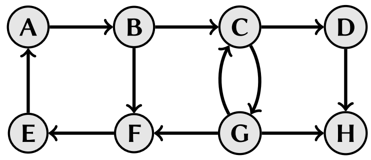
Outils logiques et algorithmiques – TD 5 – Chemins et terminaison

Exercise 1 (Vrai ou faux ?) À propos du graphe suivant :



1. Il existe un chemin de F à G.
2. Il existe un chemin de D à C.
3. Il existe un cycle passant par D.
4. Il existe un chemin ayant D comme point de départ et comme point d'arrivée.

□

Exercise 2 (Circuits Hamiltoniens) L'*hypercube* de dimension n est un graphe défini comme suit :

— ses sommets sont les mots de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1\}$,

— il y a une arête entre le sommet $a_1 \dots a_n$ et le sommet $b_1 \dots b_n$ si et seulement si les deux mots diffèrent d'une seule lettre, c'est-à-dire s'il existe un entier i entre 1 et n tel que $a_i \neq b_i$ et pour tout entier j entre 1 et n, si $j \neq i$ alors $a_j = b_j$.

On appelle *circuit hamiltonien* un cycle qui passe une unique fois par chaque sommet.

1. Dessiner les graphes HC_0, HC_1, HC_2, HC_3.
2. Quel sont le nombre de sommets, le nombre d'arêtes, et le degré des sommets du graphe HC_n ?
3. Construire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension 2.
4. On suppose que l'on connait un circuit hamiltonien dans l'hypercube de dimension n, montrer comment en déduire un circuit hamiltonien pour l'hypercube de dimension $n + 1$.
5. En déduire des circuits hamiltoniens des hypercubes de dimensions 3 et 4.

□

Exercise 3 (Petits trains) Mes enfants rangent leurs petits trains. Ils optent pour la technique suivante : prendre un train non rangé au hasard, s'il contient un seul élément le ranger dans la caisse, sinon le séparer en deux trains plus petits (et les laisser avec les trains non rangés). Recommencer tant qu'il reste des trains à ranger.

1. On considère les trains non rangés. À chaque étape, comment évolue le nombre de trains ? Le nombre de wagons (on néglige la nuance entre wagon et locomotive) ? Le nombre de trains d'une taille donnée ? Ces éléments peuvent-ils donner un ordre justifiant que ce rangement terminera un jour ?
2. On propose de représenter une configuration des trains à ranger par un graphe dont les sommets sont les wagons. Que pourraient représenter les arêtes ? Utiliser les caractéristiques du graphe pour justifier que le rangement terminera bien.

□

Exercise 4 (Bug de terminaison) Voici une réalisation de la recherche dichotomique en java. On prétend comme d'habitude que ce programme termine à coup sûr avec le variant `hi-lo`.

```
static boolean search(int e, int[] t) {
    int lo = 0, hi = t.length;
    while (lo < hi) {
        int mid = lo + (hi-lo)/2;
        if (t[mid] == e) return true;
        else if (t[m] < e)  { lo = mid; }
        else /* t[m] > e */ { hi = mid; }
    }
    return false;
}
```

Montrer que l'exécution de ce programme est susceptible de ne pas terminer dans certains cas, et donc que ce programme est erroné. *Indication : essayez sur des exemples très, très simples.* □

Exercise 5 (Fonction de Ackermann) Soient $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ des ensembles, chacun muni d'un ordre strict bien fondé. On définit une relation binaire $<$ sur $A \times B$ par la condition suivante :

$(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ si et seulement si $a_1 <_A a_2$ ou $a_1 = a_2 \wedge b_1 <_B b_2$

1. En admettant que cette relation est un ordre strict, montrer qu'il est bien fondé. Au fait, reconnaissez-vous cet ordre ?

Voici le code d'une fonction java.

```
static int ack(int m, int n) {
  if (m == 0)       return n+1;
  else if (n == 0) return ack(m-1, 1);
  else              return ack(m-1, ack(m, n-1));
}
```

2. Montrer que, pour tous entiers positifs m et n, l'appel $\mathtt{ack}(m, n)$ termine.

□

Exercise 6 (Ordres) On définit une relation sur les fonctions de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$f < g \stackrel{\text{def}}{=}$ il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $f(l) < g(l)$ et $(\forall k < l, f(k) = g(k))$

1. Comparer selon cette relation les fonctions $f(k) = k$, $g(k) = (k\%3)$ et $h(k) = (k\%6)$. On précisera à chaque fois l'entier l de la définition.
   On rappelle la définition de l'opération modulo : $(k\%p)$ représente le reste de la division euclidienne de k par p.
2. Montrer que cette relation transitive.
   Comme la relation est en outre irréflexice, on dira qu'il s'agit d'un ordre strict.
3. Est-ce un ordre total ?
4. Pour tout n, on considère la fonction f_n telle que $f_n(k) = 0$ si $k < n$ et $f_n(k) = 1$ si $n \leq k$. Montrer que $f_{n+1} < f_n$ pour tout n.
5. L'ordre proposé est-il bien fondé ?

□