

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1993.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

\*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

\*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

\*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

\*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisation@bnf.fr](mailto:reutilisation@bnf.fr).

Variétés de groupes et  $m$ -identités

Olivier CHAPUIS

**Résumé** — Soit  $m$  un entier positif. Soit  $V$  une variété de groupes. Nous étudions la propriété «  $G^m$  est nilpotent pour tout groupe linéaire  $G$  de  $V$  », en utilisant un théorème célèbre de Thomson sur les groupes simples finis minimaux. Nous en déduisons pour divers entiers  $m$  que si un groupe linéaire  $G$  satisfait une  $m$ -identité alors  $G^m$  est nilpotent.

Varieties of groups and  $m$ -identities

**Abstract** — Let  $m$  be a positive integer. Let  $V$  a variety of groups. We study the property “ $G^m$  is nilpotent for all linear group  $G$  of  $V$ ” and use a famous theorem of Thomson on minimal finite simple groups. We deduce for various integers  $m$  that if a linear group satisfies a  $m$ -identity then  $G^m$  is nilpotent.

Notre point de départ est un résultat récent de M. Boffa et F. Point selon lequel si  $m$  est une puissance d'un nombre premier, alors, pour tout groupe linéaire  $G$  satisfaisant une  $m$ -identité, le sous-groupe  $G^m$  engendré par les puissances  $m$ -ièmes des éléments de  $G$  est nilpotent (voir [2]). Pour étendre ce résultat, nous démontrons un théorème concernant les variétés de groupes. Rappelons qu'un nombre premier est dit de Mersenne s'il est de la forme  $2^q - 1$ . Nous dirons, pour les besoins de cette Note, qu'un entier est admissible s'il est impair ou s'il est de la forme  $2^n p^k$  avec  $n \geq 1$ ,  $k \geq 0$ , où  $p$  est un nombre premier qui n'est pas de Mersenne.

**THÉORÈME.** — Soit  $V$  une variété de groupes et soit  $m$  un entier  $\geq 1$ . On considère les propriétés suivantes :

- (a)  $G^m$  est nilpotent pour tout groupe résoluble fini  $G$  de  $V$ ;
- (b)  $G^m$  est nilpotent pour tout groupe fini  $G$  de  $V$ ;
- (c)  $G^m$  est nilpotent pour tout groupe résoluble de type fini  $G$  de  $V$ ;
- (d)  $G^m$  est nilpotent pour tout groupe linéaire  $G$  de  $V$ .

Les propriétés (a) et (c), respectivement (b) et (d), sont équivalentes pour tout entier  $m \geq 1$ . De plus, si  $m$  est un entier admissible les propriétés (a), (b), (c) et (d) sont équivalentes.

Dans [1] M. Boffa et F. Point montrent ce théorème dans le cas  $m = 1$ ; par ailleurs, si un groupe résoluble fini  $G$  satisfait une  $m$ -identité, alors  $G^m$  est nilpotent (voir [2]). On obtient donc le :

**COROLLAIRE.** — (1) Soit un entier  $m \geq 1$ . Si un groupe résoluble  $G$  de type fini satisfait une  $m$ -identité, alors  $G^m$  est nilpotent. (2) Soit  $m$  un entier admissible. Si un groupe linéaire  $G$  satisfait une  $m$ -identité, alors  $G^m$  est nilpotent.

Dans [2] M. Boffa et F. Point montrent que pour tout entier  $m \geq 1$ , l'implication (b)  $\rightarrow$  (d) est vraie, ils en déduisent que si un groupe résoluble linéaire  $G$  satisfait une  $m$ -identité, alors  $G^m$  est nilpotent. D'autre part, P. Wantiez a montré que  $A_5$  satisfait une  $2^2 3^4$ -identité, ceci montre que la deuxième partie du corollaire ainsi que l'implication (a)  $\rightarrow$  (b) n'est pas vraie en générale. A la fin de la Note, pour chaque entier  $m$  de la forme  $2^n p^k$  où  $n \geq 1$ ,  $k \geq 1$  et où  $p$  est un nombre premier de Mersenne, on donnera un exemple montrant que l'implication (a)  $\rightarrow$  (b) n'est pas vraie en général. Mais on ne sait pas (par exemple) si la deuxième partie du corollaire est vraie ou non pour  $m = 6$ .

Note présentée par Jacques TITS.

*Démonstration.* — Les implications  $(d) \rightarrow (b)$ ,  $(c) \rightarrow (a)$  et  $(b) \rightarrow (a)$  sont clairement vraies pour tout entier  $m \geq 1$ ; comme M. Boffa et F. Point ont montré que l'implication  $(b) \rightarrow (d)$  est vraie pour tout entier  $m \geq 1$ , il nous reste à considérer les implications  $(a) \rightarrow (c)$  et  $(a) \rightarrow (b)$ .

*(a) implique (c).* — Si  $m=1$  c'est une application directe d'un théorème de Robinson et Wehrfritz : pour qu'un groupe résoluble de type fini soit nilpotent, il suffit que ses images finies soient nilpotentes (voir [4], 15.5.3). Soit  $m$  un entier  $\geq 1$ , et supposons (a). Soit  $G$  un groupe résoluble de type fini de  $V$ ;  $G^m$  est d'indice fini dans  $G$  (voir [4], 5.4.11), donc  $G^m$  est de type fini. Soit  $H$  un sous-groupe normal d'indice fini de  $G^m$ . Il existe alors un sous-groupe  $K$  de  $H$  qui est normal dans  $G$  et qui est d'indice fini dans  $G^m$ ,  $K$  est alors d'indice fini dans  $G$ , et donc par hypothèse  $(G/K)^m$  qui est égal à  $G^m/K$  est nilpotent, ce qui implique que  $G^m/H$  est nilpotent;  $G^m$  est donc nilpotent.

*(a) implique (b) pour  $m$  admissible.* — Dans le cas  $m=1$ , l'implication  $(a) \rightarrow (b)$  découle directement d'un théorème de Schmidt : un groupe fini dont tous les sous-groupes sont nilpotents est résoluble (voir [4], 9.1.9). On considère donc pour tout entier  $m \geq 1$  l'énoncé suivant : « Pour tout groupe  $G$  fini, si pour tout sous-groupe propre  $H$  de  $G$ ,  $H^m$  est nilpotent, alors  $G$  est résoluble ». Désignons par  $e(m)$  cet énoncé. Si  $e(m)$  est vrai, il est clair que l'implication  $(a) \rightarrow (b)$  est vraie pour  $m$ . D'autre part, il est facile de trouver un  $m$  pour lequel  $e(m)$  est faux : prendre  $G=A_5$  et  $m=30$ ; cela nous amène à considérer l'ensemble

$$M = \{ m \geq 1 \mid G^m \neq 1 \text{ pour tout groupe simple fini non abélien } G \} \\ = \{ m \geq 1 \mid \text{pour tout groupe fini } G, \text{ si } G^m = 1 \text{ alors } G \text{ est résoluble} \}.$$

D'après le théorème de Feit et Thomson,  $M$  contient tous les nombres impairs, et d'après un théorème de Burnside,  $M$  contient tous les nombres de la forme  $q^n p^k$  où  $n$  et  $k$  sont des entiers et où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers (voir [4], 8.5.3). Donc tout entier admissible appartient à  $M$ . Désignons par  $T$  l'ensemble des groupes simples finis non abéliens, minimaux pour la relation d'ordre sur les groupes finis : « est image homomorphe d'un sous-groupe de ». Il est alors clair que pour tout  $m \in M$ , si pour tout  $S \in T$ ,  $S$  possède un sous-groupe propre  $H$  tel que  $H^m$  ne soit pas nilpotent, alors  $e(m)$  est vraie.

Pour conclure il nous suffit donc d'étudier les sous-groupes des groupes de  $T$ . Or un théorème de Thomson donne explicitement  $T$  (voir [6], p. 418), les éléments de  $T$  sont les groupes suivants :  $A_5$ ,  $\text{PSL}_3(3)$ ,  $\text{PSL}_2(3^q)$ ,  $\text{PSL}_2(l)$ ,  $\text{SL}_2(2^q)$  et  $\text{Sz}(2^q)$  où  $l$  parcourt l'ensemble des nombres premiers  $p > 5$  tels que  $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$  et où  $q$  parcourt l'ensemble des nombres premiers impairs ( $\text{Sz}$  désigne les groupes de Suzuki, voir [5], p. 133).

Soit  $m$  un entier admissible. Commençons par supposer  $m$  impair. On notera  $D_r$  le groupe diédral d'ordre  $2r$ . On sait que  $D_r$  est engendré par ses éléments d'ordre deux, donc  $D_r^m = D_r$ , de plus  $D_r$  est nilpotent seulement si  $r$  est une puissance de 2. Or  $\text{PSL}_2(3^q)$ ,  $\text{PSL}_2(l)$ ,  $\text{SL}_2(2^q)$  et  $\text{Sz}(2^q)$ , avec  $l$  et  $q$  comme ci-dessus, contiennent un groupe diédral non nilpotent (voir [6], 6.26(i) chapitre 3 et [5] p. 137 pour les groupes de Suzuki). Il nous reste à considérer  $A_5$  et  $\text{PSL}_3(3)$ ,  $A_5$  contient  $S_3$  et  $\text{PSL}_3(3)$  contient  $S_4$ ; or si  $n \geq 3$ ,  $S_n$  n'est pas nilpotent et  $S_n$  est engendré par ses éléments d'ordre deux.

On suppose maintenant que  $m=2^n p^k$  avec  $n \geq 1$ ,  $k \geq 0$ , où  $p$  est un nombre premier qui n'est pas de Mersenne. Les groupes  $A_5$ ,  $\text{PSL}_3(3)$ ,  $\text{PSL}_2(3^q)$  et  $\text{PSL}_2(l)$  contiennent  $A_4$  (voir [6], 6.26(ii) chapitre 3); or  $A_4$  n'est pas nilpotent et comme 3 ne divise pas  $m$ ,  $A_4^m = A_4$ . Les groupes  $\text{SL}_2(2^q)$  et  $\text{Sz}(2^q)$  contiennent chacun un groupe de Frobenius  $H$  de noyau  $N$  et de complément  $D$  (voir [6], 6.26(i) chapitre 3 et [5], p. 133 et 137). Comme

$p \neq 2^q - 1$ , des calculs simples montrent que  $N^m \neq 1$  et que  $D^m \neq 1$ ;  $N^m$  étant normal dans  $H$ , on en déduit que  $H^m$  contient un groupe de Frobenius de noyau  $N^m$  et de complément  $D^m$ , or un groupe de Frobenius n'est pas nilpotent (voir [4], p. 243).

On a donc démontré le théorème. On va maintenant donner les exemples annoncés au début de la Note.

Soit  $S$  un groupe simple fini non abélien et soit  $m \in M$ . Notons  $V(S)$  la variété engendrée par  $S$ , et supposons qu'il existe un entier  $c$  tel que pour tout sous-groupe maximal  $H$  de  $S$ ,  $H^m$  est nilpotent de classe  $\leq c$ . Soit  $G$  un groupe résoluble fini de  $V(S)$ ;  $G$  est une image d'un groupe libre de rang fini  $r$  de  $V(S)$ . Or un résultat de S. Oates permet de montrer que ce groupe est de la forme  $S \times \dots \times S \times F_r$ , où  $F_r$  est le groupe libre de rang  $r$  de la variété engendrée par les sous-groupes maximaux de  $S$  (voir [3], p. 141). Comme  $G$  est résoluble,  $G$  est image homomorphe de  $F_r$ , donc  $G$  est image homomorphe d'un sous-groupe d'une puissance cartésienne finie de sous-groupe maximaux de  $S$ ; on en déduit que  $G^m$  est nilpotent de classe  $\leq c$ . Donc  $G^m$  est nilpotent de classe  $\leq c$  pour tout groupe résoluble fini  $G$  de  $V(S)$ ; mais comme  $S^m = S$  il existe des groupes finis  $H$  de  $V(S)$  tels que  $H^m$  n'est pas nilpotent.

Soit  $m = 2^n p^k$  où  $n \geq 1$ ,  $k \geq 1$  et où  $p = 2^q - 1$  est un nombre premier de Mersenne. Si l'on a  $q = 2$ , on considère  $A_5$ ; les sous-groupes maximaux de  $A_5$  sont  $A_4$ ,  $S_3$  et  $D_5$ , et il est facile de voir que  $A_4^6 = S_3^6 = 1$  et que  $D_5^6$  est le groupe cyclique d'ordre 5. Si l'on a  $q > 2$ , on considère  $SL_2(2^q)$ ; les sous-groupes maximaux de  $SL_2(2^q)$  sont parmi les suivants :  $D_{2^q \pm 1}$ ,  $S_3$  et  $H$  qui est un produit semi-direct de  $D = \{d_w \mid w \in F^*\}$  et  $N = \{t_\lambda \mid \lambda \in F\}$  avec  $d_w^{-1} t_\lambda d_w = t_{w^2 \lambda}$  et où  $F$  est le corps fini à  $2^q$  éléments (voir [6], p. 417). Il est alors facile de voir que  $S_3^2$  et  $D_{2^q \pm 1}^2$  sont des groupes cycliques (d'ordre  $3, 2^q + 1$  et  $2^q - 1$  respectivement) et que  $H^{2^q - 1} = 1$ . Donc d'après le paragraphe précédent, on obtient :

*Exemple.* — Si  $p$  est un nombre premier de Mersenne et si  $m = 2^n p^k$  avec  $n \geq 1$  et  $k \geq 1$ , il existe une variété de groupe  $V$  qui possède un groupe simple fini non abélien  $S$  avec  $S^m = S$ , tel que  $G^m$  est abélien pour tout groupe résoluble fini  $G$  de  $V$ .

Note remise le 9 novembre 1992, acceptée le 12 novembre 1992.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. BOFFA et F. POINT, Identités de Engel généralisées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, 1991, p. 909-911.
- [2] M. BOFFA et F. POINT,  $m$ -identités, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1992, p. 879-880.
- [3] H. NEUMANN, *Varieties of groups*, Springer, 1967.
- [4] D. J. S. ROBINSON, *A course in the theory of groups*, Springer, 1982.
- [5] M. SUZUKI, On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.*, 75, 1962, p. 105-145.
- [6] M. SUZUKI, *Group Theory I*, Springer, 1982.

Équipe de Logique mathématique,  
Université Paris-VII, U.F.R. de Mathématique,  
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.