Graphes et outils logiques
`http://www.lri.fr/~blsk/GOL`

TD1 - Rappels de logique

Exercice 1 *Raisonnements corrects et incorrects*

Une mère dit à son fils : “s'il pleut, tu ne sors pas”. Ce que dit la mère est vrai.

1. S'il ne pleut pas, peut-on en déduire que le fils sort ?
2. Le fils sort, peut-on en déduire qu'il ne pleut pas ?
3. Le fils ne sort pas, peut-on en déduire qu'il pleut ?

Exercice 2 *Énigme logique*

Un garçon (Basile) et deux filles (Alice et Carole) jouent dans le salon et ont cassé un vase. Leurs parents les interrogent pour savoir qui est coupable d'avoir touché le vase.

— Alice dit : « Carole a touché le vase et Basile n'a rien fait ».
— Basile dit : « Je suis innocent et l'une des filles a touché le vase ».
— Carole dit : « Si Alice a touché le vase alors Basile aussi ».

Les parents cherchent à comprendre ce qui s'est réellement passé. Pour résoudre le problème on introduit trois variables propositionnelles A pour « Alice a touché le vase », B pour « Basile a touché le vase » et C pour « Carole a touché le vase ».

1. Traduire les trois réponses des enfants en formules propositionnelles qui utilisent les variables A, B et C et les connecteurs logiques.
2. En considérant tous les cas possibles pour les variables A, B et C donner (dans un même tableau) les valeurs de vérité des trois formules précédentes.
3. À supposer que chaque enfant dise la vérité, peut-on déduire de la table de vérité précédente qui est coupable d'avoir touché le vase ? (Il peut y avoir plusieurs coupables.)
4. On suppose maintenant qu'un seul enfant ment, peut-on en déduire ce qui s'est passé et qui a menti ?

Exercice 3 *Formaliser*

On se place dans un langage avec les prédicats suivants qui parlent de personnes et d'aliments :

$\mathtt{aime}(x, y)$	x aime l'aliment y
$\mathtt{mange}(x, y)$	x mange l'aliment y
$x = y$	x et y sont égaux

ainsi qu'une constante `moi` qui représente la personne qui parle et une constante `céleri` représentant un aliment.

1. Traduire les formules suivantes en langage naturel
   (a) $\forall x, \exists y, \mathtt{mange}(x, y)$
   (b) $\exists y, \forall x, \mathtt{mange}(x, y)$
   (c) $\exists x, \forall y, \mathtt{mange}(x, y)$
   (d) $\forall x\, y\, z, \mathtt{aime}(x, y) \wedge \mathtt{aime}(x, z) \Rightarrow (y = z)$
2. Exprimer par des formules logiques sur le langage précédent les propositions suivantes
   (a) J'aime tout ce que je mange
   (b) Je mange tout ce que j'aime
   (c) Je n'aime pas le céleri, mais j'en mange

   (d) Si j'aime le céleri, alors je mange de tout
   (e) Je ne mange que du céleri
3. Les formules 2a et 2b sont-elles équivalentes ?
4. On suppose la formule 2c vraie, peut-on en déduire que 2d est vraie ?

Exercice 4 *Raisonnement sur les ensembles.*

1. Soient A, B et C trois ensembles quelconques. Comparer les ensembles $(A \cap B) \cup C$ et $A \cap (B \cup C)$.
2. Soient A, B deux ensembles quelconques, et f une application de A dans B. Si $Y \subseteq B$ on note $f^{-1}(Y)$ l'image inverse de Y par f qui est l'ensemble des éléments de A dont l'image par f appartient à Y.
   (a) Donner une formule logique équivalente à la propriété $x \in f^{-1}(Y)$.
   (b) Soient Y_1, Y_2 deux sous-ensembles de B. Montrer que si $Y_1 \subseteq Y_2$ alors $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.
   (c) Comparer dans le cas général $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ et $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercice 5 *Récurrence simple.*

Rédigez une récurrence classique pour montrer la propriété suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 6 *Raisonnements corrects et incorrects*

1. Toto veut montrer par récurrence que dans toutes les boîtes de crayons, tous les crayons sont de la même couleur. Il fait la preuve suivante
   — C'est vrai de manière évidente si $n = 1$
   — On va montrer que si la propriété est vraie dans une boite qui contient n crayons alors elle est encore vraie dans une boîte qui en contient $n+1$. On prend donc une boîte qui contient $n+1$ crayons. On retire le premier crayon de la boîte, par hypothèse de récurrence, les crayons restants sont tous de la même couleur. On retire maintenant le dernier crayon de la boîte, par hypothèse de récurrence, les crayons restants sont tous de la même couleur (la couleur des crayons du milieu). Tous les crayons de la boîte ont donc la même couleur.
   — Par récurrence on peut donc conclure que tous les crayons de la boîte ont la même couleur.

   Toto s'est évidemment trompé quelque part dans son raisonnement car le résultat est faux, pouvez-vous dire à quel endroit ?
2. Toto affirme maintenant la propriété suivante : “dans tout bar qui n'est pas vide, je peux trouver une personne telle que si cette personne boit alors tout le monde dans le bar boit”

   Toto a-t-il tort ou a-t-il raison ?
3. Entendu dans un reportage : “Ce pleur de faim est commun à tous les enfants du monde. La preuve avec le petit Paul, 1 mois.” Qu'en penser ?