TD2 - Théorie des graphes

Exercice 1 *Degrés des sommets d'un graphe*

Soit un graphe G fini non orienté avec n sommets et m arêtes.

1. Exprimer la somme des degrés des sommets en fonction du nombre d'arêtes.
2. Soit K le plus grand degré parmi les sommets du graphe, montrer que $K \leq 2m$ et donner un exemple pour lequel on a $K = 2m$.
3. On suppose maintenant que G est un graphe simple (sans boucle ni arête multiple).
   (a) Donner une borne sur le nombre d'arêtes en fonction du nombre de sommets et un exemple pour lequel cette borne est atteinte.
   (b) Montrer que $K \leq n-1$ et donner un exemple pour lequel on a $K = n-1$.

Exercice 2 *Clique*

Une clique est un graphe dont tous les sommets différents sont reliés par exactement une arête. On note K_n la clique qui a n sommets.

1. Dessiner les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.
2. Combien y a-t-il d'arêtes dans K_n ?
3. Combien de couleurs sont-elles nécessaires pour colorier K_n ?
4. Montrer que le graphe K_4 est planaire (il peut être dessiné sans que les arêtes ne se croisent).
5. A votre avis, le graphe K_5 est-il planaire ?

Exercice 3 *Coloration*

On se donne un ensemble E d'étudiants et un ensemble C de cours. Chaque étudiant est inscrit à un sous-ensemble de cours $I(E) \subseteq C$ et doit passer l'examen de chacun des cours auxquels il est inscrit.

Chaque épreuve se déroule sur une demi-journée. Le responsable d'année se demande quel nombre minimum de demi-journées il doit réserver pour les examens afin que chaque étudiant puisse passer tous les examens auquel il est inscrit sans conflit d'emploi du temps.

1. Montrer que ce problème se ramène à un problème de coloriage de graphe. On explicitera l'ensemble des sommets, l'ensemble des arêtes et la signification du coloriage.
2. On suppose qu'il y a deux étudiants e_1, e_2 et quatre cours c_1, c_2, c_3, c_4 avec les inscriptions suivantes : $I(e_1) = \{c_1, c_2, c_3\}$ et $I(e_2) = \{c_3, c_4\}$. Construire le graphe associé et déterminer le nombre de demi-journées d'examens nécessaires.
3. On suppose qu'il y a 5 étudiants et 5 cours, que chaque cours est suivi par au moins un étudiant et que chaque étudiant suit exactement 2 cours. Trouver une configuration dans laquelle trois demi-journées sont nécessaires.

Exercice 4 *Coloration d'arêtes*

On cherche à planifier les matchs d'un tournoi auquel participent n joueurs. On construit un graphe dont les sommets sont les joueurs, chaque match est représenté par une arête entre les deux joueurs qu'il oppose.

1. Planifier les matchs dans le temps se ramène à associer une couleur à chaque arête. Exprimer quelle condition doit vérifier ce coloriage pour que les matchs puissent se jouer sans conflit.
2. Donnez une borne inférieure sur le nombre de couleurs nécessaires en fonction des caractéristiques du graphe.
3. On se place maintenant dans le cas où chaque joueur doit rencontrer chaque autre joueur exactement une fois.
   (a) Reconnaissez-vous le graphe correspondant ? Combien a-t-il d'arêtes ?
   (b) Quel est le nombre maximal de matchs qui peuvent avoir lieu en même temps ?
   (c) Proposez un coloriage qui convient pour $n = 4$ et $n = 5$.

Exercice 5 *Un algorithme de coloration*

Pour un graphe G quelconque, notons $\Delta(G)$ son degré maximal, c'est-à-dire le plus grand degré de ses sommets. On veut comparer $\Delta(G)$ et le nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets du graphe.

1. Donner un graphe G tel que $\Delta(G) = 6$, dont les sommets peuvent être colorés avec seulement deux couleurs.
2. Donner un graphe G tel que $\Delta(G) = 3$, dont les sommets ne peuvent pas être colorés avec seulement trois couleurs.
3. Démontrer par récurrence sur n qu'un graphe G à n sommets peut être coloré en n'utilisant pas plus que $\Delta(G)+1$ couleurs.
4. Déduire de la démonstration précédente un algorithme simple pour colorer les sommets d'un graphe, et montrer sur un exemple que l'algorithme ne donne pas toujours le nombre minimum de couleurs.