Théorie des groupes/*Group Theory*

Variétés de groupes et *m*-identités

Olivier Chapuis

Résumé – Soit m un entier positif. Soit V une variété de groupes. Nous étudions la propriété « G^m est nilpotent pour tout groupe linéaire G de V », en utilisant un théorème célèbre de Thomson sur les groupes simples finis minimaux. Nous en déduisons pour divers entiers m que si un groupe linéaire G satisfait une m-identité alors G^m est nilpotent.

Varieties of groups and *m*-identities

Abstract – *Let m be a positive integer. Let* V *a variety of groups. We study the property "*G^m *is nilpotent for all linear group* G *of* V*" and use a famous theorem of Thomson on minimal finite simple groups. We deduce for various integers m that if a linear group satisfies a m-identity then* G^m *is nilpotent.*

Notre point de départ est un résultat récent de M. Boffa et F. Point selon lequel si m est une puissance d'un nombre premier, alors, pour tout groupe linéaire G satisfaisant une m-identité, le sous-groupe G^m engendré par les puissances m-ièmes des éléments de G est nilpotent (*voir* [2]). Pour étendre ce résultat, nous démontrons un théorème concernant les variétés de groupes. Rappelons qu'un nombre premier est dit de Mersenne s'il est de la forme 2^q-1. Nous dirons, pour les besoins de cette Note, qu'un entier est admissible s'il est impair ou s'il est de la forme $2^n p^k$ avec $n \geqq 1$, $k \geqq 0$, où p est un nombre premier qui n'est pas de Mersenne.

Théorème. – *Soit* V *une variété de groupes et soit m un entier* $\geqq 1$. *On considère les propriétés suivantes :*

(*a*) G^m *est nilpotent pour tout groupe résoluble fini* G *de* V;

(*b*) G^m *est nilpotent pour tout groupe fini* G *de* V;

(*c*) G^m *est nilpotent pour tout groupe résoluble de type fini* G *de* V;

(*d*) G^m *est nilpotent pour tout groupe linéaire* G *de* V.

Les propriétés (*a*) *et* (*c*), *respectivement* (*b*) *et* (*d*), *sont équivalentes pour tout entier* $m \geqq 1$. *De plus, si m est un entier admissible les propriétés* (*a*), (*b*), (*c*) *et* (*d*) *sont équivalentes.*

Dans [1] M. Boffa et F. Point montrent ce théorème dans le cas $m=1$; par ailleurs, si un groupe résoluble fini G satisfait une m-identité, alors G^m est nilpotent (*voir* [2]). On obtient donc le :

Corollaire. – (1) *Soit un entier* $m \geqq 1$. *Si un groupe résoluble* G *de type fini satisfait une m-identité, alors* G^m *est nilpotent.* (2) *Soit m un entier admissible. Si un groupe linéaire* G *satisfait une m-identité, alors* G^m *est nilpotent.*

Dans [2] M. Boffa et F. Point montrent que pour tout entier $m \geqq 1$, l'implication $(b) \to (d)$ est vraie, ils en déduisent que si un groupe résoluble linéaire G satisfait une m-identité, alors G^m est nilpotent. D'autre part, P. Wantiez a montré que A_5 satisfait une $2^2\,3^4$-identité, ceci montre que la deuxième partie du corollaire ainsi que l'implication $(a) \to (b)$ n'est pas vraie en générale. A la fin de la Note, pour chaque entier m de la forme $2^n p^k$ où $n \geqq 1$, $k \geqq 1$ et où p est un nombre premier de Mersenne, on donnera un exemple montrant que l'implication $(a) \to (b)$ n'est pas vraie en général. Mais on ne sait pas (par exemple) si la deuxième partie du corollaire est vraie ou non pour $m=6$.

Note présentée par Jacques Tits.

0764-4442/93/03160015 $ 2.00

Démonstration. — Les implications $(d) \to (b)$, $(c) \to (a)$ et $(b) \to (a)$ sont clairement vraies pour tout entier $m \geqq 1$; comme M. Boffa et F. Point ont montré que l'implication $(b) \to (d)$ est vraie pour tout entier $m \geqq 1$, il nous reste à considérer les implications $(a) \to (c)$ et $(a) \to (b)$.

(a) *implique* (c). — Si $m=1$ c'est une application directe d'un théorème de Robinson et Wehrfritz : pour qu'un groupe résoluble de type fini soit nilpotent, il suffit que ses images finies soient nilpotentes (*voir* [4], 15.5.3). Soit m un entier $\geqq 1$, et supposons (a). Soit G un groupe résoluble de type fini de V; G^m est d'indice fini dans G (*voir* [4], 5.4.11), donc G^m est de type fini. Soit H un sous-groupe normal d'indice fini de G^m. Il existe alors un sous-groupe K de H qui est normal dans G et qui est d'indice fini dans G^m, K est alors d'indice fini dans G, et donc par hypothèse $(G/K)^m$ qui est égal à G^m/K est nilpotent, ce qui implique que G^m/H est nilpotent; G^m est donc nilpotent.

(a) *implique* (b) *pour m admissible.* — Dans le cas $m=1$, l'implication $(a) \to (b)$ découle directement d'un théorème de Schmidt : un groupe fini dont tous les sous-groupes sont nilpotents est résoluble (*voir* [4], 9.1.9). On considère donc pour tout entier $m \geqq 1$ l'énoncé suivant : « Pour tout groupe G fini, si pour tout sous-groupe propre H de G, H^m est nilpotent, alors G est résoluble ». Désignons par $e(m)$ cet énoncé. Si $e(m)$ est vrai, il est clair que l'implication $(a) \to (b)$ est vraie pour m. D'autre part, il est facile de trouver un m pour lequel $e(m)$ est faux : prendre $G = A_5$ et $m=30$; cela nous amène à considérer l'ensemble

$$\begin{aligned} M = \{ m \geqq 1 \mid G^m \neq 1 \text{ pour tout groupe simple fini non abélien G} \} \\ = \{ m \geqq 1 \mid \text{pour tout groupe fini G, si } G^m = 1 \text{ alors G est résoluble} \}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Feit et Thomson, M contient tous les nombres impairs, et d'après un théorème de Burnside, M contient tous les nombres de la forme $q^n p^k$ où n et k sont des entiers et où p et q sont des nombres premiers (*voir* [4], 8.5.3). Donc tout entier admissible appartient à M. Désignons par T l'ensemble des groupes simples finis non abéliens, minimaux pour la relation d'ordre sur les groupes finis : « est image homomorphe d'un sous-groupe de ». Il est alors clair que pour tout $m \in M$, si pour tout $S \in T$, S possède un sous-groupe propre H tel que H^m ne soit pas nilpotent, alors $e(m)$ est vraie.

Pour conclure il nous suffit donc d'étudier les sous-groupes des groupes de T. Or un théorème de Thomson donne explicitement T (*voir* [6], p. 418), les éléments de T sont les groupes suivants : A_5, $PSL_3(3)$, $PSL_2(3^q)$, $PSL_2(l)$, $SL_2(2^q)$ et $Sz(2^q)$ où l parcourt l'ensemble des nombres premiers $p > 5$ tels que $p \equiv \pm 2 \bmod 5$ et où q parcourt l'ensemble des nombres premiers impairs (Sz désigne les groupes de Suzuki, *voir* [5], p. 133).

Soit m un entier admissible. Commençons par supposer m impair. On notera D_r le groupe dihédral d'ordre $2r$. On sait que D_r est engendré par ses éléments d'ordre deux, donc $D_r^m = D_r$, de plus D_r est nilpotent seulement si r est une puissance de 2. Or $PSL_2(3^q)$, $PSL_2(l)$, $SL_2(2^q)$ et $Sz(2^q)$, avec l et q comme ci-dessus, contiennent un groupe dihédral non nilpotent (*voir* [6], 6.26 (i) chapitre 3 et [5] p. 137 pour les groupes de Suzuki). Il nous reste à considérer A_5 et $PSL_3(3)$, A_5 contient S_3 et $PSL_3(3)$ contient S_4; or si $n \geqq 3$, S_n n'est pas nilpotent et S_n est engendré par ses éléments d'ordre deux.

On suppose maintenant que $m = 2^n p^k$ avec $n \geqq 1$, $k \geqq 0$, où p est un nombre premier qui n'est pas de Mersenne. Les groupes A_5, $PSL_3(3)$, $PSL_2(3^q)$ et $PSL_2(l)$ contiennent A_4 (*voir* [6], 6.26 (ii) chapitre 3); or A_4 n'est pas nilpotent et comme 3 ne divise pas m, $A_4^m = A_4$. Les groupes $SL_2(2^q)$ et $Sz(2^q)$ contiennent chacun un groupe de Frobenius H de noyau N et de complément D (*voir* [6], 6.26 (i) chapitre 3 et [5], p. 133 et 137). Comme

$p \neq 2^q - 1$, des calculs simples montrent que $N^m \neq 1$ et que $D^m \neq 1$; N^m étant normal dans H, on en déduit que H^m contient un groupe de Frobenius de noyau N^m et de complément D^m, or un groupe de Frobenius n'est pas nilpotent (*voir* [4], p. 243).

On a donc démontré le théorème. On va maintenant donner les exemples annoncés au début de la Note.

Soit S un groupe simple fini non abélien et soit $m \in M$. Notons V(S) la variété engendrée par S, et supposons qu'il existe un entier c tel que pour tout sous-groupe maximal H de S, H^m est nilpotent de classe $\leqq c$. Soit G un groupe résoluble fini de V(S); G est une image d'un groupe libre de rang fini r de V(S). Or un résultat de S. Oates permet de montrer que ce groupe est de la forme $S \times \ldots \times S \times F_r$, où F_r est le groupe libre de rang r de la variété engendrée par les sous-groupes maximaux de S (*voir* [3], p. 141). Comme G est résoluble, G est image homomorphe de F_r, donc G est image homomorphe d'un sous-groupe d'une puissance cartésienne finie de sous-groupe maximaux de S; on en déduit que G^m est nilpotent de classe $\leqq c$. Donc G^m est nilpotent de classe $\leqq c$ pour tout groupe résoluble fini G de V(S); mais comme $S^m = S$ il existe des groupes finis H de V(S) tels que H^m n'est pas nilpotent.

Soit $m = 2^n p^k$ où $n \geqq 1$, $k \geqq 1$ et où $p = 2^q - 1$ est un nombre premier de Mersenne. Si l'on a $q = 2$, on considère A_5; les sous-groupes maximaux de A_5 sont A_4, S_3 et D_5, et il est facile de voir que $A_4^6 = S_3^6 = 1$ et que D_5^6 est le groupe cyclique d'ordre 5. Si l'on a $q > 2$, on considère $SL_2(2^q)$; les sous-groupes maximaux de $SL_2(2^q)$ sont parmi les suivants : $D_{2^q \pm 1}$, S_3 et H qui est un produit semi-direct de $D = \{ d_w \mid w \in F^* \}$ et $N = \{ t_\lambda \mid \lambda \in F \}$ avec $d_w^{-1} t_\lambda d_w = t_{w^2 \lambda}$ et où F est le corps fini à 2^q éléments (*voir* [6], p. 417). Il est alors facile de voir que S_3^2 et $D_{2^q \pm 1}^2$ sont des groupes cycliques (d'ordre $3, 2^q + 1$ et $2^q - 1$ respectivement) et que $H^{2^q - 1} = 1$. Donc d'après le paragraphe précédent, on obtient :

Exemple. — Si p est un nombre premier de Mersenne et si $m = 2^n p^k$ avec $n \geqq 1$ et $k \geqq 1$, il existe une variété de groupe V qui possède un groupe simple fini non abélien S avec $S^m = S$, tel que G^m est abélien pour tout groupe résoluble fini G de V.

Note remise le 9 novembre 1992, acceptée le 12 novembre 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. BOFFA et F. POINT, Identités de Engel généralisées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 909-911.

[2] M. BOFFA et F. POINT, *m*-identités, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1992, p. 879-880.

[3] H. NEUMANN, *Varieties of groups*, Springer, 1967.

[4] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer, 1982.

[5] M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, 75, 1962, p. 105-145.

[6] M. SUZUKI, *Group Theory I*, Springer, 1982.

Équipe de Logique mathématique,
Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématique,
2, place Jussieu, 75251 *Paris Cedex* 05.