Mathématiques pour l'Informatique 2
`http://www.lri.fr/~blsk/MI2`

Partiel - 7 mars 2017

L'examen dure 2 heures. Toutes les réponses devront être clairement justifiées. Les seuls documents autorisés sont une page A4 manuscrite recto-verso. **Ne pas cacheter les copies**.

Exercice 1 *Enigme, d'après Smullyan, 4 points.*
Trois coffres numérotés de 1 à 3 sont disposés sur une table. Un seul de ces coffres contient un trésor qu'il faut découvrir. Chaque coffre comporte une inscription :

1. Le trésor est dans ce coffre.
2. Le trésor n'est pas dans ce coffre.
3. Si le trésor n'est pas dans le coffre 1 alors il n'est pas dans ce coffre.

Questions. On introduit des variables propositionnelles P_1 pour représenter le fait que le trésor est dans le coffre 1 et P_2 pour représenter le fait que le trésor est dans le coffre 2.

1. Donner une formule (notée P_3) qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui est vraie exactement lorsque le trésor est dans le coffre 3.
2. Donner une formule (notée C) qui utilise les variables P_1 et P_2 et qui représente le fait que le trésor est exactement dans un des coffres.
3. Donner des formules I_1, I_2 et I_3 qui utilisent les variables P_1 et P_2 et qui représentent les inscriptions sur chacun des coffres.
4. Donner la table de vérité des formules P_3, C, I_1, I_2 et I_3 en fonction des variables P_1 et P_2.
5. Sachant que C est vrai et qu'au moins deux des formules I_1, I_2 et I_3 sont vraies, en déduire dans quel coffre est caché le trésor.

Exercice 2 *Cardinaux, 2 points.*
Soit X un ensemble de cardinal 4 et Y un ensemble de cardinal 5. On pourra donner les résultats sous forme d'expression arithmétique sans calculer.

1. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications de X dans Y ? de l'ensemble des parties de $X \times Y$?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des applications surjectives de X dans Y ? de l'ensemble des applications bijectives ?

Exercice 3 *Fonctions, 4 points.*
Soit X un ensemble, A et B deux sous-ensembles de X et f une application de $X \to X$.

1. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
3. Trouver un contre-exemple à l'égalité des deux ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$. Donner une condition suffisante sur f pour que l'égalité soit vraie.
4. Comparer $f(A \backslash B)$ et $f(A) \backslash f(B)$. On rappelle que $X \backslash Y$ est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y.

Exercice 4 *Récurrences, 3 points.*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1}$$

2. Soient X et Y deux ensembles de cardinal $n \geq 1$. Montrer que l'ensemble des bijections de X dans Y a pour cardinal $n!$. On rappelle que la fonction factorielle $n!$ vérifie $n! = n(n-1)\dots 1$ c'est-à-dire que l'on a $1! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$.

Exercice 5 *Graphes, 7 points.*

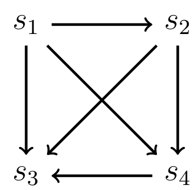
Un *tournoi* est un graphe orienté dans lequel entre chaque paire de sommets il y a une arête et une seule. Étant donnés deux sommets s et s' dans un tournoi, on a donc soit une arête de s vers s' (ce qu'on note $s \to s'$), soit une arête de s' vers s (ce qu'on note $s' \to s$).

Ces graphes permettent de représenter les résultats d'une compétition dans laquelle tous les joueurs s'affrontent deux à deux, sans possibilité de match nul. Les sommets représentent les joueurs, et une arête $s \to s'$ indique que s a vaincu s'.

Le score d'un sommet est son degré sortant (c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont il est la source). Les sommets ayant un score maximal sont déclarés vainqueurs du tournoi.

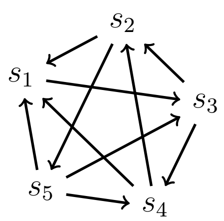
Le graphe ci-contre est un tournoi, dans lequel les scores sont :

s_1	s_2	s_3	s_4
3	2	0	1



Les questions 1. et 2. ci-dessous sont indépendantes.

1. Dans cette question on s'intéresse abord aux tournois dans lesquels plusieurs sommets peuvent avoir le même score.
   (a) Donner un exemple de tournoi à quatre sommets avec au moins deux vainqueurs.
   (b) Donner un exemple de tournoi à cinq sommets où tous ont le même score.
   (c) Combien y a-t-il d'arêtes dans un tournoi à n sommets ? Quelle est la somme des scores ?
   (d) Montrer que dans un tournoi avec un nombre de sommets pair, il n'est pas possible que tous les sommets aient le même score.
2. Dans cette question on veut démontrer que tout tournoi contient un chemin hamiltonien, c'est-à-dire un chemin passant une fois et une seule par chacun des sommets (on ne demande pas que ce chemin soit un cycle : le chemin n'est pas obligé de revenir à son point de départ).
   (a) Donner tous les chemins hamiltoniens du tournoi suivant :



   (b) Soit un chemin $s_1 \to \dots \to s_k$ dans un tournoi, et a un sommet de ce tournoi qui n'est pas dans ce chemin. Montrer qu'au moins une de ces trois propriétés est vraie :

$$(i)\ a \to s_1 \qquad (ii)\ s_k \to a \qquad (iii)\ \exists i.\ 1 \leq i \leq k-1\ \land\ s_i \to a \to s_{i+1}$$

   (c) Montrer par récurrence sur n que tout tournoi à n sommets contient un chemin hamiltonien.