Graphes et outils logiques – Examen – 16 mai 2019

L'examen dure 2 heures. Les indications de barème sont approximatives. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscrite recto-verso.

Exercice 1 *Logique (3 points)*

1. Dans chacun des cas suivants, indiquer ce que l'on peut éventuellement déduire sur A. Justifier.

   (a) si $A \vee B$ est faux (b) si $A \wedge B$ est faux (c) si $A \Rightarrow B$ est faux (d) si $A \Rightarrow A$ est vrai

2. Soient φ_1 et φ_2 deux formules, et x une variable. Montrer que toute interprétation validant la formule $(\varphi_1 \vee x) \wedge (\varphi_2 \vee \neg x)$ valide aussi la formule $\varphi_1 \vee \varphi_2$. Que dire de l'implication inverse ? Justifier.

Exercice 2 *Relation bien fondée (4 points)*

On s'intéresse à des relations binaires R sur un ensemble A. On dit qu'une relation est bien fondée s'il n'existe pas de suite infinie $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i,\ R(a_{i+1}, a_i)$. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

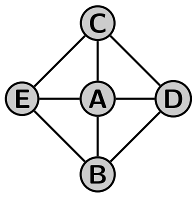
1. On se donne une fonction $f : A \to \mathbb{N}$. On définit une relation R sur A par $R(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y)$ avec $<$ l'ordre strict usuel sur les entiers. Montrer que la relation R est bien fondée.
2. On prend $A = \{0,1\}$, on définit deux fonctions f et g par $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$ et $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1-x$ et la relation R par $R(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y) \vee g(x) < g(y)$. Montrer que l'on a $R(0,1)$ et $R(1,0)$ et que R n'est pas bien fondée.
3. On se donne deux fonctions f et g dans $A \to \mathbb{N}$. On suppose que pour tous x, y on a $f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \le g(y)$ et $g(x) < g(y) \Rightarrow f(x) \le f(y)$. On définit la relation R par $R(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) < f(y) \vee g(x) < g(y)$.
   (a) Montrer que $R(x,y) \Rightarrow f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.
   (b) En déduire que R est bien fondée.

Exercice 3 *Coupure dans un graphe (6 points)*

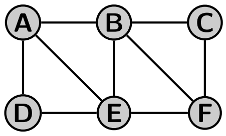
On appelle *coupure* d'un graphe G non orienté connexe avec au moins deux sommets, un ensemble C d'arêtes tel que le graphe G sans les arêtes de C n'est plus connexe (il existe deux sommets qui ne sont pas reliés par un chemin). On dit que la coupure est *minimale* s'il n'y a pas d'autre coupure avec moins d'arête.

On utilisera comme exemples les graphes G_1, G_2 et G_3 suivants. Pour déconnecter G_1 il faut retirer au moins 3 arêtes (par exemple $\{CE, CA, CD\}$: le sommet C est alors isolé du reste du graphe).

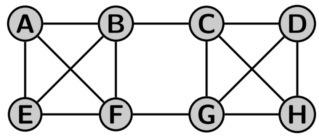
G_1



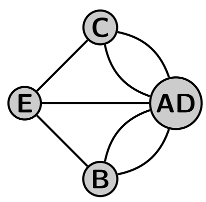
G_2



G_3



1. Donner une coupure minimale pour chacun des graphes G_2 et G_3.
2. Que peut-on dire de la taille de la coupure minimale par rapport au plus petit degré d'un sommet d'un graphe G quelconque ?
3. Donner un exemple de graphe connexe dont tous les sommets ont un degré plus grand que deux mais qui a une coupure de taille 1.
4. Si le graphe n'a que deux sommets, quelle est la coupure minimale ?
5. Une boucle peut-elle appartenir à une coupure minimale ? pourquoi ?
6. Soit un graphe G et une arête a de ce graphe entre les sommets s et s'. On construit un graphe G' en retirant l'arête a et en fusionnant les deux sommets s et s' en un nouveau sommet que l'on notera ss'. Toutes les arêtes qui arrivaient à s ou s' dans G arrivent dans G' sur le sommet ss'. Les autres extrémités ne sont pas changées. On peut créer par ce processus des arêtes parallèles (mais on supprime les boucles qui pourraient être ainsi créées par les arêtes entre s et s'). Sur l'exemple du graphe G_1, en retirant ainsi l'arête entre les sommets A et D on obtient le graphe ci-contre.



   (a) Dessiner les graphes obtenus par ce procédé à partir du graphe G_3 en retirant d'abord l'arête f puis, en retirant l'arête h au graphe obtenu à l'étape précédente.
   (b) Comparer dans le cas général le nombre de sommets et le nombre d'arêtes dans G et G'.
   (c) Comparer le degré d'un sommet dans le graphe G par rapport au degré du sommet dans le graphe G', traiter le cas d'un sommet qui n'est ni s ni s' puis le cas du sommet fusionné ss'.
   (d) Montrer que s'il y a un chemin entre deux sommets du graphe G' alors il y a un chemin entre les sommets correspondants dans le graphe G. Si le chemin a pour extrémité le sommet fusionné ss' dans G' on montrera qu'il y a un chemins dans G d'extrémité s et un d'extrémité s'.

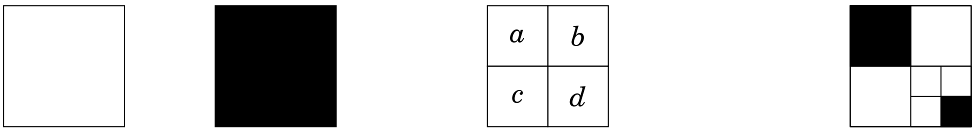
(e) En déduire qu'une coupure de G' est aussi une coupure de G.

(f) Si la coupure est minimale dans G' est-elle aussi minimale dans G ?

Exercice 4 *Quadtree (8 points)*

On peut représenter des images carrées de taille $2^n \times 2^n$ en noir et blanc par des arbres quaternaires. Si le carré est uniformément noir on le représente par une constante `N`, s'il est uniformément blanc, on le représente par une constante `B`, sinon on découpe l'image en quatre quadrants a, b, c, d de côté 2^{n-1} (cf figure ci-dessous pour la position des quadrants), on construit récursivement des arbres q_a, q_b, q_c et q_d, correspondant à chacun des quadrants et on représente l'image complète par le nouvel arbre $\texttt{Quad}(q_a, q_b, q_c, q_d)$.

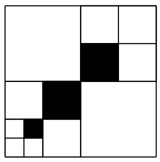
La signature des termes qui représentent les quadtrees est donc formée de deux constantes `N` et `B` et d'un symbole `Quad` d'arité 4. L'ensemble des termes formés sur cette signature est noté QT.



$q_1 = \texttt{B}$ $\quad$ $q_2 = \texttt{N}$ $\quad$ $q_3 = \texttt{Quad}(q_a, q_b, q_c, q_d)$ $\quad$ $q_4 = \texttt{Quad(N,B,B,Quad(B,B,B,N))}$

FIGURE 1: Principe de construction des quadtrees et exemple

1. Donner le terme qui correspond à l'image suivante :



2. Énoncer le principe de récurrence associé à la définition des quadtree.
3. On définit par des équations récursives sur la structure des quadtree une fonction `inv` qui prend en argument un arbre et change les carrés blancs en des carrés noirs et inversement.

$$\texttt{inv(N)} = \texttt{B} \quad \texttt{inv(B)} = \texttt{N} \quad \texttt{inv}(\texttt{quad}(a, b, c, d)) = \texttt{quad}(\texttt{inv}(a), \texttt{inv}(b), \texttt{inv}(c), \texttt{inv}(d))$$

Montrer par récurrence sur la structure des quadtree la propriété suivante :

$$\forall t \in QT, \texttt{inv}(\texttt{inv}(t)) = t$$

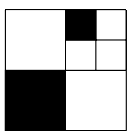
4. Définir par des équations récursives sur la structure des quadtree une fonction `nbnoirs` qui prend en argument un quadtree et un entier n (si le quadtree représente une image dont le côté fait 2^n unités) et compte le nombre de carrés unitaires noirs dans l'image. On suppose que n est plus grand que la profondeur de l'arbre (c'est-à-dire le nombre max de nœuds `Quad` imbriqués).

On a sur l'exemple de la figure 1 : $\texttt{nbnoirs}(2, q_4) = 5$, en effet si on considère l'image comme étant de 4×4 unités, le carré noir en haut à gauche est composé de 4 carrés unitaires.

5. Soit q un quadtree, montrer par récurrence sur n que si n est plus grand que la profondeur de q alors $\texttt{nbnoirs}(n+1, q) = 4 \times \texttt{nbnoirs}(n, q)$.
6. On s'intéresse à une relation binaire `rot` entre les quadtree qui consiste à faire tourner des sous-quadrants un nombre arbitraire de fois (éventuellement 0). Une rotation élémentaire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre à partir de $q_3 = \texttt{Quad}(q_a, q_b, q_c, q_d)$ donnera par exemple $q'_3 = \texttt{Quad}(q_b, q_d, q_a, q_c)$.

(a) Donner un système d'inférence pour définir la relation `rot`. On aura en particulier une règle d'inférence pour le cas de base qui correspond à ne faire aucune rotation, un cas dans lequel on fait tourner les sous-quadrants et un cas dans lequel on fait tourner le quadrant principal, sans oublier la possibilité d'enchainer successivement ces opérations.

(b) Soit la figure



Définir le terme $q_5 \in QT$ correspondant à cette image et construire un arbre de dérivation qui prouve $\texttt{rot}(q_4, q_5)$.

(c) Donner le principe d'induction associé à la définition de `rot`.

(d) Utiliser ce principe pour montrer que pour tout $q, q' \in QT$, si $\texttt{rot}(q, q')$ alors $\texttt{nbnoirs}(q) = \texttt{nbnoirs}(q')$.