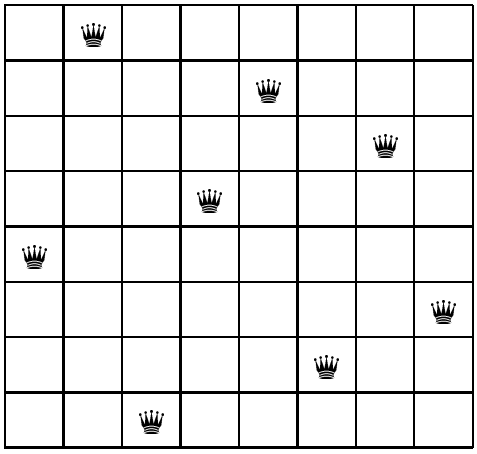
Le problème des n reines

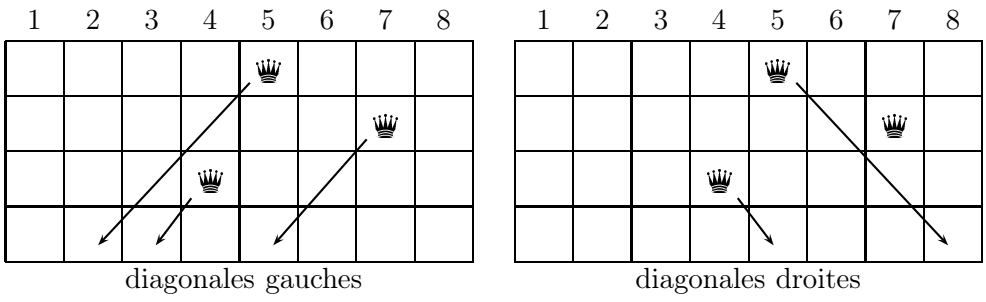
Le problème des n reines consiste à placer n reines sur un échiquier de taille $n \times n$ de telle sorte qu'aucune ne soit en prise : il ne faut donc pas plus d'une reine par ligne, par colonne et par diagonale. Voici un exemple pour $n = 8$.



Le but de cet exercice est d'écrire un programme en Python qui permette de calculer le nombre de manières différentes de résoudre ce problème pour un nombre n quelconque de reines. Pour cela, nous allons utiliser un algorithme de recherche avec retour arrière (ou *backtracking* en anglais) qui va remplir les lignes de l'échiquier une à une. Afin de remplir une ligne, l'algorithme maintient 3 ensembles :

- a : contient les numéros des colonnes où il n'y a encore aucune reine de placée ;
- b : contient les numéros des colonnes sur lesquelles il n'est pas possible de placer une reine car ces positions se trouvent sur la diagonale *gauche* d'une reine déjà placée ;
- c : joue le même rôle que b mais pour les diagonales *droites*.

Par exemple, après avoir placé les 3 premières reines sur les colonnes 5, 7 et 4 (dans cet ordre) d'un échiquier 8×8, on a la situation suivante



diagonales gauches diagonales droites

qui est représentée par les trois ensembles $a = \{1, 2, 3, 6, 8\}$, $b = \{2, 3, 5\}$ et $c = \{5, 8\}$. L'ensemble des colonnes où il est encore possible de placer une reine pour la 4e ligne est donc tout simplement $(a \setminus b) \setminus c$, soit ici $\{1, 6\}$. L'algorithme consiste alors à essayer *une à une* ces positions : récursivement, on cherche les solutions pour lesquelles la 4e reine est

placée sur la colonne 1 puis, en revenant en arrière, récursivement celles pour lesquelles la reine est placée sur la colonne 6. À chaque appel récursif, les ensembles a, b et c sont modifiés en fonction de la colonne i choisie : i est supprimée de a et ajoutée aux ensembles b et c ; ces ensembles b et c sont alors mis à jour en décrémentant (resp. incrémentant) les éléments qu'ils contiennent afin de calculer les nouvelles diagonales des reines placées sur l'échiquier.

Dans la suite, nous allons simplement représenter les ensembles a, b et c par des listes d'entiers.

Question 1 Écrire une fonction `list_of_int` telle que `list_of_int(n)` renvoie la liste `[1,2,...,n]` si `n` est positif et la liste vide sinon.

Question 2 En utilisant des itérateurs sur les listes, écrire les fonctions `succ_list` et `pred_list` telles que `succ_list([a1,a2,...,an])` renvoie la liste `[a1+1,a2+1,...,an+1]` et `pred_list([a1,a2,...,an])` renvoie la liste `[a1-1,a2-1,...,an-1]`.

Question 3 En utilisant un itérateur sur les listes, écrire la fonction `diff` telle que `diff(l1,l2)` renvoie une liste contenant les éléments de `l1` qui ne sont pas éléments de `l2`.

Question 4 En utilisant un itérateur sur les listes, écrire une fonction `remove` telle que `remove(l, x)` renvoie une liste contenant les éléments de `l` sauf `x`.

La question suivante est l'algorithme principal du problème des n reines. Il s'agit d'écrire une fonction récursive prenant en arguments les 3 ensembles a, b et c décrits précédemment. Cette fonction renvoie le nombre de solutions qui prolongent la solution partielle décrite par a, b et c. En particulier, elle renvoie l'entier 1 quand l'ensemble a est vide (puisqu'il n'y a plus de reines à placer c'est qu'une solution a été trouvée).

Question 5 À l'aide des fonctions précédentes, et en utilisant un itérateur sur les listes, écrire une fonction récursive `nb_solutions` telle que `nb_solutions(a, b, c)` renvoie le nombre de solutions correspondant aux ensembles `a`, `b` et `c` donnés en paramètres.

Enfin, la question suivante consiste à écrire la fonction principale du programme qui se contente d'appeler la fonction `nb_solutions` avec comme paramètres les ensembles $a = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $b = c = \emptyset$.

Question 6 Écrire une fonction `reines` telle que `reines(n)` renvoie le nombre de solutions au problème des `n` reines.