# Proposition de stage de M2 :
# Le problème du Domino à origine fixée sur un groupe

Les tuiles de Wang sont des carrés unitaires portant une couleur sur chaque arête. Si $t$ est une tuile de Wang, on appelle $t_N$ (resp. $t_S$,$t_E$,$t_W$) la couleur portée par l'arête nord (resp. sud, est, ouest) du carré. On peut assembler des tuiles de Wang si elles portent la même couleur sur leur côté commun, et produire ainsi des pavages finis ou infinis du plan. Partant d'un jeu de tuiles fini $\tau$, on notera $X_\tau$ l'ensemble des pavages valides du plan par $\tau$. On remarquera que cet ensemble peut être vide. Un résultat célèbre dû à Berger [Ber66] (dont la preuve sera ensuite simplifiée par Robinson [Rob71]) montre qu'on ne peut pas décider le problème de la pavabilité par un jeu de tuile de Wang (aussi appelé problème du Domino, noté **DP** dans la suite).

En assimilant le plan quadrillé au groupe $\mathbb{Z}^2$, un pavage du plan par $\tau$ devient une application $x : \mathbb{Z}^2 \to \tau$ qui vérifie les règles de voisinage, à savoir que $[x_{(i,j)}]_E = [x_{(i+1,j)}]_W$ et $[x_{(i,j)}]_N = [x_{(i,j+1)}]_S$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. Remplaçons à présent $\mathbb{Z}^2$ par un groupe $G$ engendré par les générateurs $s_1, \ldots, s_k$ et les carrés de Wang par des polygones à $2k$ côtés : on peut ainsi définir des pavages sur le groupe $G$ par un jeu de tuiles $\tau$ fini. Les mêmes questions que sur $\mathbb{Z}^2$ se posent, notamment celle de caractériser les groupes sur lesquels **DP** est décidable. Cette question, difficile, a conduit à la formulation de la conjecture suivante : **DP** est décidable sur le groupe $G$ si et seulement si $G$ est virtuellement libre [BS13].

Une variante, plus faible, du problème du Domino est le problème du Domino à origine fixée (**OCDP**). Cette fois-ci, on s'interroge sur l'existence d'un pavage valide en imposant à une tuile donnée d'apparaître à l'origine. Clairement, si ce problème est décidable, alors il en est de même pour **DP** (il suffit de lancer en parallèle l'algorithme résolvant **OCDP** pour chacune des tuiles du jeu de tuiles). Cependant, on ne sait rien sur l'implication réciproque.

L'objectif du stage est de se concentrer sur le problème à origine fixée. Il s'agira dans un premier temps de démontrer son caractère indécidable sur des exemples de groupes bien choisis (groupes de surface, ou groupe de l'allumeur de réverbères par exemple). Les preuves connues sur $\mathbb{Z}^2$, que l'on peut adpater à certains groupes ou structures [Rob78, Kar08, AK13], sont basées sur un encodage de système calculant simple (machine de Turing ou bien fonctions affines par morceaux). Une autre motivation du stage est de chercher, parmi les résultats d'indécidabilité connus (problème de l'arrêt pour les machines de Minsky à 2 compteurs, problème de correspondance de Post, etc. . .), ceux pour lesquels on peut trouver une réduction vers **OCDP**.

**Prérequis** Des connaissances de base en théorie des groupes ainsi qu'une bonne familiarité avec la théorie de la calculabilité sont fortement souhaitées.

**Objectifs du stage**

— Montrer que **OCDP** est indécidable sur les groupes de surface, le groupe de l'allumeur de réverbères.

— Trouver de nouvelles réductions pour montrer l'indécidabilité de **OCDP**.

— Pour quels groupes a-t-on l'équivalence *DP décidable* $\Leftrightarrow$ *OCDP décidable* ?

**Remarque** Possibilité de poursuite en thèse.

## Références

[AK13] Nathalie AUBRUN et Jarkko KARI : Tiling Problems on Baumslag-Solitar groups. *In MCU'13*, pages 35–46, 2013.

[Ber66] Robert BERGER : *The Undecidability of the Domino Problem*. American Mathematical Society, 1966.

[BS13] Alexis BALLIER et Maya STEIN : The domino problem on groups of polynomial growth. *arXiv preprint arXiv1311.4222.*, 2013.

[Kar08] Jarkko KARI : On the undecidability of the tiling problem. *In Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM)*, pages 74–82, 2008.

[Rob71] Raphael ROBINSON : Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.

[Rob78] Raphael M. ROBINSON : Undecidable tiling problems in the hyperbolic plane. *Inventiones Mathematicae*, 44:159–264, 1978.