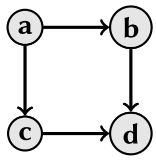
Outils logiques et algorithmiques – TD 6 – Correction

Exercice 1

1. Etats successifs de la pile : [], [A], [A,B], [A,B,C], [A,B,C,D], [A,B,C,D,G], [A,B,C,D,G,F], [A,B,C,D,G], [A,B,C,D,G,H], [A,B,C,D,G], [A,B,C,D], [A,B,C], [A,B], [A,B,E], [A,B], [A], [].
2. Après exécution de `visiter s` l'état de la pile `en_cours` est le même qu'avant l'appel (pendant l'exécution, des sommets ont été d'abord ajoutés puis retirés). Le sommet retiré à la fin est exactement `s`.
3. Lorsqu'un nouveau sommet `s'` est ajouté au sommet de la pile, ledit sommet est un successeur du sommet alors présent au sommet de la pile.
4. Dans un DAG comme dessiné ci-dessous le sommet d est considéré deux fois comme le sommet courant, et est donc déjà marqué lors de la deuxième fois. Le graphe est pourtant acyclique.

   Correction du critère : on a un cycle lorsque le sommet rendant le test vrai est dans la pile `en_cours` (peut se montrer en utilisant la question 3).

Exercice 2

1. L'ensemble `à_explorer` peut grandir ou rétrécir. Le nombre de sommets marqués peut rester stable ou augmenter.
2. On prend un ordre lexicographique avec en première composante le nombre de sommets non marqués, et en deuxième composante le nombre de sommets dans l'ensemble `à_explorer`. En effet, lors de l'exploration d'un sommet dont certains voisins ne sont pas encore marqués on marque ces voisins (et le nombre de sommets non marqués diminue), et lorsque tous les voisins sont marqués le nombre de sommets non marqués reste stable mais le nombre de sommets dans `à_explorer` diminue (on a retiré `s` au début de la boucle, et on n'a ajouté aucun voisin).

Exercice 3

1. Soient deux sommets s et s' dans G. Si G' est une couverture connexe de G alors il existe un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G'. Or les arêtes de G' sont présentes dans G et le chemin $s \longrightarrow^* s'$ existe donc bien dans G.
2. S'il existait un cycle, on pourrait en retirer une arête quelconque pour obtenir une couverture plus petite sans casser la connexité.
3. Un triangle équilatéral.
4. Soit une couverture connexe G' contenant a. Si G' contient tout le cycle ρ alors G' n'est pas minimale. Sinon, il existe une arête a' de ρ qui n'est pas dans G'. On vérifie que le graphe $G'' = (G' \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$ est une couverture connexe de G : soient s et s' deux sommets, par hypothèse il existe un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G'. Si ce chemin n'emprunte pas l'arête a alors il existe également dans G''. Sinon on le décompose en $s \longrightarrow^* s_1 \xrightarrow{a} s_2 \longrightarrow^* s'$. Par hypothèse on a également des chemins $s_1 \longrightarrow^* s_3$ et $s_4 \longrightarrow^* s_2$ avec s_3 et s_4 les extrémités de a'. On peut faire en sorte que ces chemins ne passent pas par a. On relie alors s et s' dans G'' en combinant ces chemins avec a'.
5. Supposons avoir deux couvertures connexes minimales différentes G'_1 et G'_2. On regarde la plus petite arête présente dans l'une et pas dans l'autre. On note a cette arête et on suppose $a \in G'_1$. G'_2 étant une couverture connexe, on a un chemin $s \longrightarrow^* s'$ dans G'_2 reliant les deux extrémités de a, et donc un cycle $s \longrightarrow^* s' \xrightarrow{a} s$ dans G. L'arête a n'est pas l'arête de longueur maximale de ce cycle (sinon, le cycle serait intégralement présent dans G'_1). Donc l'arête maximale du cycle est dans G'_2, qui par la question précédente n'est pas une couverture minimale.

6. On garde dans l'arbre couvrant : 2, 3, 4, 5, 6, 9.
7. Deux éléments principaux : le tri initial des arêtes, puis la gestion des composantes connexes. Un bon tri a une complexité $n\log(n)$ pour un ensemble de n éléments (ici les arêtes). Le suivi des composantes connexes est quasi-linéaire en le nombre de sommets avec *union-find*.
8. On prend le graphe complet dont les sommets sont les points de E, et où la longueur d'une arête est la distance euclidienne entre ses extrémités. Le nombre d'arêtes est donc quadratique en le nombre de points de E. L'objectif est de trouver un cycle passant par tous les sommets. On n'a pas imposé que le cycle soit hamiltonien (on a le droit de passer plusieurs fois par un sommet donné).
9. Une tournée est un chemin passant par tous les sommets, il s'agit donc d'une couverture connexe. En outre elle n'est pas minimale car elle est un cycle.
10. Partant de n'importe quel sommet, un parcours en profondeur de l'arbre couvrant minimal passe par tous les sommets du graphe (c'est donc une tournée) en empruntant deux fois chaque arête de l'arbre (d'où la longueur double de la somme des longueurs des arêtes de l'arbre couvrant).