Proposition de stage de L3 :
Modèle de dimères sur les groupes de Baumslag-Solitar

Combien y a-t-il de façon de paver un échiquier de forme rectangle $m \times n$ avec des dominos ? La réponse à cette question en apparence simple a été donnée par Kasteleyn [Kas61] et Temperley et Fisher [TF61] en utilisant des méthodes différentes. De cette formule on déduit une formule asympotique pour le modèle des dimères, où l'on dispose des dominos sur une grille infinie, qui nous donne notamment l'entropie de ce modèle.

Le modèle des dimères est à la croisée de plusieurs domaines : combinatoire, physique statistique, dynamique symbolique. Il est plutôt bien compris lorsque l'on dispose des dominos sur une grille de taille infinie (que l'on peut voir comme le graphe de Cayley du groupe $\mathbb{Z}^2$ avec sa présentation usuelle $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$). On peut définir un modèle des dimères sur n'importe quel graphe infini biparti, et chercher à calculer son entropie, comprendre la structure des ensembles de pavages possibles d'un sous-graphe fini. Pour l'entropie, des résultats sont connus essentiellement dans le cas de graphes planaires [Ken98], ou lorsque le graphe ne contient pas le graphe biparti complet $K_{3,3}$ comme mineur : on peut notamment calculer le nombre de pavages possibles d'un sous-graphe fini fixé en temps polynomial [LP09].

Le but du stage sera de s'intéresser au modèle des dimères sur un graphe biparti qui contient $K_{3,3}$ comme mineur, le graphe de Cayley du groupe de Baumslag-Solitar $BS(1, 3)$. Ce groupe a pour présentation

$$BS(1, 3) \cong \langle a, b \mid ab = ba^3 \rangle.$$

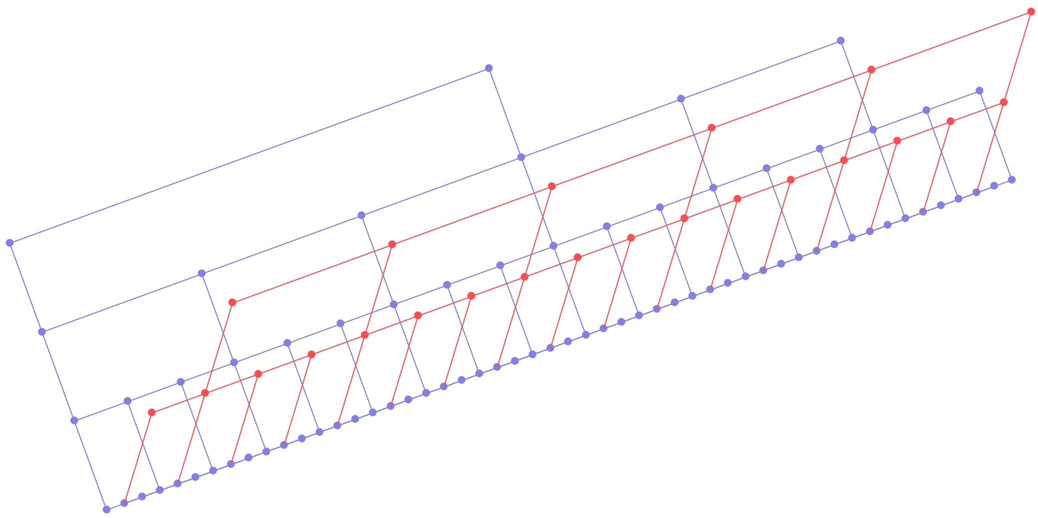

FIGURE 1 – Une partie du graphe de Cayley de $BS(1, 3)$.

Ce groupe est moyennable, ce qui permet de définir l'entropie du modèle des dimères de manière similaire à ce qui est fait dans la grille infinie $\mathbb{Z}^2$.

Objectifs du stage

- Comprendre le modèle des dimères sur $\mathbb{Z}^2$.
- Comprendre le groupe $BS(1,3)$ et son graphe de Cayley.
- Définir une opération de flip et une fonction hauteur pour montrer la flip-connexité de l'ensemble des pavages d'un sous-graphe fini fixé.
- Calculer la fonction de complexité et l'entropie du modèle (formule close et/ou approximation).

Remarque Ce stage sera co-encadré par Etienne Moutot. Possibilité de rémunération.

Références

[Kas61] P.W. Kasteleyn : The statistics of dimers on a lattice : I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209 – 1225, 1961.

[Ken98] Richard Kenyon : The planar dimer model with boundary : A survey. *In CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 307–328, 1998.

[LP09] László Lovász et Michael D. Plummer : *Matching Theory*. American Mathematical Society, 2009.

[TF61] H. N. V. Temperley et Michael E. Fisher : Dimer problem in statistical mechanics-an exact result. *The Philosophical Magazine : A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 6(68):1061–1063, 1961.