux sous-groupes de  $G$  isomorphes via  $\alpha : H \rightarrow K$ . L'**extension HNN relative** à  $\alpha$  est

$$G_{*\alpha} := \langle S, t \mid R, tht^{-1} = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle.$$

où  $t$  est une nouvelle lettre (pas dans  $S$ ).

**Exemples :**  $G = \mathbb{Z}$  avec

- ▶  $H = K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha = Id$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = \mathbb{Z}^2$
- ▶  $H = n\mathbb{Z}, K = \mathbb{Z}$  avec  $\alpha(n \cdot k) = k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = BS(1, n)$
- ▶  $H = n\mathbb{Z}, K = m\mathbb{Z}$  avec  $\alpha(n \cdot k) = m \cdot k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow G_{*\alpha} = BS(m, n)$

## Groupes à un relateur

$$G = \langle R \mid r \rangle$$

# Groupes à un relateur

$$G = \langle R \mid r \rangle$$

**(Freiheitssatz de Magnus, 1932)**

$$\begin{aligned} \Rightarrow G &= \langle S', t \mid r', t^{-1}ht = \alpha(h) \text{ pour tout } h \in H \rangle \\ &= \langle S' \mid r' \rangle_{*\alpha} \end{aligned}$$

avec  $H$  sous-groupe de  $\langle R' \mid r' \rangle$  et  $|r'| < |r|$

# Graphes d'orbites et groupe à un relateur

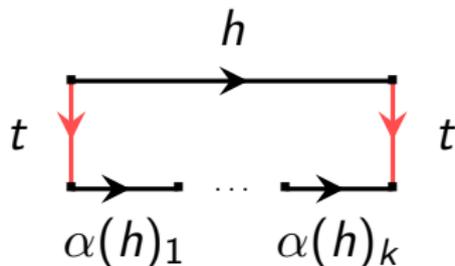
Travail en cours avec B. Hellouin et J. Esnay :

$$\langle S \mid R \rangle_{*\alpha} = \langle S, t \mid R, t^{-1}ht = \alpha(s) \text{ pour tout } h \in H \rangle$$

# Graphes d'orbites et groupe à un relateur

Travail en cours avec B. Hellouin et J. Esnay :

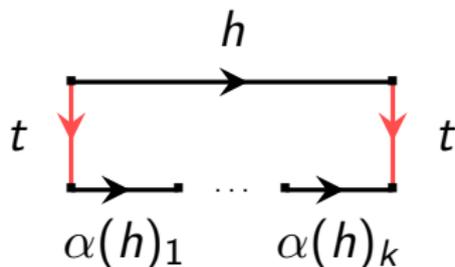
$$\langle S \mid R \rangle_{*\alpha} = \langle S, t \mid R, t^{-1}ht = \alpha(s) \text{ pour tout } h \in H \rangle$$



# Graphes d'orbites et groupe à un relateur

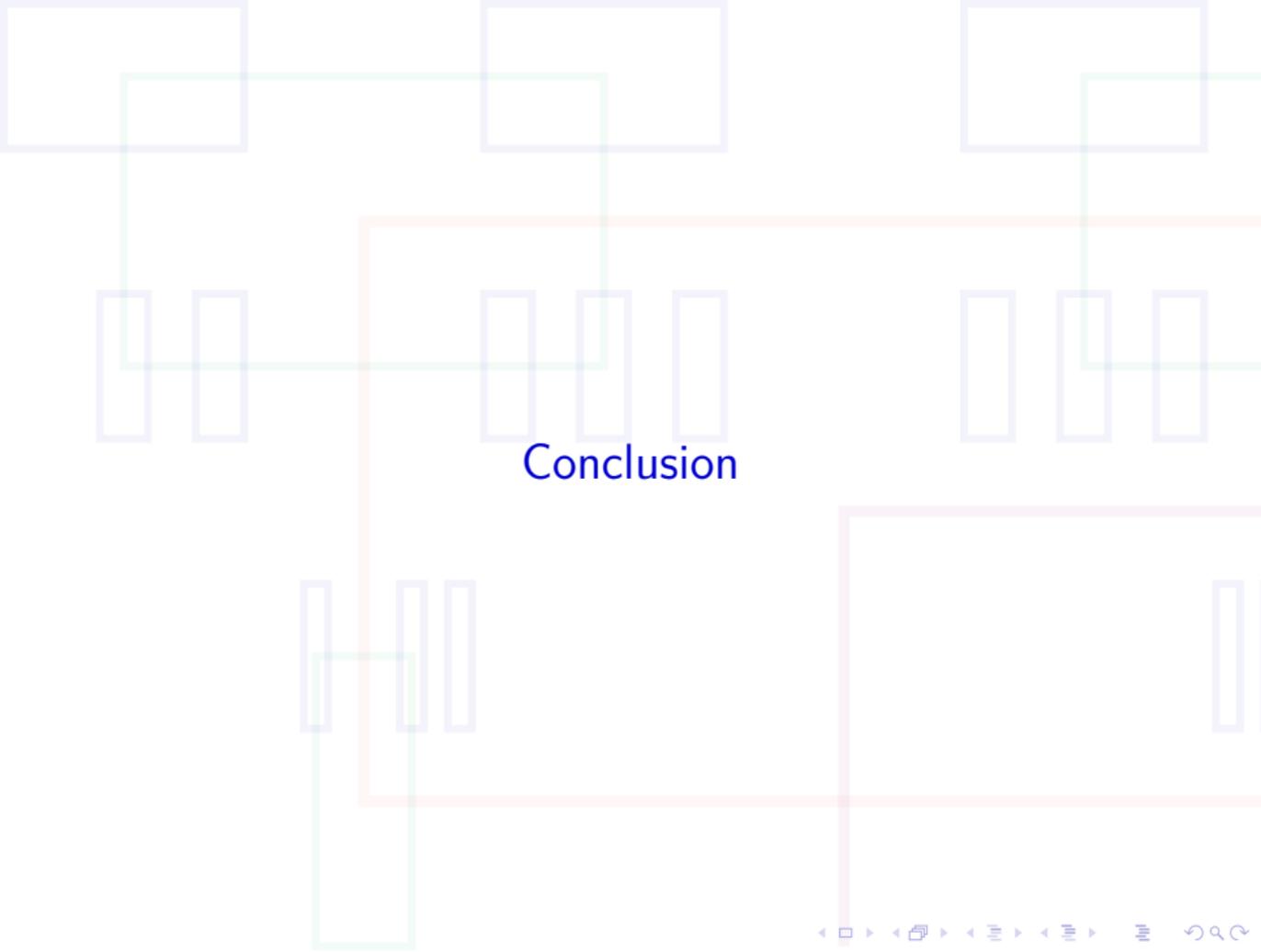
Travail en cours avec B. Hellouin et J. Esnay :

$$\langle S \mid R \rangle_{*\alpha} = \langle S, t \mid R, t^{-1}ht = \alpha(s) \text{ pour tout } h \in H \rangle$$



- ▶ Indécidabilité du problème du Domino ?
- ▶ Existence de SFTs a périodiques ?

pour les groupes à un relateur.



Conclusion

# Conclusion

Trois grandes questions :

- ▶ **Problème du Domino**
- ▶ **Apériodicité**
- ▶ **Effectivité**

# Conclusion

Trois grandes questions :

- ▶ **Problème du Domino**
- ▶ **Apériodicité**
- ▶ **Effectivité**

Interpréter les constructions classiques de **théorie combinatoire des groupes** en terme de **règles locales** pour mieux comprendre les décalages sur des groupes.