Outils logiques et algorithmiques – TD 12 – Composantes connexes

Exercice 1

1. Vrai
2. Faux

Exercice 2

1. R réflexive car pour tout x, $f(x) = f(x)$. R symétrique car si $f(x) = f(y)$ alors $f(y) = f(x)$. Transitivité : supposons xRy et yRz. Alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ et donc $f(x) = f(z)$. D'où xRz. Les classes d'équivalence sont les ensembles d'antécédents des éléments de B.
2. La relation $\subseteq$ n'est pas symétrique. Par exemple $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$ mais $\mathbb{N} \not\subseteq \emptyset$.

Exercice 3

1. La composante connexe de a contient a et est donc non vide. Tout sommet appartient à sa composante connexe. Si un sommet a appartient à la composante connexe de b alors il y a un chemin de a à b et tout élément de la composante connexe de a est aussi relié à b et donc dans la composante connexe de b. On a aussi que il y a un chemin de b à a et donc les deux composantes connexes de a et de b sont égales.
   Si l'intersection des composantes connexes de a et de b est non vide, appellons x un élément de cette intersection, on a alors $CC(b) = CC(x) = CC(a)$ et donc les deux composantes sont égales.
2. Il y au maximum une composante par sommet (s'il n'y a pas d'arêtes) et donc n composantes et au minimum 1 (graphe fortement connexe).
3. Il y a deux cas, si a et b sont dans deux composantes connexes différentes alors l'ajout d'une arête entre les deux fait diminuer le nombre de composantes de 1 : on a $CC_{G'}(a) = CC_G(a) \cup CC_G(b)$ et $CC_{G'}(c) = CC_G(c)$ pour tout $c \notin CC_G(a) \cup CC_G(b)$ Si maintenant on a a et b qui étaient dans la même composante connexe alors il y avait un chemin de a à b dans le graphe G, en ajoutant la nouvelle arête on a un cycle qui passe par a.
4. Si on prend un graphe à n sommets sans arêtes il y a n composantes connexes. A chaque fois que l'on ajoute une arête sans ajouter de cycle, on diminue d'un le nombre de composantes connexes et donc après avoir ajouter $n-1$ arêtes il ne reste plus qu'une composante connexe et donc on peut plus ajouter d'arête sans créer de cycle.

Exercice 4

1. Trois composantes : $\{a, b, e\}$, $\{f\}$ et $\{c, d, g, h\}$.
2. Comme s_1 (resp. s_2) est dans la composante fortement de s, on en déduit un chemin de s_1 vers s (resp. de s vers s_2). Par concaténation de ces deux chemins on obtient un chemin de s_1 vers s_2.
3. On a trois arêtes $\{a, b, e\} \longrightarrow \{f\}$, $\{a, b, e\} \longrightarrow \{c, d, g, h\}$ et $\{c, d, g, h\} \longrightarrow \{f\}$.
4. Récurrence sur k.
   — *Cas* $k = 0$. On parle d'un chemin vide dont le départ et l'arrivée sont la même composante, disons C. Soient s_1 et s_2 dans C, par le résultat précédent on a bien un chemin de s_1 vers s_2.
   — *Cas* $k + 1$. Soit k tel que la propriété soit vraie. Soit un chemin ρ de longueur $k + 1$ dans le graphe des composantes $C(G)$ et soit s_1 (resp. s_2) un sommet dans la composante de départ $C_1 = \sigma(\rho)$ (resp. d'arrivée $C_2 = \tau(\rho)$).
   Le chemin ρ se décompose en une arête de C_1 vers une autre composante C_3, et un chemin de longueur k de C_3 vers C_2. Par définition il existe deux sommets $s_1' \in C_1$ et $s_3 \in C_3$ tels qu'il y ait une arête de s_1' vers s_3 dans G. Par hypothèse de récurrence on a dans G un chemin ρ_2 de s_3 vers s_2 de longueur au moins k. Par propriété des composantes fortement connexes on a dans G un chemin ρ_1 (de longueur éventuellement nulle) de s_1 vers s_1'. On combine alors ρ_1, l'arête de s_1' à s_3 et ρ_2 pour obtenir un chemin de s_1 à s_2 dans G, de longueur au moins $k + 1$.

5. Supposons qu'il existe un cycle ρ dans le graphe des composantes $C(G)$. On note C_1 et C_2 les deux premiers sommets de ρ. Ces sommets sont différents et on a des chemins de C_1 vers C_2 et de C_2 vers C_1. Soient $s_1 \in C_1$ et $s_2 \in C_2$. Par la question précédente on a un chemin de s_1 à s_2 et un chemin de s_2 à s_1, et ainsi s_1 et s_2 sont dans la même composante fortement connexe. Contradiction. Par l'absurde on a démontré que le graphe des composante est acyclique.

Exercice 5

1. Montrons que E est une relation d'équivalence.
   - Réflexivité : Pour tout $x \in A$, on a $R(x,x)$, donc $E(x,x)$.
   - Symétrie : Soient $x, y \in A$. On suppose $E(x,y)$, montrons que $E(y,x)$. On a $E(x,y) \iff R(x,y) \wedge R(y,x) \iff E(y,x)$.
   - Transitivité : Soient $x, y, z \in A$. On suppose $E(x,y)$ et $E(y,z)$, on montre que $E(x,z)$. On a $E(x,y)$ donc $R(x,y)$ et $R(y,x)$. On a également $E(y,z)$ donc $R(y,z)$ et $R(z,y)$. Par transitivité de R, on a $R(x,z)$ et $R(z,x)$, donc $E(x,z)$.

   Montrons que pour tout $X \in A/E$, on a $\forall x, y \in X, R(x,y)$. Soit $X \in A/E$. Soient $x, y \in X$, on a $E(x,y)$, donc en particulier $R(x,y)$.
2. La relation E est la restriction de R à sa partie symétrique, on a donc :
   $E = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$. Les classes d'équivalence sont donc $\{a,b\}$, $\{c\}$ et $\{d\}$.
3. On a pour $X, Y \in A/E$, $RE(X,Y) \exists x \in X, \exists y \in Y, R(x,y)$.
   (a) Montrons que $RE(X,Y) \forall x \in X, \forall y \in Y, R(x,y)$. Soient $X, Y \in A/E$, on suppose $RE(X,Y)$. Par définition de RE on sait qu'il existe x et y telles que $x \in X$, $y \in Y$ et $R(x,y)$. Soient $s \in X$ et $t \in Y$, montrons que $R(s,t)$.
   On a $s, x \in X$ donc $R(s,x)$, on a $y, t \in Y$ donc $R(y,t)$, et on sait que $R(x,y)$, donc par transitivité de R, on a $R(s,t)$. L'autre sens est évident.
   (b) Montrons que RE est une relation d'ordre sur A/E.
      - Réflexivité : Soit $X \in A/E$, pour tout $x \in X$, $R(x,x)$ donc $RE(X,X)$.
      - Anti-symétrie : Soient $X, Y \in A/E$. On suppose que $RE(X,Y)$ et $RE(Y,X)$, montrons que $X = Y$. On a $RE(X,Y)$ donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x,y)$. On a $RE(Y,X)$ donc pour tout $y \in Y, x \in X, R(y,x)$. Donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x,y) \wedge R(y,x)$, d'où $E(x,y)$ et X et Y sont la même classe d'équivalence.
      - Transitivité : Soient $X, Y, Z \in A/E$. On suppose que $RE(X,Y)$ et $RE(Y,Z)$. Montrons que $RE(X,Z)$. On a $RE(X,Y)$ donc pour tout $x \in X, y \in Y, R(x,y)$. On a $RE(Y,Z)$ donc pour tout $y \in Y, z \in Z, R(y,z)$. Donc pour tout $x \in X, z \in Z, R(x,z)$ par transitivité de R, d'où $RE(X,Z)$.
   (c) Sur l'exemple précédent, on a $RE(\{a,b\},\{a,b\})$, $RE(\{c\},\{c\})$, $RE(\{d\},\{d\})$ et $RE(\{a,b\},\{c\})$.

Exercice 6

1. Pour x_i : $\mathsf{if}_i(\mathsf{T},\mathsf{F})$, et pour $\neg x_i$: $\mathsf{if}_i(\mathsf{F},\mathsf{T})$.
2. Formule représentée par l'arbre : $t' \equiv (x_i \wedge t) \vee (\neg x_i \wedge t)$. Supposons qu'une interprétation valide t, alors quelle que soit la valeur associée à x_i elle valide aussi t'. Supposons qu'une interprétation valide t', alors elle valide au moins l'une des deux formules $x_i \wedge t$, $\neg x_i \wedge t$, et donc dans tous les cas elle valide t.
3. Faire les tables de vérité.
4.
$$\begin{aligned}
\mathsf{not}(\mathsf{T}) &= \mathsf{F}\\
\mathsf{not}(\mathsf{F}) &= \mathsf{T}\\
\mathsf{not}(\mathsf{if}_i(t_1,t_2)) &= \mathsf{if}_i(\mathsf{not}(t_1),\mathsf{not}(t_2))
\end{aligned}$$

5. Une tautologie est une formule vraie quelles que soient les valeurs données aux variables propositionnelles. Un critère simple pour cela est d'avoir toutes les feuilles égales à T.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{tauto}(\mathsf{T}) & = & \mathsf{true} \\
\mathsf{tauto}(\mathsf{F}) & = & \mathsf{false} \\
\mathsf{tauto}(\mathsf{if}_i(t_1, t_2)) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \mathsf{true} & \text{si } \mathsf{tauto}(t_1) = \mathsf{tauto}(t_2) = \mathsf{true} \\ \mathsf{false} & \text{sinon} \end{array} \right.
\end{array}
$$

On peut cependant avoir des cas plus compliqués, par exemple avec l'arbre $\mathsf{if}_1(\mathsf{T}, \mathsf{if}_1(\mathsf{F}, \mathsf{T}))$. Le critère simple devient complet si on a des contraintes de forme sur l'arbre, par exemple en demandant que chaque variable n'apparaissent qu'une fois au plus sur tout chemin de la racine à une feuille (ou a fortiori avec le critère usuel des arbres de décision, qui demande que les variables apparaissent en ordre strictement croissant sur ces chemins).