Graphes et outils logiques
http://www.lri.fr/~blsk/GOL

TD5 - Récurrence

Exercice 1 *Définitions récursives d'opérations arithmétiques*

Définir successivement par des équations récursives sur n, en utilisant les opérations arithmétiques usuelles (addition, multiplication) les fonctions suivantes :

1. $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$ avec la convention que $0! = 1$
2. k^n
3. ${}^{n}k = k^{\underbrace{k^{\cdot^{\cdot^{k}}}}_{n \text{ exposants}}}$ (on pourra utiliser la fonction exposant de la question précédente)

Correction :

1. $0! = 1$ *et* $(n+1)! = (n+1) \times n!$

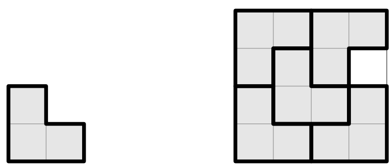
2. $k^0 = 1$ *et* $k^{n+1} = k \times k^n$

3. ${}^{0}k = 1$ *et* ${}^{n+1}k = k^{{}^{n}k}$

Exercice 2 *Récurrence sur les entiers*

Un triomino est une pièce formée de trois cases disposées en angle (voir figure 1(a)). On considère la propriété suivante : si on retire une case quelconque à un quadrillage de côté 2^n, $n \geq 1$, il est toujours possible de paver le reste du quadrillage avec des triominos. Montrer cette propriété par récurrence sur n.

FIGURE 1 – (a) Un triomino. (b) Pavage par des triominos d'un quadrillage de côté 4 privé d'une case.



(a) (b)

Correction :

Cas de base $n = 1$. *Un quadrillage de côté 2 auquel on retire une case est couvert par exactement un triomino.*

Récurrence *On suppose qu'un quadrillage de côté* 2^n *auquel on retire une case peut toujours être pavé par des triominos. Montrons que c'est également le cas d'un quadrillage de côté* 2^{n+1} *auquel on retire une case. Un quadrillage de côté* 2^{n+1} *est formé de quatre carrés de côté* 2^n*. La case retirée est dans exactement un de ces quatre carrés. On peut retirer une case à chacun des trois autres carrés en plaçant un triomino au centre du quadrillage de côté* 2^{n+1}*. On obtient alors un triomino et quatre carrés de côté* 2^n *auxquels une case a été retirée. Par hypothèse de récurrence, ces quatre carrés peuvent être pavés par des triominos donc le quadrillage initial aussi.*

Exercice 3 *Algorithme d'Euclide*

L'algorithme d'Euclide prend en entrée deux nombres entiers positifs a et b tels que $a > b$, et procède ainsi :

```
euclide(a, b):
    si b = 0:
        renvoyer a
    sinon:
        renvoyer euclide(b, a mod b)
```

On veut justifier que pour tous a et b positifs et tels que $a > b$, le résultat euclide(a,b) divise à la fois a et b.

1. Justifier que les appels récursifs à l'algorithme d'Euclide sont bien toujours définis et vérifient bien toujours les conditions imposées à ses deux paramètres.
2. Quelle forme de récurrence est adaptée à cet algorithme ? Formuler l'énoncé sous la forme d'une propriété $\varphi(n)$ dépendant d'un unique entier n sur lequel sera faite la récurrence. Quel est le plus petit entier n_{min} pour lequel cette propriété a du sens ?
3. Démontrer que cette propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_{min}$.

Correction :

1. *L'appel récursif $\texttt{euclide}(b, a \mod b)$ est effectué dans la branche $\texttt{sinon}$, dans laquelle on sait que b est différent de 0. Le nombre $a \mod b$ est donc bien défini. De plus, par définition $0 \leq a \mod b < b$, donc la contrainte imposant que le deuxième paramètre soit strictement inférieur au premier est bien respectée par l'appel récursif.*
2. *L'appel récursif est fait avec des valeurs pour les paramètres strictement inférieures à celles de l'appel principal ($b < a$ et $a \mod b < b$), mais la décroissance à chaque étape est potentiellement de plus que 1. Il faut donc une récurrence forte. Un énoncé possible consiste à faire la récurrence sur le premier paramètre, en laissant possibles pour le deuxième paramètre toutes les valeurs inférieures :*

$$\varphi(n) \quad \equiv \quad \forall b < n,\ \texttt{euclide}(n, b) \text{ divise } n \text{ et } b$$

   Cette propriété est dégénérée lorsque $n = 0$ car la quantification sur $b \in \mathbb{N}$ avec $b < n$ est vide, mais cela ne rend pas la propriété fausse : on peut partir de $n_{min} = 0$. Ceci dit, l'algorithme présenté n'a aucune entrée légitime avec 0 pour premier paramètre, pour les besoins de l'exercice prendre $n_{min} = 1$ est donc suffisant.
3. *Soient $a \geq 1$ et $b < a$. Supposons que la propriété $\varphi(k)$ est vraie pour tout $k < a$. On a deux cas possibles pour le calcul de $\texttt{euclide}(a, b)$:*
   — *Si $b = 0$ alors $\texttt{euclide}(a, b) = a$. Or on a bien « a divise a » et « a divise 0 ».*
   — *Sinon, comme $b < a$ on l'hypothèse de récurrence $\varphi(b)$, qui assure que $\texttt{euclide}(b, a \mod b)$ divise b et $a \mod b$. Donc $\texttt{euclide}(b, a \mod b)$ divise également a. Donc $\texttt{euclide}(a, b) = \texttt{euclide}(b, a \mod b)$ divise bien a et b.*

Exercice 4 *Récurrence, partiel 2014*

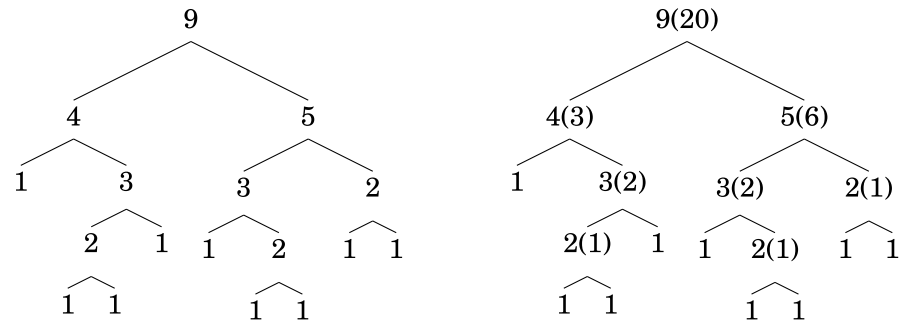
On considère le jeu suivant : on part d'un entier $n \geq 2$, on le décompose en une somme $p + q$ avec $p, q \geq 1$, puis tant que p ou q est strictement plus grand que 1 on recommence en le décomposant à nouveau en une somme de deux nombres plus petits.

Par exemple, en partant de $n = 9$ on peut faire la décomposition suivante : $9 = 4 + 5 = (1 + 3) + (3 + 2) = (1 + (2 + 1)) + ((1 + 2) + (1 + 1)) = (1 + ((1 + 1) + 1)) + ((1 + (1 + 1)) + (1 + 1))$

On représente la décomposition sous forme d'arbre : la transformation de n en $p+q$ devient le nœud $\boxed{\begin{array}{c} \text{n} \\ \frown \\ \text{p} \quad \text{q} \end{array}}$.

On fait ensuite la somme de tous les produits $p \times q$ ainsi créés. Pour cela, on commence par ajouter les produits dans les arbres entre parenthèses, en écrivant $\boxed{\begin{array}{c} n(p\times q) \\ \frown \\ \text{p} \quad \text{q} \end{array}}$.

Dans l'exemple de décomposition de 9, on obtient les arbres suivants :



Lorsque l'on fait la somme des produits ainsi obtenus $20+3+6+2+2+1+1+1$, on obtient le nombre 36.

1. On se donne une autre décomposition de l'entier 9 :

   $$9 = 7+2 = (4+3)+(1+1) = ((2+2)+(2+1))+(1+1) = (((1+1)+(1+1)+((1+1)+1))+(1+1)$$

   Dessiner l'arbre de décomposition, annoter les nœuds par les produits et montrer que la somme de ces produits est aussi égale 36.

2. On cherche maintenant à montrer que cette somme ne dépend que de n et pas de la décomposition. On appelle $s(n)$ la somme des produits d'une décomposition de n.

   (a) Si n est décomposé en $p+q$, exprimer la valeur de $s(n)$ en fonction des valeurs de $s(p)$ $s(q)$ et du produit $p \times q$.

   (b) Montrer par une récurrence généralisée sur n que pour tout $n \geq 2$ on a

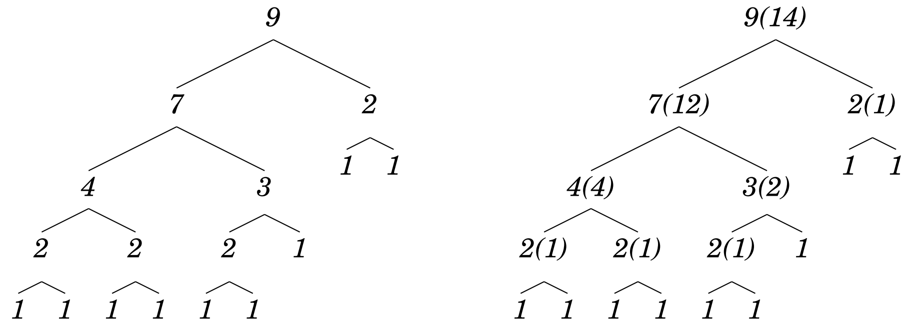
   $$s(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Rappel : *la récurrence généralisée consiste lorsque l'on montre l'étape d'hérédité $P(n+1)$ pour n quelconque, à supposer non seulement que $P(n)$ est vrai mais plus généralement que $P(k)$ est vrai pour tout $k \leq n$.*

3. Un magicien demande à une personne dans la salle de choisir sans le dévoiler un nombre n, d'appliquer une décomposition suivant le principe précédent et de lui donner le résultat de la somme des produits obtenus, la réponse est 78. Le magicien "devine" alors le nombre n de départ. Quel est ce nombre ?

Correction :

1.



14+12+1+4+2+1+1+1=36

2. (a) *La somme cumulée en un nœud de l'arbre $n = p + q$ est égale à la somme $s(p)$ du sous-arbre sous p plus la somme $s(q)$ du sous-arbre sous q plus le produit $p \times q$. On a donc $s(n) = s(p) + s(q) + p \times q$.*

   (b) — *initialisation : on commence à $n = 2$ la seule décomposition est $(1+1)$ dont le produit est 1 donc $s(2) = 1 = \frac{2\times(2-1)}{2}$*

   — *hérédité : on se donne n quelconque, on suppose que la formule $s(k) = \frac{k(k-1)}{2}$ est vraie pour tous les entiers $k \leq n$ et on veut montrer $s(n+1) = \frac{(n+1)n}{2}$. Pour tout découpage $n + 1 = p + q$ on a (question précédente) $s(n+1) = s(p) + s(q) + p \times q$. Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$ on a $p \leq n$ et $q \leq n$, donc l'hypothèse de récurrence s'applique à p et à q. Donc*

$$s(n+1) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + p \times q = \frac{p^2 - p + q^2 - q + 2pq}{2} = \frac{(p+q)^2 - (p+q)}{2} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}$$

   — *la propriété $s(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ est donc vérifiée pour tout n.*

3. *Il suffit de trouver n tel que $s(n) = \frac{n(n-1)}{2} = 78$ soit $n = 13$.*