TD6 - Définitions par clôture

Exercice 1 *Définition de relations par des règles d'inférence*

Soit P un ensemble de personnes et une relation parent $\subseteq P \times P$ telle que parent(x, y) est vrai lorsque y est l'enfant de x.

1. Écrire à l'aide des connecteurs logiques et de la relation parent une propriété qui exprime que toute personne de P a exactement deux parents.
2. Définir par des règles d'inférence la relation ascendant à partir de la relation parent.
3. Définir la relation fratrie (être dans la même fratrie) à partir de la relation parent. On pourra utiliser une formule logique ou des règles d'inférence.
4. Définir la relation cousin à partir des relations parent et fratrie.

Correction : *Propriété de la relation* `parent` *:*

$$\begin{aligned}\forall p \in P, \exists x \in P, \exists y \in P,\ & (x \neq y \wedge \\ & \mathit{parent}(x,p) \wedge \mathit{parent}(y,p) \wedge \\ & \forall z \in P, (z \neq x \wedge z \neq y \Rightarrow \neg \mathit{parent}(z,p)))\end{aligned}$$

Définition de la relation ascendant :

$$\frac{\mathit{parent}(x,y)}{\mathit{ascendant}(x,y)} \qquad \frac{\mathit{ascendant}(x,y) \quad \mathit{parent}(y,z)}{\mathit{ascendant}(x,z)}$$

Définition de la relation fratrie :

$$x \neq y \quad \frac{\mathit{parent}(p,x) \quad \mathit{parent}(m,x) \quad \mathit{parent}(p,y) \quad \mathit{parent}(m,y)}{\mathit{fratrie}(x,y)}$$

Définition de la relation cousin :

$$\frac{\mathit{parent}(x,y) \quad \mathit{parent}(z,t) \quad \mathit{fratrie}(x,z)}{\mathit{cousin}(y,t)} \qquad \frac{\mathit{parent}(x,y) \quad \mathit{parent}(z,t) \quad \mathit{cousin}(x,z)}{\mathit{cousin}(y,t)}$$

Plusieurs interpretations possibles suivante ce que l'on modélise : cousin germain (deux parents frère) ou bien des cousins de même degré (deux parents frère ou cousin) ou bien en mélangeant les générations : deux ascendants qui sont frères.

Exercice 2 *Récurrence sur les entiers*

On définit un prédicat $\mathcal{N}_2$ sur les entiers naturels par les règles suivantes.

$$\frac{}{\mathcal{N}_2(0)} \qquad \frac{}{\mathcal{N}_2(1)} \qquad \frac{\mathcal{N}_2(x)}{\mathcal{N}_2(x+2)}$$

1. Donner les arbres de preuve correspondant aux dérivations de $\mathcal{N}_2(4)$ et $\mathcal{N}_2(5)$.
2. Prouver que tous les entiers naturels vérifient le prédicat $\mathcal{N}_2$, c'est-à-dire la formule $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x)$.
   (Idée : généraliser la propriété en montrant par récurrence $\forall x \in \mathbb{N}, \mathcal{N}_2(x) \wedge \mathcal{N}_2(x+1)$).

3. Donner le schéma de preuve par induction associé à cette définition.
4. On définit une fonction $p \in \mathbb{N} \to \texttt{bool}$ qui vérifie :

$$p(0) = \texttt{true} \quad p(1) = \texttt{false} \quad \forall x \in \mathbb{N}, p(x+2) = p(x)$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, si $p(x) = \texttt{true}$ alors x est un entier pair.

Correction :

1.

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\mathcal{N}_2(0)}}{\mathcal{N}_2(2)}}{\mathcal{N}_2(4)}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\mathcal{N}_2(1)}}{\mathcal{N}_2(3)}}{\mathcal{N}_2(5)}$$

2. On note $P(x)$ la propriété $\mathcal{N}_2(x) \wedge \mathcal{N}_2(x+1)$. Preuve par récurrence sur x.
- *Par axiomes, $\mathcal{N}_2(0)$ et $\mathcal{N}_2(1)$, donc $P(0)$ est vraie.*
- *Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $P(x)$ soit vraie. On a donc les hypothèses $\mathcal{N}_2(x)$ et $\mathcal{N}_2(x+1)$.*
  - *Par hypothèse on a $\mathcal{N}_2(x+1)$.*
  - *Par hypothèse on a également $\mathcal{N}_2(x)$, dont on déduit $\mathcal{N}_2(x+2)$ en utilisant la troisième règle.*

  Donc $P(x+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $x \in \mathbb{N}$ on a $P(x)$.

3. Si un prédicat P vérifie les trois conditions

(a) $P(0)$,

(b) $P(1)$ et

(c) pour tout x tel que $P(x)$ on a aussi $P(x+2)$,

alors pour tout $x \in \mathbb{N}$ on a $P(x)$.

4. On note $P(x)$ le prédicat « si $p(x) = \texttt{true}$ alors x est un entier pair »(autrement dit « $p(x) = \texttt{false}$ ou x est un entier pair »). On vérifie que P valide les trois conditions du principe d'induction ci-dessus :

(a) 0 est un entier pair, donc $P(0)$ est valide ;

(b) $p(1) = \texttt{false}$, donc $P(1)$ est valide ;

(c) pour x tel que $P(x)$,
- *soit $x+2$ est un entier pair, et $P(x+2)$ est valide ;*
- *soit $x+2$ est un entier impair, et x est aussi un entier impair ; dans ce cas $p(x) = \texttt{false}$ et $p(x+2) = p(x) = \texttt{false}$, donc $P(x+2)$ est encore valide.*

Donc pour tout x tel que $\mathcal{N}_2(x)$ on a $P(x)$. Or tout $x \in \mathbb{N}$ vérifie $\mathcal{N}_2(x)$, donc pour tout $x \in \mathbb{N}$ on a $P(x)$.

Exercice 3 *Relations définies par clôture (partiel 2011)*

Dans un réseau social, deux personnes peuvent décider d'être des « amis ». On modélise cela par un ensemble X d'utilisateurs du réseau et une relation binaire `ami` sur X, telle que $\texttt{ami}(x,y)$ est vrai si x et y sont amis.

On souhaite définir la relation « être lié à » (notée `lié`) telle que « x est lié à y » si et seulement si y est un ami de x ou bien si un ami de x est lié à y.

1. Définir la relation `lié` à l'aide d'un système d'inférence.
2. Donner le principe d'induction simple associé à cette définition.
3. Montrer que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
   (a) $\forall x\, y\, z, \mathtt{ami}(x,z) \Rightarrow \mathtt{lié}(z,y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x,y)$
   (b) $\forall x\, y\, z, \mathtt{lié}(x,z) \Rightarrow \mathtt{ami}(z,y) \Rightarrow \mathtt{lié}(x,y)$

   Suivant votre définition de `lié` *ces propriétés pourront être des conséquences de la définition ou devront être prouvées par induction.*
4. La relation `ami` est symétrique, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall x\, y, \mathtt{ami}(x,y) \Rightarrow \mathtt{ami}(y,x)$$

   Montrer à l'aide du principe d'induction que la relation `lié` est aussi symétrique.

Correction :

1. $\dfrac{ami(x,y)}{lié(x,y)} \qquad \dfrac{ami(x,z) \quad lié(z,y)}{lié(x,y)}$

2. Le principe d'induction associé est :
si $\forall x\, y, ami(x,y) \Rightarrow P(x,y)$
et $\forall x\, y\, z, ami(x,z) \Rightarrow P(z,y) \Rightarrow P(x,y)$
alors $\forall x\, y, lié(x,y) \Rightarrow P(x,y)$

3. La première propriété est une conséquence de la définition de lié.
La seconde $\forall x\, y\, z, lié(x,z) \Rightarrow ami(z,y) \Rightarrow lié(x,y)$ *se montre par induction sur* $lié(y,z)$*, en prenant la propriété* $P(x,z) = \forall y, ami(z,y) \Rightarrow lié(x,y)$*. Il suffit de montrer :*
   (a) $\forall x\, z, ami(x,z) \Rightarrow P(x,z)$*, c'est-à-dire soit x, z et y tels que* $ami(x,z)$ *et* $ami(z,y)$ *on en déduit* $lié(x,y)$ *en utilisant la définition de lié.*
   (b) $\forall x\, z\, t, ami(x,t) \Rightarrow P(t,z) \Rightarrow P(x,z)$*. Soit donc* $x\, z\, t\, y$ *tels que* $ami(x,t)$*,* $P(t,z)$ *et* $ami(z,y)$*, il faut montrer* $lié(x,y)$*. De* $ami(z,y)$ *et* $P(t,z)$ *on déduit* $lié(t,y)$ *par hypothèse d'induction ; en utilisant* $ami(x,t)$ *on en déduit par définition de lié que* $lié(x,y)$*.*

4. On doit montrer la propriété $\forall x\, y, lié(x,y) \Rightarrow lié(y,x)$*, on utilise le principe d'induction en prenant comme formule* $P(x,y) = lié(y,x)$*. Il suffit de montrer :*
   (a) $\forall x\, y, ami(x,y) \Rightarrow P(x,y)$ *c'est-à dire que pour* x,y *tels que* $ami(x,y)$*, on a* $lié(y,x)$*. Or si* $ami(x,y)$ *alors* $ami(y,x)$ *et donc* $lié(y,x)$*.*
   (b) $\forall x\, y\, z, ami(x,z) \Rightarrow P(z,y) \Rightarrow P(x,y)$*. Soit donc x, y et z tels que* $ami(x,z)$ *et* $lié(y,z)$*. On a aussi* $ami(z,x)$ *et donc en utilisant la question précédente, on déduit* $lié(y,x)$*.*