Outils logiques et algorithmiques – TD 5 – Correction

Exercice 1

1. Vrai : FEABCG.
2. Faux, à cause de l'orientation.
3. Faux, à cause de l'orientation toujours.
4. Vrai : le chemin vide.

Exercice 2

1. HC_0 : point, HC_1 : segment, HC_2 : carré, HC_3 : cube.
2. Sommets : 2^n, degré de chaque sommet : n, on en déduit un nombre d'arêtes $n2^n/2 = n2^{n-1}$.
3. Circuit : le carré lui-même.
4. Supposons un circuit de la forme $a_1 \ldots a_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow b_1 \ldots b_n \longrightarrow a_1 \ldots a_n$. On peut le reproduire pour le sous-graphe de HC_{n+1} dans lequel la $n+1$ème dimension vaut 0, et une fois (en sens inverse) pour le sous-graphe de HC_{n+1} dans lequel la $n+1$ème dimension vaut 1. On obtient alors circuit le circuit hamiltonien $a_1 \ldots a_n 0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow b_1 \ldots b_n 0 \longrightarrow b_1 \ldots b_n 1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_1 \ldots a_n 1 \longrightarrow a_1 \ldots a_n 0$.
5. .

Exercice 3

1. Selon le train sélectionné à une étape donnée on a l'une des situations suivantes : le nombre de train et le nombre de wagons diminuent de un, ou le nombre de train augmente de un pendant que le nombre de wagons reste stable. Dans ce dernier cas, un train a disparu pour laisser la place à deux trains plus petits. Rien de tout cela ne donne directement d'ordre décroissant. (on pourrait prendre un ordre lexicographique sur un tableau comptant le nombre de trains de chaque taille, par tailles décroissantes ; on peut généraliser l'idée avec un ordre multi-ensemble, mais ce n'est pas au programme du cours)
2. Les arêtes représentent les liaisons entre deux wagons. À chaque étape, soit le nombre de sommets soit le nombre d'arêtes diminue de un. On a donc une justification directe avec un ordre produit, ou un ordre sur la somme.

Exercice 4 La différence avec le programme donné en cours est à la ligne 7 (dans le cours on avait `lo = mid+1`). Cette modification va mettre en défaut la décroissance du variant dans les cas où `lo` et `mid` sont égaux, ce qui advient lorsque `hi` $=$ `lo` $+1$. Pour trouver ce problème il suffit de chercher `2` dans le tableau `{1}` (une recherche de `0` ou `1` en revanche aboutirait sans encombre).

Exercice 5

1. Avec la définition de l'ordre bien fondé comme "toute partie non vide admet un élément minimal". Soit P une partie non vide de $A \times B$. L'ensemble $A' = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in P\}$ est une partie non vide de A. Comme $<_A$ est un ordre bien fondé, A' admet un élément minimal, qu'on note a_0. L'ensemble $B' = \{b \in B \mid (a_0, b) \in P\}$ est une partie non vide de B. Comme $<_B$ est un ordre bine fondé, B' admet un élément minimal, qu'on note b_0. Alors (a_0, b_0) est un élément minimal de P.

   Justification de la minimalité de (a_0, b_0) *:* soit $(a, b) \in P$ tel que $(a, b) < (a_0, b_0)$. Par inversion, soit $a < a_0$ soit $a = a_0 \land b < b_0$.

   — Supposons $a < a_0$. Comme $(a, b) \in P$ on déduit $a \in A'$. Contradiction avec la minimalité de a_0.

   — Supposons $a = a_0$ et $b < b_0$. Comme $(a_0, b) \in P$ on déduit $b \in B'$. Contradiction avec la minimalité de b_0.

   Donc (a, b) est un élément minimal de P.

2. On vérifie que tous les appels récursifs potentiellement déclenchés par $\mathtt{ack}(m, n)$ sont sur des paramètres m' et n' tels que $(m', n') < (m, n)$.
   - Si $m = 0$, aucun appel.
   - Si $m > 0$ et $n = 0$, appel $\mathtt{ack}(m-1, 1)$, avec $(m-1, 1) < (m, n)$ car $m - 1 < m$.
   - Si $m > 0$ et $n > 0$, deux appels $\mathtt{ack}(m, n-1)$ et $\mathtt{ack}(m-1, x)$ (avec x le résultat de $\mathtt{ack}(m, n-1)$). On a bien d'abord $(m, n-1) < (m, n)$, avec $m = m$ et $n - 1 < n$. En outre, quel que soit x on peut affirmer que $(m-1, x) < (m, n)$, car $m - 1 < m$.

   On a donc systématiquement décroissance stricte pour $<$ à chaque appel récursif. Or cet ordre est bien fondé : la fonction ack termine bien pour tous paramètres positifs.

Exercice 6

1. On cherche le premier entier pour lequel les valeurs de f, g et h diffèrent (plus précisément, le premier entier pour chaque paire de fonctions).

   Les trois fonctions sont égales sur les arguments 0, 1 et 2. On a en revanche $f(3) = h(3) = 3$ et $g(3) = 0$. Donc $g(3) < f(3)$ et $g(3) < h(3)$ et on en déduit $g < f$ et $g < h$ (avec $l = 3$). Les fonctions f et h restent égales jusqu'à 5. Puis on a $f(6) = 6$ et $h(6) = 0$, d'où $h < f$ (avec $l = 6$). L'ordre complet est donc $g < h < f$.
2. Pour montrer que la relation est transitive on suppose $f < g$ et $g < h$ pour trois fonctions f, g et h arbitraires (il ne s'agit **pas** des trois fonctions de la question 1 !) et on essaie de justifier que $f < h$.

   Si $f < g$ alors il existe un $l \in \mathbb{N}$ tel que $f(l) < g(l) \wedge (\forall k < l, f(k) = g(k))$, et de même si $g < h$ il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $g(m) < h(m) \wedge (\forall k < m, g(k) = h(k))$. (Attention, rien ne dit que ce l et ce m sont égaux, il faut donc bien garder deux noms distincts)

   On cherche alors un p tel que $f(p) < h(p)$ et $\forall k < p, f(k) = h(k)$.

   Prenons p le minimum de l et de m. De nos deux hypothèses $\forall k < l, f(k) = g(k)$ et $\forall k < m, g(k) = h(k)$ on a donc $\forall k < p, f(k) = g(k) = h(k)$.

   Selon que $l > m$, $l = m$ ou $l < m$ on a en outre $f(p) = g(p) < h(p)$ ou $f(p) < g(p) < h(p)$ ou $f(p) < g(p) = h(p)$, c'est-à-dire dans tous les cas $f(p) < h(p)$.
3. L'ordre est total, c'est-à-dire que parmi n'importe quelles deux fonctions distinctes on aura toujours une plus petite et une plus grande. En effet, si $f \neq g$ alors regardons le plus petit l tel que $f(l) \neq g(l)$. Par définition, on a $\forall k < l, f(k) = g(k)$. En outre, on a soit $f(l) < g(l)$, dont on déduit $f < g$, soit $f(l) > g(l)$, dont on déduit $f > g$.
4. Il faut trouver un l permettant de comparer f_{n+1} et f_n. On prend $l = n$. Par définition des fonctions f_n on a bien $\forall k < n, f_{n+1}(k) = 0 = f_n(k)$, et $f_{n+1}(n) = 0 < 1 = f_n(n)$.
5. L'ordre n'est pas bien fondé, car la suite des fonctions f_n forme une suite infinie strictement décroissante.