# TD3 - Théorie des graphes

**Exercice 1** *Circuits Hamiltoniens*
L'hypercube de dimension $n$ est un graphe défini comme suit :

— ses sommets sont les mots de longueur $n$ sur l'alphabet $\{0,1\}$,
— il y a une arête entre le sommet $a_1 \dots a_n$ et le sommet $b_1 \dots b_n$ si et seulement si les deux mots diffèrent d'une seule lettre, c'est-à-dire s'il existe un entier $i$ entre $1$ et $n$ tel que $a_i \neq b_i$ et pour tout entier $j$ entre $1$ et $n$, si $j \neq i$ alors $a_j = b_j$.

On rappelle qu'un circuit hamiltonien est un cycle qui passe une unique fois par chaque sommet.

1. Dessiner les graphes $HC_0$, $HC_1$, $HC_2$, $HC_3$.
2. Quel sont le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, et le degré des sommets du graphe $HC_n$ ?
3. Construire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension 2.
4. On suppose que l'on connait un circuit hamiltonien dans l'hypercube de dimension $n$, montrer comment en déduire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension $n+1$.
5. En déduire des circuits hamiltoniens des hypercubes de dimensions $3$ et $4$.

**Exercice 2** *Cycles eulériens (une preuve fausse d'un vrai théorème)*
On rappelle qu'un cycle eulérien d'un graphe est un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête de ce graphe. Le théorème d'Euler-Hierholzer énonce qu'un graphe non orienté connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets ont un degré pair.

1. Montrer qu'un graphe non orienté admettant un cycle eulérien est tel que tous ses sommets ont un degré pair.
2. Soient $G = (S, A)$ un graphe non orienté dans lequel tous les sommets ont un degré pair, et $C$ un ensemble d'arêtes de $G$ formant un cycle. Montrer que tous les sommets du graphe $G' = (S, A \setminus C)$ ont un degré pair.
3. Montrer qu'un graphe non orienté possédant au moins une arête et dans lequel tous les sommets ont un degré pair admet au moins un cycle simple (c'est-à-dire un cycle dans lequel aucune arête n'apparaît deux fois).
4. Ces faits étant établis, l'article Wikipedia sur le sujet conclut de la manière suivante (paraphrase du raisonnement présent en ligne à la date de rédaction de ce sujet) :
*Supposons que chaque sommet a un degré pair et qu'il n'existe pas de cycle simple contenant toutes les arêtes. Considérons un cycle simple $C_1$ avec un nombre maximum d'arêtes et retirons ses arêtes du graphe. Par la question 2 le graphe obtenu a toujours exclusivement des sommets de degré pair, et par la question 3 il contient donc un cycle simple $C_2$. L'union des cycles $C_1$ et $C_2$ forme un cycle simple plus grand que $C_1$ contredisant la maximalité de ce dernier. Cette contradiction implique le théorème.*
   (a) Quel est le style de raisonnement utilisé ?
   (b) Quelle part de ce raisonnement est correcte ? Quelle étape pose problème ?
   (c) Peut-on corriger cette preuve ?

**Exercice 3** *Composantes connexes*
La composante connexe d'un sommet $a$ dans un graphe non orienté $G$ est définie comme l'ensemble des points $b$ tels qu'il existe un chemin (éventuellement vide) de $a$ à $b$. Elle est notée $CC_G(a)$.

1. Montrer que l'ensemble des composantes connexes forme une partition de l'ensemble des sommets :
   — chaque composante est non vide
   — tout sommet appartient à une composante
   — deux composantes sont soit disjointes, soit égales
2. Quel est le nombre maximal de composantes connexes dans un graphe en fonction du nombre de sommets, le nombre minimal ?
3. On suppose que le graphe $G$ est acyclique et a $k$ composantes connexes. Soient deux sommets $a$ et $b$ de $G$ et le graphe $G'$ qui est le même que $G$ avec une arête de plus qui a pour extrémités $\{a,b\}$. Montrer que soit $G'$ contient un cycle, soit $G'$ a $k-1$ composantes connexes.
4. En déduire qu'un graphe acyclique à $n$ sommets a au plus $n-1$ arêtes.

**Exercice 4** *Calculs de distances*
On se donne un graphe simple (pas de boucles ni d'arêtes parallèles) dans lequel chaque arête est associée à un entier naturel appelé le poids de cette arête. Par extension, le poids d'un chemin est la somme des poids des arêtes qui le composent.

On cherche à déterminer, pour chaque paire de sommets du graphe, si ces deux sommets sont reliés par un chemin, en calculant en même temps le poids minimal d'un tel chemin (c'est-à-dire la distance entre les deux sommets).

1. Adapter l'algorithme de Roy-Warshall vu en cours afin d'obtenir ce résultat.
2. Peut-on encore résoudre ce problème si le graphe n'est pas simple ?