TD7 - Définition de fonctions par clôture

Exercice 1 *Règles d'inférence (partiel 2014)*

On se donne le système d'inférence suivant

$$(a)\frac{}{R(0,1,0)} \qquad (b)\frac{R(x,y,n)}{R(x+y,y+2,n+1)}$$

1. Montrer que l'on a $R(1,3,1)$ et $R(4,5,2)$. Trouver x et y tels que $R(x,y,4)$ et construire l'arbre de dérivation correspondant.
2. Énoncer le principe d'induction associé à la définition de R.
3. Utiliser ce principe pour montrer que pour tout x,y,n, on a $R(x,y,n) \Rightarrow x = n^2 \wedge y = 2n+1$.
4. On admettra sans le démontrer que pour tout n, il existe un unique x et un unique y tel que $R(x,y,n)$. On note x_n la valeur de x pour laquelle $R(x,y,n)$.

   Montrer que pour tout réel positif a, il existe un unique n tel que $x_n \le a$, $x_{n+1} > a$, et que n est alors la partie entière de la racine carrée de a (on a ainsi un algorithme pour calculer la racine carrée entière qui n'utilise que des additions).

Correction :

1. *On a $R(16,9,4)$. L'arbre de dérivation est*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R(0,1,0)}\,(a)}{R(1,3,1)}\,(b,n=0,y=1,x=0)}{R(4,5,2)}\,(b,n=1,y=3,x=1)}{R(9,7,3)}\,(b,n=2,y=5,x=4)}{R(16,9,4)}\,(b,n=3,y=7,x=9)$$

   Cet arbre inclut les dérivations de $R(1,3,1)$ et $R(4,5,2)$.

2. *Soit $P(x,y,n)$ une propriété quelconque si*
   (a) $P(0,1,0)$
   (b) *pour tout x,y et n, si $P(x,y,n)$ alors $P(x+y,y+2,n+1)$*

   alors $\forall x\,y\,n, R(x,y,n) \Rightarrow P(x,y,n)$

3. *on prend comme formule $P(x,y,n) \stackrel{\text{def}}{=} (x = n^2 \wedge y = 2n+1)$, on vérifie*
   — $P(0,1,0) \equiv 0 = 0^2 \wedge 1 = 2 \times 0 + 1$ *qui est trivial*
   — *on suppose soit x, y et n quelconques, on suppose $P(x,y,n)$ c'est-à-dire $x = n^2 \wedge y = 2n+1$, et on doit montrer $P(x+y,y+2,n+1)$, c'est-à-dire $x+y = (n+1)^2 \wedge y+2 = 2(n+1)+1$. on a par hypothèse de récurrence $x+y = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ et $y+2 = 2n+1+2 = 2(n+1)+1$ donc le résultat est bien vérifié*

   On en déduit $\forall x\,y\,n, R(x,y,n) \Rightarrow x = n^2 \wedge y = 2n+1$.

4. *La suite x_n est une suite d'entiers strictement croissante qui démarre à 0, il existe donc un unique n tel que $x_n \le a < x_{n+1}$. D'après la question précédente, on a $x_n = n^2$ et donc $n^2 \le a < n+1^2$ et donc n est bien la racine carrée entière de a.*

Exercice 2 *Définitions récursives sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*

On se donne les systèmes d'équations suivants :

$$f(0,0)=1 \qquad \forall n\,m \in \mathbb{N}, f(n+1,m)=2\times f(n,m) \qquad \forall n\,m \in \mathbb{N}, f(n,m+1)=3\times f(n,m)$$

$$g(0,0)=1 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n+1,m)=2\times g(n,m)^2 \qquad \forall nm \in \mathbb{N}, g(n,m+1)=3\times g(n,m)$$

1. — Définir par des règles d'inférence la relation $F(n,m,y)$ correspondant à la relation $f(n,m)=y$.
   — Trouver y tel que $F(1,2,y)$, $F(2,1,y)$ et $F(2,2,y)$.
   — Justifier que les équations pour f définissent une application de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
   — Que calcule cette fonction ?
2. Est-ce que les équations pour g définissent une fonction ?

Correction :

1. *La fonction $f(n,m)$ calcule $2^n\times 3^m$. Une manière de montrer que la relation est fonctionnelle est de montrer par induction que si $f(n,m,y)$ alors $y=2^n\times 3^m$.*

   La relation est définie par les règles d'inférence :

$$\frac{}{F(0,0,1)} \qquad \frac{F(n,m,y)}{F(n+1,m,2\times y)} \qquad \frac{F(n,m,y)}{F(n,m+1,3\times y)}$$

   Le principe d'induction associé est

$$\begin{array}{l}\forall P, P(0,0,1)\Rightarrow(\forall n\,m\,y, P(n,m,y)\Rightarrow P(n+1,m,2\times y))\Rightarrow\\ (\forall n\,m\,y, P(n,m,y)\Rightarrow P(n,m+1,3\times y))\Rightarrow\\ (\forall n\,m\,y, F(n,m,y)\Rightarrow P(n,m,y))\end{array}$$

2. *Les équations de g ne définissent pas une fonction en effet si n et m sont strictement positifs, on a deux règles qui s'appliquent (comme dans le cas précédent) mais qui vont donner des résultats différents. En particulier pour $n=m=1$:*

$$\frac{G(0,1,y)}{G(1,1,y^2)} \qquad \frac{G(1,0,y)}{G(1,1,3\times y)}$$

   on a $g(1,0)=g(0,0)^2=1$ et $g(0,1)=3\times g(0,0)=3$. La première règle nous permet de déduire que $G(1,1,3^2)$ c'est-à-dire $G(1,1,9)$, la deuxième que $G(1,1,3\times 1)$ c'est-à-dire $G(1,1,3)$. La relation définie n'est donc pas fonctionnelle.

Exercice 3 *Minimisation*

On se donne un prédicat T sur les entiers naturels et on cherche à justifier l'existence d'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(n)=n \quad \text{si } T(n) \qquad f(n)=f(n+1) \quad \text{si } \neg T(n)$$

1. Donner une définition par clôture de la relation $F(n,m)$ correspondant à cette définition récursive (ie $F(n,m)\Longleftrightarrow f(n)=m$).
2. Écrire le principe d'induction associé à cette définition par clôture.
3. Montrer par induction sur la relation que si $F(n,m)$ est vérifié alors $n\le m\wedge T(m)$.
4. Prouver par induction que la relation $F(n,m)$ est fonctionnelle.
5. À quelle condition sur $T(n)$ cette relation décrit-elle une fonction totale ?

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(\exists m, F(n,m)) \Longleftrightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$.
   On pourra commencer par prouver $\forall k\, n, T(n+k) \Longrightarrow \exists m, F(n,m)$ par récurrence sur l'entier k et utiliser le résultat de la question 3.
7. Comment peut-on caractériser la valeur calculée par $f(n)$?

Correction :

1. *On ne sait pas encore s'il existe une fonction f qui vérifie les équations, on commence par définir par des règles d'inférence une relation binaire F correspondant au graphe de la fonction, puis on montrera que cette relation est fonctionnelle.*

$$\frac{T(n)}{F(n,n)} \qquad \frac{\neg T(n) \quad F(n+1,m)}{F(n,m)}$$

2. *Principe d'induction simple associé :*
   Soit $P(n,m)$ une propriété quelconque, si :
   (a) $\forall n, T(n) \Rightarrow P(n,n)$
   (b) $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow P(n+1,m) \Rightarrow P(n,m)$
   alors $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow P(n,m)$
3. *On doit prouver que $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow n \leq m \wedge T(m)$ On applique le principe d'induction simple précédent en prenant $P(n,m) \stackrel{\text{def}}{=} n \leq m \wedge T(m)$.*
   Le principe d'induction dans lequel on a remplacé $P(n,m)$ par la propriété souhaitée nous dit que si les deux conditions suivantes sont vérifiées
   (a) $\forall n, T(n) \Rightarrow (n \leq n \wedge T(n))$
   (b) $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow (n+1 \leq m \wedge T(m)) \Rightarrow (n \leq m \wedge T(m))$
   alors $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow (n \leq m \wedge T(m))$

   Les propriétés (a) et (b) sont triviales et on a donc bien le résultat voulu.
4. *Pour montrer que F est fonctionnelle, on doit prouver la propriété suivante*

$$\forall n\, m\, p, F(n,m) \Rightarrow F(n,p) \Rightarrow m = p$$

   On va appliquer le principe d'induction associé à $F(n,m)$ sur la propriété $P(n,m) = \forall p, F(n,p) \Rightarrow m = p$. On aura besoin du principe d'inversion de $F(n,m)$ qui nous dit que si $F(n,m)$ est vérifié alors forcément une des deux règles de définition s'applique et donc soit $F(n,m)$ est prouvé par la première règle et $(T(n) \wedge n = m)$, soit il est prouvé par la seconde règle et $(\neg T(n) \wedge F(n+1,m))$ est vrai. Au final on a : $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow (T(n) \wedge n = m \vee \neg T(n) \wedge F(n+1,m))$
   - *Cas 1 : $\forall n, T(n) \Rightarrow P(n,n)$ s'écrit $\forall n, T(n) \Rightarrow \forall p, F(n,p) \Rightarrow n = p$ qui est une conséquence du principe d'inversion.*
   - *Cas 2 : $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow P(n+1,m) \Rightarrow P(n,m)$ qui s'écrit $\forall n\, m, \neg T(n) \Rightarrow (\forall p, F(n+1,p) \Rightarrow m = p) \Rightarrow \forall p, F(n,p) \Rightarrow m = p$. On applique le principe d'inversion à l'hypothèse $F(n,p)$ en tenant compte du fait que $\neg T(n)$ on en déduit $F(n+1,p)$ et d'après l'hypothèse de récurrence $(\forall p, F(n+1,p) \Rightarrow m = p)$ on en déduit $m = p$ qui est le résultat attendu.*
5. *L'application $f(n)$ est définie seulement s'il existe un m plus grand que n qui vérifie $T(m)$ (sinon il n'y a pas de moyen de terminer l'arbre de preuve).*
6. *On a déjà montré $\forall n\, m, F(n,m) \Rightarrow n \leq m \wedge T(m)$. On en déduit aisément un sens de l'équivalence :*

$$(\exists m, F(n,m)) \Rightarrow (\exists m, n \leq m \wedge T(m))$$

en effet, on suppose $\exists m, F(n,m)$*, par élimination on a un* m *tel que* $F(n,m)$ *et donc* $n \leq m \wedge T(m)$*, il suffit de prendre ce* m *comme témoin pour l'existentielle et on a montré* $\exists m, n \leq m \wedge T(m)$*.*

Dans l'autre sens, on va montrer que $\forall m, n \leq m \wedge T(m) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$*.*

On commence par faire une preuve par récurrence sur k *de la propriété* $P(k) \stackrel{\text{def}}{=} \forall n, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$*.*

— *Pour* $k = 0$*, il faut montrer* $\forall n, T(n) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$ *qui est vérifié en prenant* $m_0 = n$*.*
— *On suppose ensuite la propriété vraie pour* k*, on a donc* $\forall n, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$ *et on veut la montrer pour* $k+1$ *:* $\forall n, T(n+k+1) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$*. Soit* n*, si* $T(n)$ *est vérifié alors on prend* $m_0 = n$*. Sinon on applique l'hypothèse de récurrence pour* $n+1$ *et on trouve* $\exists m_0, F(n+1, m_0)$*. Soit* m_0 *tel que* $F(n+1, m_0)$*, comme* $\neg T(n)$ *on en déduit* $F(n, m_0)$*.*

On en déduit que $\forall nk, T(n+k) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$ *et donc* $\forall m, n \leq m \wedge T(m) \Rightarrow \exists m_0, F(n, m_0)$*. en remarquant que si* $n \leq m$ *alors* $m = n + (m-n)$ *et en appliquant le théorème précédent avec* $k = m - n$*.*

7. $f(n)$ *calcule le plus petit entier* m *tel que* $n \leq m$ *et* $T(m)$*. C'est une fonction partielle qui n'est totale que si une infinité d'entiers vérifie le prédicat* T*.*