

## Partiel - 14 mars 2019

*L'examen dure 2 heures. Les indications de barème sont approximatives. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscrite recto-verso. **Ne pas cacheter les copies.***

### Exercice 1 *Enigme (4 points).*

Nous visitons un hôpital psychiatrique dans lequel les docteurs disent toujours la vérité, les patients mentent toujours et les infirmiers tantôt mentent, tantôt disent la vérité. Toutes ces personnes sont bien sûr indiscernables. Deux personnes,  $A$  et  $B$ , se présentent.

- $A$  dit : "Je suis un infirmier." ( $P_1$ )
- $B$  déclare : "Nous sommes deux malades." ( $P_2$ )
- $A$  dit : "Si je suis un malade, alors  $B$  est un infirmier." ( $P_3$ )
- $B$  ajoute : "Si je suis un malade, alors  $A$  est un infirmier." ( $P_4$ )

Le but de l'exercice est de découvrir qui sont  $A$  et  $B$ . Pour cela on introduit 3 valeurs :  $d$  pour représenter un docteur,  $i$  pour un infirmier et  $m$  pour un malade. Par exemple, la phrase  $P_1$  dite par  $A$  peut se traduire par la formule  $A : i$ .

### Questions.

1. Traduire de la même manière les trois autres phrases échangées  $P_2, P_3, P_4$  en des formules logiques qui pourront utiliser les symboles  $A, B, m, i, d, :,$  et les connecteurs propositionnels.
2.  $A$  et  $B$  pouvant chacun être associé à l'une des valeurs  $d, i$  ou  $m$ , combien y-a-t-il de possibilités différentes à considérer (en regardant tous les cas possibles sans tenir compte des phrases échangées)?
3. Faire un tableau qui pour chaque valeur possible de  $A$  et de  $B$  donne la valeur de vérité des formules  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$
4. Sur chaque ligne du tableau précédent, et pour chaque phrase, indiquer si elle a pu être dite. Par exemple si  $A$  est un docteur, il dit la vérité et donc il ne peut pas dire la phrase  $P_1$  qui serait un mensonge.
5. A-t-on assez d'information pour retrouver le statut de  $A$  et de  $B$ ? justifier votre réponse.

### Exercice 2 *Démonstrations (3 points).*

Considérons  $A, B, C$  trois formules et  $E, F$  deux ensembles, tous arbitraires. Rédiger des démonstrations détaillées des propositions suivantes.

1.  $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
2.  $((A \vee \neg B) \wedge B) \Rightarrow A$
3.  $E \subseteq F \Rightarrow E \cap F = E$

### Exercice 3 *Récurrence (2 points).*

On note  $I_k$  la somme des nombres impairs compris entre 0 et  $k$ . Ainsi par exemple,  $I_5 = 1 + 3 + 5 = 9$ . Par récurrence sur  $n$ , montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = n^2$$



- La racine est la configuration dans laquelle la grille est vide.
- Les arêtes correspondent aux coups qui peuvent être joués. Si une arête a une source  $C$ , alors sa cible est une configuration qui peut être atteinte à partir de  $C$  lorsque le joueur dont c'est le tour place son symbole dans l'une des cases non encore occupées (en supposant qu'aucun des deux joueurs n'a déjà gagné dans la configuration  $C$ ).

Ainsi, chaque partie correspond à un chemin de la racine vers une feuille de cet arbre.

Eloïse prend le rôle de  $X$  et joue contre  $\forall$ bélar. On dira qu'une configuration est :

- *gagnante* si Eloïse peut gagner à coup sûr (en supposant qu'elle joue bien),
- *perdante* si Eloïse ne peut pas empêcher  $\forall$ bélar de gagner (en supposant qu'il joue bien),
- *irrésolue* si elle n'est ni gagnante ni perdante.

### Questions.

1. On cherche à estimer les dimensions de l'arbre du jeu de morpion.
  - (a) Quel est la hauteur de cet arbre?
  - (b) Quels sont les valeurs possibles pour le degré sortant d'un sommet de profondeur  $k$ ?
  - (c) En déduire une borne supérieure pour le nombre de sommets (c'est-à-dire un nombre  $N$  pour lequel il est certain que l'arbre n'a pas plus de  $N$  sommets).
2. Quel est le point commun entre toutes les configurations de profondeur paire dans l'arbre? Expliquer comment, une configuration étant donnée, on peut savoir qui sera le prochain à jouer.
3. Parmi les situations suivantes, dire lesquelles sont possibles ou impossibles. Justifier brièvement chaque réponse.
  - (a) Eloïse joue depuis une position gagnante et arrive à une position irrésolue.
  - (b)  $\forall$ bélar joue depuis une position gagnante et arrive à une position irrésolue.
  - (c) Eloïse joue depuis une position irrésolue et arrive à une position gagnante.
  - (d)  $\forall$ bélar joue depuis une position irrésolue et arrive à une position gagnante.
4. Parmi les critères suivants, préciser lesquels décrivent une configuration gagnante, perdante, irrésolue, ou aucun de ces trois cas en particulier. Justifier brièvement chaque réponse.
  - (a) C'est à Eloïse de jouer et l'un des coups mène à une position gagnante.
  - (b) C'est à  $\forall$ bélar de jouer et l'un des coups mène à une position gagnante.
  - (c) C'est à  $\forall$ bélar de jouer et tous les coups mènent à une position gagnante.
  - (d) C'est à Eloïse de jouer et il existe un chemin menant à une position gagnante.
  - (e) C'est à  $\forall$ bélar de jouer et pour tout coup qu'il peut jouer il existe ensuite un coup d'Eloïse menant à une position gagnante.
  - (f) C'est à  $\forall$ bélar de jouer et il existe un coup qu'il peut jouer tel que tous les chemins mènent ensuite à des positions perdantes.
5. Proposer un algorithme pour déterminer quelles sont les configurations gagnantes.
6. Pourquoi les deux protagonistes ont-ils été nommés Eloïse et  $\forall$ bélar?