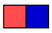
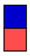
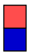
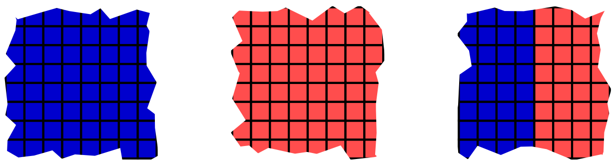
**Proposition de stage de L3 :**
**Recherche de bornes supérieures pour l'entropie de SFT 2D**

Les sous-décalages de type fini (SFT) sont des ensembles de coloriages de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$ qui respectent des contraintes locales, données par un ensemble fini de motifs interdits. Ces objets sont importants du point de vue des systèmes dynamiques (ils permettent de modéliser des $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}^2$-actions) comme de celui de la théorie de la calculabilité (on peut les voir comme des modèles de calculs, et certains problèmes faciles à résoudre sur $\mathbb{Z}$ deviennent indécidables sur $\mathbb{Z}^2$). Par exemple, le SFT $X$ obtenu en interdisant l'ensemble de motifs {  ,  ,  } contient les configurations suivantes :



deux configurations uniformes rouge et bleu, ainsi que toutes les translatées de la configurations de droite.

Une grande question dans l'étude des SFT est de réussir à les classifier à conjugaison près. Pour cela, on dispose de différents invariants de conjugaisons : si deux SFT n'ont pas la même valeur pour tel ou tel autre invariant, alors ils ne peuvent pas être conjugués. Un ce des invariants, l'entropie, se définit comme le taux de croissance du nombre de motifs autorisés de taille $n$ apparaissant dans les configurations du décalage :

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(p_X(n))}{n^d},$$

où $p_X(n)$ est le nombre de motifs autorisés de support $[0,n]^d$. En particulier, l'entropie du sous-décalage plein (où l'on interdit aucun motif) sur l'alphabet $\{0,1\}$ est $\log(2)$, tandis que l'entropie du sous-décalage plein sur l'alphabet $\{0,1,2\}$ est $\log(3)$, ce qui montre que ces deux décalages ne sont pas conjugués.

En dimension 1, l'entropie est aisément calculable pour les SFT. Elle s'obtient comme le logarithme de la plus grande valeur propre de la matrice associée au SFT, qui se calcule facilement à partir d'un ensemble fini de motifs interdits. Mais en dimension 2 et plus, l'entropie devient non calculable. Pire encore, même sur des exemples particuliers et simples de SFT, on est rarement capable de trouver une formule close donnant la valeur de l'entropie. Trouver des techniques permettant de prouver de bonnes bornes pour les SFT 2D est donc particulièrement utile, et peut se révéler parfois suffisant pour montrer que deux SFT ne sont pas conjugués. Un SFT beaucoup étudié est le sous-décalage de Fibonacci, dans lequel on interdit à deux symboles 1 d'être voisins immédiats (verticalement ou horizontalement en dimension 2). En dimension 1, on sait que l'entropie de ce SFT est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais en dimension supérieure sa valeur exacte n'est pas connue [Eng].

Durant ce stage, on s'intéressa aux techniques de matrices de transfert et assimilées, provenant de la mécanique statistique [Bax80]. Ces techniques ont permis de trouver des bornes inférieures [CR14] et supérieures [CR15] pour une certaine classe de SFT 2D sur $\{0, 1\}$, où l'on interdit les adjacences de symboles 1 selon certaines directions. Les auteurs de ces articles utilisent notamment des raffinement permettant d'augmenter la vitesse de convergence de la technique. Il serait intéressant d'en tirer une technique générale pour donner des bornes inférieures et supérieures, et de comprendre quelles modifications permettent, en général, d'accélérer la convergence.

**Objectifs du stage**

— Comprendre les techniques de matrices de transfert et de matrices de transfert de coin.
— Reproduire les calculs de [CR14] et [CR15].
— Tester ces techniques sur d'autres exemples ou classes de SFT 2D.

**Encadrants :** Nathalie Aubrun et Michael Rao.

## Références


[Bax80] Rodney J. Baxter : Hard hexagons : exact solution. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 13(3):L61, 1980.

[CR14] Yao-Ban Chan et Andrew Rechnitzer : Accurate lower bounds on two-dimensional constraint capacities from corner transfer matrices. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60:3845–3858, 2014.

[CR15] Yao-Ban Chan et Andrew Rechnitzer : Upper bounds on the growth rates of hard squares and related models via corner transfer matrices. *Preprint*, 2015.

[Eng] Konrad Engel : On the fibonacci number of an $m \times n$ lattice. *The Fibonacci Quarterly*, 28(1):72–78.