Proposition de stage de M2 :
Sous-décalages sur le groupe de Higman

encadré par Nathalie Aubrun, LISN-Université Paris-Saclay

La dynamique symbolique étudie les sous-décalages, qui sont des ensembles de coloriages d'un groupe G par un ensemble fini de couleurs A, dans lesquels certains motifs fini sont interdits. Des exemples importants de sous-décalages sont les sous-décalages de type fini (SFT), qui sont ceux pour lesquels il suffit d'interdire un ensemble fini de motifs. Parmi les questions difficiles sur ces objets, se trouve le problème du domino – pour quels groupes G peut-on décider si un SFT est vide ou non ? – et le problème de l'existence de SFT apériodiques – SFT dont les configurations ne présentent aucune invariance par translation. Dans ce stage on propose de s'intéresser à un groupe particulier, le groupe de Higman, encore peu étudié avec cette approche.

Le groupe H de Higman, qui est le groupe de présentation finie

$$H := \langle a, b, c, d \mid ba = ab^2, cb = bc^2, dc = cd^2, ad = da^2 \rangle,$$

est apparu en 1951 comme exemple de groupe de présentation finie ne possédant pas de sous-groupe normal d'indice fini [Hig51]. On peut également montrer que H se définit à partir de plusieurs copies du groupe $BS(1,2)$ combinées entre elles par plusieurs opérations de produits amalgamés. Un premier objectif du stage sera de comprendre comment interagissent les différentes structures $BS(1,2)$ qui forment ce groupe.

Les SFT sur les groupes de Baumslag-Solitar $BS(1,n)$ sont plutôt bien compris : on sait que le problème de décider si un SFT est vide est indécidable [AK13], et il existe des constructions de SFT fortement apériodiques [EM20, AS20]. On pourra notamment essayer de généraliser les outils et techniques présentés dans ces articles au groupe de Higman H.

Objectifs du stage

- Comprendre la structure du groupe de Higman.
- Lire les articles concernant $BS(1,2)$.
- Essayer d'adapter les techniques fonctionnant sur $BS(1,2)$ au groupe de Higman pour démontrer l'indécidabilité du problème du domino et/ou construire un SFT fortement apériodique.
- S'attaquer à la question : est-ce que les sous-décalages effectifs sur H sont aussi sofiques ?

Remarque Possibilité de rémunération.

Références

[AK13] Nathalie Aubrun et Jarkko Kari : Tiling problems on baumslag-solitar groups. *In* Turlough Neary et Matthew Cook, éditeurs : Proceedings *Machines, Computations and Universality 2013,* Zürich, Switzerland, 9/09/2013 - 11/09/2013, volume 128 de *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pages 35–46. Open Publishing Association, 2013.

[AS20] Nathalie Aubrun et Michael Schraudner : Tilings of the hyperbolic plane of substitutive origin as subshifts of finite type on baumslag-solitar groups $bs(1,n)$. `https://arxiv.org/abs/2012.11037`, 2020.

[EM20] Julien Esnay et Etienne Moutot : Weakly and Strongly Aperiodic Subshifts of Finite Type on Baumslag-Solitar Groups. `https://arxiv.org/abs/2004.02534`, 2020.

[Hig51] Graham Higman : A finitely generated infinite simple group. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-26(1):61–64, 01 1951.