TD9 - Ordres

Exercice 1 *Fonction de Ackermann* Soient $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ des ensembles, chacun muni d'un ordre strict bien fondé. On définit une relation binaire $<$ sur $A \times B$ par les conditions suivantes :

$$\frac{a_1 <_A a_2}{(a_1, b_1) < (a_2, b_2)} \qquad \frac{b_1 <_B b_2}{(a, b_1) < (a, b_2)}$$

1. En admettant que cette relation est un ordre strict, montrer qu'il est bien fondé.

On veut définir une fonction $\texttt{ack} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les équations suivantes :

$$\begin{array}{rcll} \texttt{ack}(0, n) & = & n+1 & \\ \texttt{ack}(m, 0) & = & \texttt{ack}(m-1, 1) & \text{si } m > 0 \\ \texttt{ack}(m, n) & = & \texttt{ack}(m-1, \texttt{ack}(m, n-1)) & \text{si } m > 0 \text{ et } n > 0 \end{array}$$

2. Donner un système d'inférence définissant une relation ternaire `Ack` telle que `Ack(m,n,r)` représente le fait que $\texttt{ack}(m, n) = r$.
3. Montrer que la relation `Ack` est totale, c'est-à-dire que pour tous m, n il existe un r tel que `Ack(m,n,r)`.

Correction :

1. *Avec la définition de l'ordre bien fondé comme "toute partie non vide admet un élément minimal". Soit P une partie non vide de $A \times B$. L'ensemble $A' = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in P\}$ est une partie non vide de A. Comme $<_A$ est un ordre bien fondé, A' admet un élément minimal, qu'on note a_0. L'ensemble $B' = \{b \in B \mid (a_0, b) \in P\}$ est une partie non vide de B. Comme $<_B$ est un ordre bine fondé, B' admet un élément minimal, qu'on note b_0. Alors (a_0, b_0) est un élément minimal de P.*

   Justification de la minimalité de (a_0, b_0) : *soit $(a, b) \in P$ tel que $(a, b) < (a_0, b_0)$. Par inversion, soit $a < a_0$ soit $a = a_0 \wedge b < b_0$.*
   - *Supposons $a < a_0$. Comme $(a, b) \in P$ on déduit $a \in A'$. Contradiction avec la minimalité de a_0.*
   - *Supposons $a = a_0$ et $b < b_0$. Comme $(a_0, b) \in P$ on déduit $b \in B'$. Contradiction avec la minimalité de b_0.*

   Donc (a, b) est un élément minimal de P.

2.
$$\frac{}{Ack(0, n, n+1)} \qquad \frac{Ack(m, 1, r)}{Ack(m+1, 0, r)} \qquad \frac{Ack(m+1, n, p) \quad Ack(m, p, r)}{Ack(m+1, n+1, r)}$$

3. *On note $P(m, n) \equiv \exists r,\ Ack(m, n, r)$ et on démontre $\forall m, n,\ P(m, n)$ par induction bien fondée sur l'ordre lexicographique donné en question 1.*

   Soit (m, n) tels que pour tout $(m', n') < (m, n)$ on a $P(m, n)$. (on cherche alors à démontrer $P(m, n)$) Par cas sur m :
   - *Si $m = 0$, alors par la première règle on a $Ack(0, n, n+1)$, et $P(0, n)$ est vérifiée.*
   - *Sinon, par cas sur n :*
     - *Si $n = 0$. Alors $(m-1, 1) < (m, 0)$ (première règle de l'ordre lexicographique) et par hypothèse de récurrence il existe r tel que $Ack(m-1, 1, r)$. Alors par la deuxième règle de Ack on déduit $Ack(m, 0, r)$.*

— *Sinon, alors* $(m,n-1) < (m,n)$ *(deuxième règle de l'ordre lexicographique) et par hypothèse de récurrence il existe* p *tel que* $\mathtt{Ack}(m,n-1,p)$. *De plus* $(m-1,p) < (m,n)$ *(première règle de l'ordre lexicographique), donc par hypothèse de récurrence il existe* r *tel que* $\mathtt{Ack}(m-1,p,r)$. *Avec la troisième règle de* `Ack` *tout ceci permet de déduire* $\mathtt{Ack}(m,n,r)$, *et* $P(m,n)$ *est vérifiée.*

Exercice 2 *Ordre sur les mots*

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des booléens $\{0,1\}$. On note $\mathbb{B}^n$ l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ l'ensemble des mots finis (de longueur quelconque).

On introduit une relation binaire $\prec$ sur $\mathbb{B}^*$ par le système d'inférence suivant ($x \in \mathbb{B}$ et $m, m_1, m_2 \in \mathbb{B}^*$) :

$$\frac{}{\epsilon \prec xm} \qquad \frac{}{0m_1 \prec 1m_2} \qquad \frac{m_1 \prec m_2}{xm_1 \prec xm_2}$$

On admettra sans le démontrer que cette relation est un ordre strict sur les mots.

1. Montrer que $100 \prec 11$.
2. Comparer les mots 0000, 00 et 1.
3. Définir par des équations récursives une fonction $\mathtt{test} \in \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ telle que $\mathtt{test}(m_1, m_2)$ est vrai exactement lorsque $m_1 \prec m_2$. On pourra introduire des équations pour les quatre cas :
$$\mathtt{test}(\epsilon,\epsilon) = \ldots \quad \mathtt{test}(\epsilon, xm) = \ldots \quad \mathtt{test}(xm,\epsilon) = \ldots \quad \mathtt{test}(xm_1, ym_2) = \ldots$$
4. Montrer que si $\mathtt{test}(m_1, m_2)$ est faux alors soit $m_1 = m_2$, soit $m_2 \prec m_1$, (ce qui implique que la relation $\prec$ est un ordre total).
5. Si $x \in \mathbb{B}$, on note x^n le mot de longueur n qui ne contient que des x. On peut définir ce mot par des équations récursives sur n :
$$x^0 = \epsilon \qquad x^{n+1} = x(x^n)$$
Montrer par récurrence sur n les deux propriétés suivantes :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, x^n \prec x^{n+1}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 0^{n+1}1 \prec 0^n 1$
6. La relation $\prec$ est-elle un ordre bien fondé ? justifier votre réponse.

Correction :

1. $100 \prec 11$ *car* $00 \prec 1$ *par troisième règle, et* $00 \prec 1$ *par deuxième règle.*
2. $00 \prec 0000 \prec 1$
3.
$$\begin{array}{rcl} \mathtt{test}(\epsilon,\epsilon) & = & 0 \\ test(\epsilon,xm) & = & 1 \\ test(xm,\epsilon) & = & 0 \\ test(0m_1,1m_2) & = & 1 \\ test(xm_1,xm_2) & = & test(m_1,m_2) \end{array}$$
4. *Par récurrence.* $test(m_1,m_2)$ *est faux dans ces trois cas :*
   — $m_1 = m_2 = \epsilon$ *(alors* $m_1 = m_2$*)*
   — $m_1 \neq \epsilon$ *et* $m_2 = \epsilon$ *(alors* $m_2 \prec m_1$*)*
   — $m_1 = xm'_1$ *et* $m_2 = xm'_2$ *avec* $test(m'_1, m'_2)$ *faux, et conclusion par hypothèse de récurrence.*
5.
6. *Non, la suite* $(0^{n+1}1)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la question précédente est un contre-exemple.*