

Cours 2-5

Démonstration automatique

Évelyne Contejean

5 octobre 2012

Étape de réécriture

$$s \xrightarrow[l \rightarrow r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p = l\sigma \quad \text{et} \quad t = s[r\sigma]_p$$

Étape équationnelle

$$s \xleftrightarrow[u = v, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p = u\sigma \quad \text{et} \quad t = s[v\sigma]_p$$

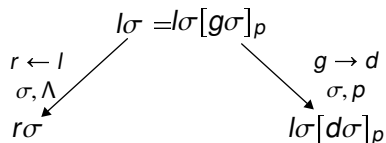
Pics et paires critiques

$l \longrightarrow r$ et $g \longrightarrow d$ deux règles

Hypothèses :

- il existe p **position non variable** de l
- $l|_p$ et g sont **unifiables** avec pour unificateur principal σ

Pic critique de $g \longrightarrow d$ sur $l \longrightarrow r$ à la position p

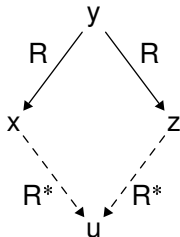


Paire critique

$$(r\sigma, l\sigma[d\sigma]_p) \quad \text{ou} \quad r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p$$

Joignabilité et confluence locale

Définition : un pic $x \leftarrow y \rightarrow z$ (ou une paire (x, y)) est **joignable** si il existe u tel que $x \rightarrow^* u$ et $z \rightarrow^* u$.



Définition : R est **localement confluent** si toutes ses paires critiques sont joignables.

Théorème : Si R est localement confluent et termine, alors

$$\forall s, t, s \xrightarrow[\{l=r \mid l \rightarrow r \in R\}]{*} t \iff \exists u, s \xrightarrow[R]{*} u \xleftarrow[R]{*} t$$

Et si R n'est pas localement confluent ?

En fait, la vraie question est

- on a un ensemble d'équations (pas d'orientation)
- comment trouver un ensemble de règles
 - 1 équivalent
 - 2 localement confluent
 - 3 qui termine

Solution : la **complétion**

Les entrées de la complétion

- Un ensemble d'**équations**
- Un **ordre** de réécriture, bien fondé, stable par instanciation et mise sous contexte

Idées de base :

- Utiliser l'ordre pour **orienter** les équations
- Ajouter les **paires critiques** non joignables entre règles sous forme de nouvelles équations

But :

- Ordre bien fondé \longrightarrow réécriture qui **termine**
- Ajout de paires critiques \longrightarrow **confluence locale**

Les règles de complétion (0)

Structures de données et initialisation

L'ordre est fixé, et ne change pas au cours de la complétion

Les équations et les règles évoluent : $E; R$

Initial $\frac{\quad}{E_0; \emptyset}$

Les règles de complétion (1)

Orientation

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E; R \cup \{s \rightarrow t\}} \quad \text{si } s \succ t$$

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E; R \cup \{t \rightarrow s\}} \quad \text{si } t \succ s$$

Les règles de complétion (2)

Déduction (paires critiques)

Paire Critique $\frac{E ; R}{E \cup \{e\} ; R}$ si e est une paire critique de R

Les règles de complétion (3)

Trivial

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\}; R}{E; R}$$

Les règles de complétion (4)

Simplification (des équations)

$$\text{Simplifie } \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E \cup \{s' = t\}; R} \quad \text{si } s \xrightarrow{R} s'$$

$$\text{Simplifie } \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E \cup \{s = t'\}; R} \quad \text{si } t \xrightarrow{R} t'$$

Les règles de complétion (5)

Composition (des règles)

$$\text{Compose} \quad \frac{E ; R \cup \{I \rightarrow r\}}{E ; R \cup \{I \rightarrow r'\}} \quad \text{si } r \xrightarrow{R} r'$$

Les règles de complétion (6)

Effondrement (d'une règle)

$$\text{Collapse} \quad \frac{E ; R \cup \{l \rightarrow r\}}{E \cup \{l' = r\} ; R}$$

si $l \xrightarrow{g \rightarrow d} l', g \rightarrow d \in R$, et

- $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$ ou σ n'est pas un renommage
- ou $l = g\sigma$ et $r > d\sigma$ avec σ qui est un renommage.

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (1)

Entrées

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} e \cdot x = x \\ l(x) \cdot x = e \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{array} \right\}$$

RPO avec la précedence $l > \cdot > e$,

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (2)

Orientation de E_1

$$\begin{array}{l} E_1 \quad e \cdot x = x \\ E_2 \quad l(x) \cdot x = e \\ E_3 \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (3)

Orientation de E_2

$$\begin{array}{l} E_2 \quad I(x) \cdot x = e \\ E_3 \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (4)

Orientation de E_3

$$E_3 \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (5)

Calcul de paire critique entre R_4 et R_6

$$\begin{array}{l} R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e \\ R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ E_7 \quad e \cdot (y \cdot z) = y \cdot z \end{array}$$

Pic critique

$$e \cdot (y \cdot z) \xleftarrow{R_6} (e \cdot y) \cdot z \xrightarrow{R_4} y \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (6)

Simplification de E_7 par R_4

$$\begin{array}{l} R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e \\ R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ E_7 \quad e \cdot (y \cdot z) = y \cdot z \\ E_8 \quad y \cdot z = y \cdot z \end{array}$$

Réduction

$$e \cdot (y \cdot z) \xrightarrow[R_4]{\Lambda} y \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (7)

Destruction de E_8 par Trivial

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$E_8 \quad y \cdot z = y \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (8)

Calcul de paires critiques entre R_5 et R_6

$$\begin{array}{l} R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e \\ R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ E_9 \quad l(x) \cdot (x \cdot z) = e \cdot z \end{array}$$

Pic critique

$$l(x) \cdot (x \cdot z) \xleftarrow[R_6]{\wedge} (l(x) \cdot x) \cdot z \xrightarrow[R_5]{1} e \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (9)

Simplification de E_9 par R_4

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$E_9 \quad I(x) \cdot (x \cdot z) = e \cdot z$$

$$E_{10} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) = z$$

Réduction

$$e \cdot z \xrightarrow[R_4]{\wedge} z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (10)

Orientation de E_{10}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$E_{10} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) = z$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (11)

Calcul de paire critique entre R_6 et elle-même

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ E_{12} & (x_1 \cdot x_2) \cdot (y \cdot z) & = (x_1 \cdot (x_2 \cdot y)) \cdot z \end{array}$$

Pic critique

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (y \cdot z) \xleftarrow{R_6} ((x_1 \cdot x_2) \cdot y) \cdot z \xrightarrow{R_6} (x_1 \cdot (x_2 \cdot y)) \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (12)

Simplification de E_{12} par R_6 , et destruction de l'équation obtenue

$$\begin{array}{l} R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e \\ R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} \quad l(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z \\ E_{12} \quad (x_1 \cdot x_2) \cdot (y \cdot z) = (x_1 \cdot (x_2 \cdot y)) \cdot z \end{array}$$

Réductions

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (y \cdot z) \xrightarrow[R_6]{\Lambda} x_1 \cdot (x_2 \cdot (y \cdot z))$$

$$(x_1 \cdot (x_2 \cdot y)) \cdot z \xrightarrow[R_6]{\Lambda} x_1 \cdot ((x_2 \cdot y) \cdot z) \xrightarrow[R_6]{2} x_1 \cdot (x_2 \cdot (y \cdot z))$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (13)

Calcul de paire critique entre R_4 et R_{11}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ E_{13} & z & = l(e) \cdot z \end{array}$$

Pic critique

$$z \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} l(e) \cdot (e \cdot z) \xrightarrow[R_4]{2} l(e) \cdot z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (14)

Orientation de E_{13}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad l(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad l(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$E_{13} \quad z = l(e) \cdot z$$

$$R_{14} \quad l(e) \cdot z \rightarrow z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (15)

Calcul de paire critique entre R_5 et R_{11}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & l(e) \cdot z & \rightarrow z \\ E_{15} & x & = l(l(x)) \cdot e \end{array}$$

Pic critique

$$x \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} l(l(x)) \cdot (l(x) \cdot x) \xrightarrow[R_5]{2} l(l(x)) \cdot e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (16)

Orientation de E_{15}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$R_{14} \quad I(e) \cdot z \rightarrow z$$

$$E_{15} \quad x = I(I(x)) \cdot e$$

$$R_{16} \quad I(I(x)) \cdot e \rightarrow x$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (17)

Calcul de paire critique entre R_{11} et elle-même

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$R_{14} \quad I(e) \cdot z \rightarrow z$$

$$R_{16} \quad I(I(x)) \cdot e \rightarrow x$$

$$E_{17} \quad x \cdot y = I(I(x)) \cdot y$$

Pic critique

$$x \cdot y \xleftarrow[R_{11}]{\wedge} I(I(x)) \cdot (I(x) \cdot (x \cdot y)) \xrightarrow[R_{11}]{2} I(I(x)) \cdot y$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (18)

Orientation de E_{17}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & l(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{16} & l(l(x)) \cdot e & \rightarrow x \\ E_{17} & x \cdot y & = l(l(x)) \cdot y \\ R_{18} & l(l(x)) \cdot y & \rightarrow x \cdot y \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (19)

Effondrement de R_{16} par R_{18}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{16} & I(I(x)) \cdot e & \rightarrow x \\ R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow x \cdot y \\ E_{19} & x \cdot e & = x \end{array}$$

Réduction

$$I(I(x)) \cdot e \xrightarrow[R_{18}]{\wedge} x \cdot e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (20)

Orientation de E_{19}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow x \cdot y \\ E_{19} & x \cdot e & = x \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (21)

Calcul de paire critique entre R_{18} et R_{20} , suivi de simplification

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{18} & I(I(x)) \cdot y & \rightarrow x \cdot y \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ E_{21} & x & = I(I(x)) \end{array}$$

Pic critique

$$x \xleftarrow[R_{20}]{\wedge} x \cdot e \xleftarrow[R_{18}]{\wedge} I(I(x)) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\wedge} I(I(x))$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (22)

Orientation de E_{21}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$R_{14} \quad I(e) \cdot z \rightarrow z$$

$$R_{18} \quad I(I(x)) \cdot y \rightarrow x \cdot y$$

$$R_{20} \quad x \cdot e \rightarrow x$$

$$E_{21} \quad x = I(I(x))$$

$$R_{22} \quad I(I(x)) \rightarrow x$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (23)

Effondrement de R_{18} par R_{22} , et destruction immédiate

$$\begin{array}{l} R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x \\ R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e \\ R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z \\ R_{14} \quad I(e) \cdot z \rightarrow z \\ R_{18} \quad I(I(x)) \cdot y \rightarrow x \cdot y \\ R_{20} \quad x \cdot e \rightarrow x \\ R_{22} \quad I(I(x)) \rightarrow x \end{array}$$

Réduction

$$I(I(x)) \cdot y \xrightarrow[R_{22}]{1} x \cdot y$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (24)

Calcul de paire critique entre R_{14} et R_{20}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & l(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ E_{23} & e & = l(e) \end{array}$$

Pic critique

$$e \xleftarrow[R_{14}]{\Lambda} l(e) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\Lambda} l(e)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (25)

Orientation de E_{23}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ E_{23} & e & = I(e) \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (26)

Effondrement de R_{14} par R_{24} , suivi d'une simplification par R_4 , et destruction immédiate

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{14} & I(e) \cdot z & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \end{array}$$

Réduction

$$I(e) \cdot z \xrightarrow[R_{24}]{1} e \cdot z \xrightarrow[R_4]{\wedge} z$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (27)

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{22}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & l(e) & \rightarrow e \\ E_{25} & z & = x \cdot (l(x) \cdot z) \end{array}$$

Pic critique

$$z \xleftarrow[R_{11}]{\wedge} l(l(x)) \cdot (l(x) \cdot z) \xrightarrow[R_{22}]{1} x \cdot (l(x) \cdot z)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (28)

Orientation de E_{25}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ E_{25} & z & = x \cdot (I(x) \cdot z) \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (29)

Calcul de paire critique entre R_{20} et R_{26}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$R_{20} \quad x \cdot e \rightarrow x$$

$$R_{22} \quad I(I(x)) \rightarrow x$$

$$R_{24} \quad I(e) \rightarrow e$$

$$R_{26} \quad x \cdot (I(x) \cdot z) \rightarrow z$$

$$E_{27} \quad e = x \cdot I(x)$$

Pic critique

$$e \xleftarrow[R_{26}]{\wedge} x \cdot (I(x) \cdot e) \xrightarrow[R_{20}]{2} x \cdot I(x)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (30)

Orientation de E_{27}

$$R_4 \quad e \cdot x \rightarrow x$$

$$R_5 \quad I(x) \cdot x \rightarrow e$$

$$R_6 \quad (x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

$$R_{11} \quad I(x) \cdot (x \cdot z) \rightarrow z$$

$$R_{20} \quad x \cdot e \rightarrow x$$

$$R_{22} \quad I(I(x)) \rightarrow x$$

$$R_{24} \quad I(e) \rightarrow e$$

$$R_{26} \quad x \cdot (I(x) \cdot z) \rightarrow z$$

$$E_{27} \quad e = x \cdot I(x)$$

$$R_{28} \quad x \cdot I(x) \rightarrow e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (31)

Calcul de paire critique entre R_6 et R_{28}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & l(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (l(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot l(x) & \rightarrow e \\ E_{29} & x \cdot (y \cdot l(x \cdot y)) & = e \end{array}$$

Pic critique

$$x \cdot (y \cdot l(x \cdot y)) \xleftarrow[R_6]{\wedge} (x \cdot y) \cdot l(x \cdot y) \xrightarrow[R_{28}]{\wedge} e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (32)

Orientation de E_{29}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ E_{29} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & = e \\ R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow e \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (33)

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{30}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & l(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (l(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot l(x) & \rightarrow e \\ R_{30} & x \cdot (y \cdot l(x \cdot y)) & \rightarrow e \\ E_{31} & y \cdot l(x \cdot y) & = l(x) \cdot e \end{array}$$

Pic critique

$$y \cdot l(x \cdot y) \xleftarrow[R_{11}]{\Lambda} l(x) \cdot (x \cdot (y \cdot l(x \cdot y))) \xrightarrow[R_{30}]{2} l(x) \cdot e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (34)

Simplification de E_{31} par R_{20}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow e \\ E_{31} & y \cdot I(x \cdot y) & = I(x) \cdot e \\ E_{32} & y \cdot I(x \cdot y) & = I(x) \end{array}$$

Réduction

$$I(x) \cdot e \xrightarrow[R_{20}]{\Lambda} I(x)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (35)

Orientation de E_{32}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow e \\ E_{32} & y \cdot I(x \cdot y) & = I(x) \\ R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow I(x) \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (36)

Effondrement et destruction de R_{30} par R_{33} .

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ R_{30} & x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) & \rightarrow e \\ R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow I(x) \end{array}$$

Réduction

$$x \cdot (y \cdot I(x \cdot y)) \xrightarrow[R_{33}]{2} x \cdot I(x) \xrightarrow[R_{28}]{\wedge} e$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (37)

Calcul de paire critique entre R_{11} et R_{33}

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & l(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (l(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot l(x) & \rightarrow e \\ R_{33} & y \cdot l(x \cdot y) & \rightarrow l(x) \\ E_{34} & l(x \cdot y) & = l(y) \cdot l(x) \end{array}$$

Pic critique

$$l(x \cdot y) \xleftarrow{\Lambda} l(y) \cdot (y \cdot l(x \cdot y)) \xrightarrow{2} l(y) \cdot l(x)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (38)

Orientation de E_{34}

$$\begin{array}{lcl} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow I(x) \\ E_{34} & I(x \cdot y) & = I(y) \cdot I(x) \\ R_{35} & I(x \cdot y) & \rightarrow I(y) \cdot I(x) \end{array}$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (39)

Effondrement de R_{33} par R_{35} ,

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & I(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & I(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & I(I(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & I(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (I(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot I(x) & \rightarrow e \\ R_{33} & y \cdot I(x \cdot y) & \rightarrow I(x) \\ R_{35} & I(x \cdot y) & \rightarrow I(y) \cdot I(x) \end{array}$$

Réduction

$$y \cdot I(x \cdot y) \xrightarrow[R_{35}]{} y \cdot (I(y) \cdot I(x)) \xrightarrow[R_{35}]{} I(x)$$

Exemple : les groupes

Exécution de la complétion (40)

$$\begin{array}{lll} R_4 & e \cdot x & \rightarrow x \\ R_5 & l(x) \cdot x & \rightarrow e \\ R_6 & (x \cdot y) \cdot z & \rightarrow x \cdot (y \cdot z) \\ R_{11} & l(x) \cdot (x \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{20} & x \cdot e & \rightarrow x \\ R_{22} & l(l(x)) & \rightarrow x \\ R_{24} & l(e) & \rightarrow e \\ R_{26} & x \cdot (l(x) \cdot z) & \rightarrow z \\ R_{28} & x \cdot l(x) & \rightarrow e \\ R_{35} & l(x \cdot y) & \rightarrow l(y) \cdot l(x) \end{array}$$

Toutes les paires critiques restantes sont joignables, et aucune autre règle n'est applicable.

Le système obtenu est le résultat de la complétion. Il est **confluent**.

Théorème :

Si $(E; R) \vdash (E'; R')$ par une des règles de la complétion, alors les deux relations

$$\begin{array}{c} \longleftarrow * \\ E \cup R \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \longleftarrow * \\ E' \cup R' \end{array}$$

coïncident.

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Croissance des étapes élémentaires

Étape élémentaire entre s et t

$$s[l\theta]_q \xleftrightarrow[\text{I}\Rightarrow\text{r}]{q,\theta} s[r\theta]_q$$

« Croissance » sous un contexte $C[\cdot]_p$ par une substitution σ .

$$C[s[l\theta]_q\sigma]_p = C[s\sigma]_p[l\theta\sigma]_{pq} \xleftrightarrow[\text{I}\Rightarrow\text{r}]{pq,\theta\sigma} C[s\sigma]_p[r\theta\sigma]_{pq} = C[s[r\theta]_q\sigma]_p$$

Notation

$$s - P - t \qquad C[s\sigma]_p - C[P\sigma]_p - C[t\sigma]_p$$

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Croissance d'une séquence d'étapes

Preuve entre s et t

$$s \multimap P_1 \multimap s_1 \dots s_n \multimap P_n \multimap t$$

Preuve entre $C[s\sigma]_p$ et $C[t\sigma]_p$

$$C[s\sigma]_p \multimap C[P_1\sigma]_p \multimap C[s_1\sigma]_p \dots C[s_n\sigma]_p \multimap C[P_n\sigma]_p \multimap C[t\sigma]_p$$

$$C[s\sigma]_p \multimap C[(P_1 \multimap \dots \multimap P_n)\sigma]_p \multimap C[t\sigma]_p$$

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Taille d'une sous-preuve

Preuve P entre s et t

$$s \multimap P_1 \multimap s_1 \dots s_i \multimap P_{i+1} \multimap \dots \multimap P_k \multimap s_k \dots s_n \multimap P_n \multimap t$$

Sous-preuve de P entre s_i et s_k

$$s_i \multimap P_{i+1} \multimap \dots \multimap P_k \multimap s_k$$

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Greffe de deux preuves

Preuve P entre s et t

$$s - P - t$$

Preuve Q entre t et u

$$t - Q - u$$

Preuve PQ entre s et u

$$s - P - t - Q - u$$

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Remplacement d'une sous-preuve par taille et greffe (1)

Preuve $P[Q]$ entre s et t

$$s - P_2 - u - Q - v - P_2 - t$$

Autre preuve Q' entre u et v

$$u - Q' - v$$

Nouvelle preuve $P[Q']$ entre s et t

$$s - P_2 - u - Q' - v - P_2 - t$$

Horticulture dans les preuves (algèbre de preuves)

Remplacement d'une sous-preuve par taille et greffe (2)

Preuve $P[Q]$ entre s et t

$$s - P_2 - u = u[l\theta]_q \xrightarrow[\Leftrightarrow r]{q.\theta} u[r\theta]_q = v - P_2 - t$$

Autre preuve Q'' entre l et r

$$l - Q'' - r$$

Nouvelle preuve $P[u[Q''\theta]_q]$ entre s et t

$$s - P_2 - u - u[Q''\theta]_q - v - P_2 - t$$

Correction de la complétion

Orientation

$$\text{Oriente } \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E; R \cup \{s \rightarrow t\}} \quad \text{si } s > t$$

$$\forall x, \quad x[s\sigma]_q \xrightarrow[s=t]{q} x[t\sigma]_q \quad \text{ssi} \quad x[s\sigma]_q \xrightarrow[s \rightarrow t]{q} x[t\sigma]_q$$

Les deux preuves

$$x[(s = t)\sigma]_q \quad \text{et} \quad x[(s \rightarrow t)\sigma]_q$$

sont interchangeables

Correction de la complétion

Dédution (paires critiques)

Paire Critique $\frac{E; R}{E \cup \{e\}; R}$ si e est une paire critique de R

On suppose que $e \equiv r\sigma = l\sigma[d\sigma]_p$, où

- $l \rightarrow r$ et $g \rightarrow d$ sont deux règles de R ,
- p est une position non variable de l ,
- σ un unificateur principal de $l|_p$ et $g : l_p\sigma = l\sigma|_p = g\sigma$

$$\forall x y, \quad x \xrightarrow[E \cup R]{*} y \quad \Longrightarrow \quad x \xrightarrow[E \cup \{e\} \cup R]{*} y$$

$$r\sigma \xrightarrow[e]{\leftarrow} l\sigma[d\sigma]_p \quad \Longrightarrow \quad r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p$$

Correction de la complétion

Trivial

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\}; R}{E; R}$$

$$\forall x y, \quad x \xrightarrow[s=s]{} y \quad \text{ssi} \quad x \xrightarrow[\emptyset]{*} y \quad \text{ssi} \quad x = y$$

Correction de la complétion

Simplification

$$\text{Simplifie } \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E \cup \{s = t'\}; R} \quad \text{si } t \rightarrow_R t'$$

Soit $l \rightarrow r$ la règle de R qui réduit t en t' à la position p :

$t = t[l\sigma]_p$ et $t' = t[r\sigma]_p$.

$$s \xleftrightarrow[s=t]{} t \implies s \xleftrightarrow[s=t']{} t' = t[r\sigma]_p \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t[l\sigma]_p = t$$

$$s \xleftrightarrow[s=t']{} t' \implies s \xleftrightarrow[s=t]{} t = t[l\sigma] \xrightarrow[l \rightarrow r]{p} t[r\sigma]_p = t'$$

Correction de la complétion

Composition

$$\text{Compose} \quad \frac{E ; R \cup \{l \rightarrow r\}}{E ; R \cup \{l \rightarrow r'\}} \quad \text{si } r \rightarrow_R r'$$

Soit $g \rightarrow d$ la règle de R qui réduit r en r' à la position p : $r = r[g\sigma]_p$ et $r' = r[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \rightarrow r']{} r' = r[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r[g\sigma]_p = r$$

$$l \xrightarrow[l \rightarrow r']{} r' \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r = r[g\sigma]_p \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} r[d\sigma]_p = r'$$

Correction de la complétion

Effondrement

$$\text{Collapse} \quad \frac{E ; R \cup \{l \rightarrow r\}}{E \cup \{l' = r\} ; R} \quad \text{si } l \rightarrow_R l'$$

Soit $g \rightarrow d$ la règle de R qui réduit l en l' à la position p : $l = l[g\sigma]_p$ et $l' = l[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l = l[g\sigma]_p \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l[d\sigma]_p = l' \xleftarrow[l' = r]{} r$$

$$l' \xleftarrow[l' = r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l' = l[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} l[g\sigma]_p = l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r$$

Les métamorphoses d'une preuve

Exemple des groupes

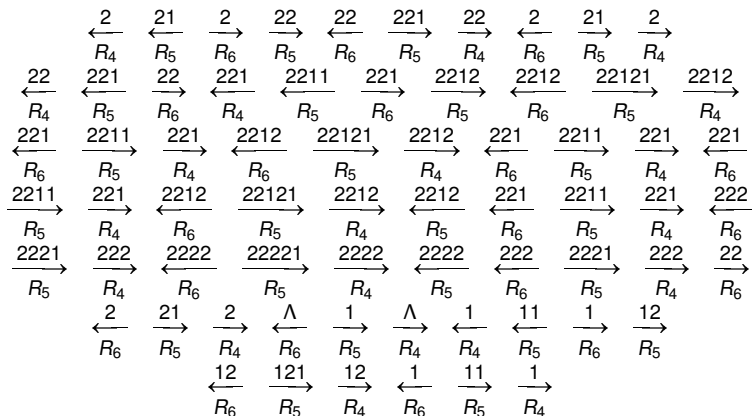
On veut montrer que dans les groupes $I(a \cdot b) = (I(b) \cdot e) \cdot I(a)$

Avec R_ω

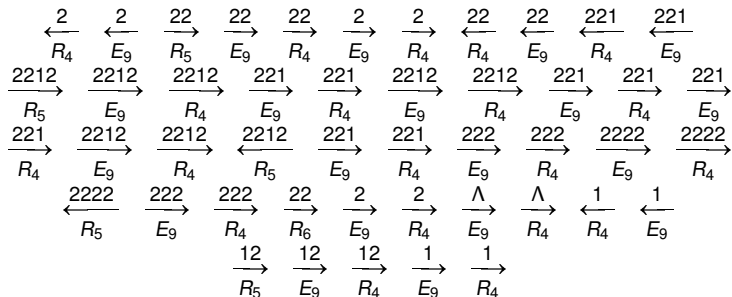
$$I(a \cdot b) \xrightarrow[R_{35}]{\Lambda} I(b) \cdot I(a) \xleftarrow[R_{20}]{1} (I(b) \cdot e) \cdot I(a)$$

Avec E_0 ?

Les métamorphoses d'une preuve (1)



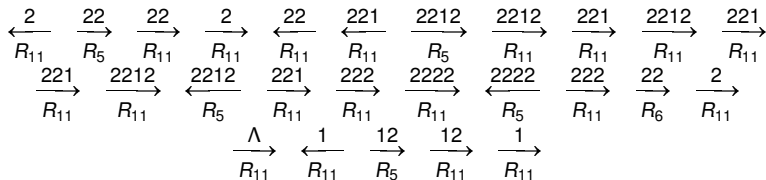
Les métamorphoses d'une preuve (2)



Les métamorphoses d'une preuve (3)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \xleftarrow{2} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} & \xleftarrow{22} & \xleftarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} \\
 E_{10} & R_5 & E_{10} & E_{10} & E_{10} & E_{10} & R_5 & E_{10} & E_{10} & E_{10} & E_{10} \\
 \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xleftarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{2222} & \xleftarrow{2222} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} \\
 E_{10} & E_{10} & R_5 & E_{10} & E_{10} & E_{10} & R_5 & E_{10} & R_6 & E_{10} \\
 & & \xrightarrow{\Lambda} & \xleftarrow{1} & \xrightarrow{12} & \xrightarrow{12} & \xrightarrow{1} \\
 & & E_{10} & E_{10} & R_5 & E_{10} & E_{10}
 \end{array}$$

Les métamorphoses d'une preuve (4)



Les métamorphoses d'une preuve (5)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \xrightarrow{2} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} & \xleftarrow{22} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} \\
 E_{15} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & E_{15} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} \\
 \xleftarrow{221} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{2222} & \xleftarrow{222} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{\wedge} & \xrightarrow{1} & \xrightarrow{12} & \xrightarrow{1} & \\
 E_{15} & R_{11} & R_{11} & E_{15} & R_6 & R_{11} & R_{11} & E_{15} & R_{11} & R_{11} &
 \end{array}$$

Les métamorphoses d'une preuve (6)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \xleftarrow{2} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} & \xleftarrow{22} & \xleftarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{2212} \\
 R_{16} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{16} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} & R_{11} \\
 \xrightarrow{221} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{2222} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{22} & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{\wedge} & \xleftarrow{1} & \xrightarrow{12} & \xrightarrow{1} & \\
 R_{16} & R_{11} & R_{11} & R_{16} & R_6 & R_{11} & R_{11} & R_{16} & R_{11} & R_{11} &
 \end{array}$$

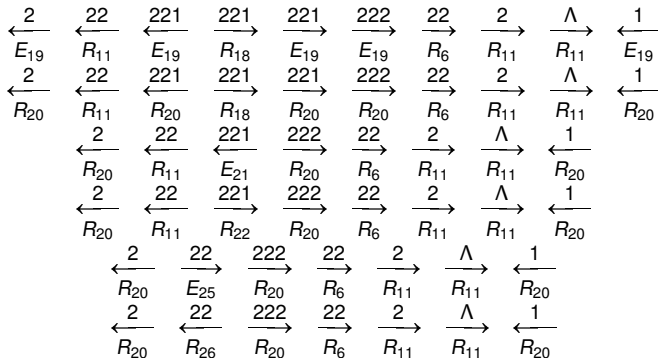
Les métamorphoses d'une preuve (7)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \xleftarrow{2} & \xleftarrow{2} & \xleftarrow{22} & \xleftarrow{221} & \xleftarrow{221} & \xleftarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{22} \\
 R_{16} & E_{17} & R_{11} & R_{16} & E_{17} & R_{17} & E_{17} & R_{16} & E_{17} & R_{16} & R_6 \\
 & & & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{\wedge} & \xleftarrow{1} & \xleftarrow{1} & & & & \\
 & & & R_{11} & R_{11} & R_{16} & E_{17} & & & &
 \end{array}$$

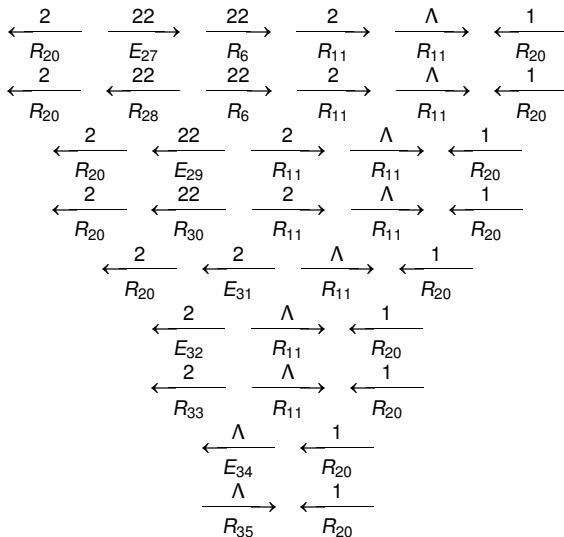
Les métamorphoses d'une preuve (8)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \xleftarrow{2} & \xrightarrow{2} & \xleftarrow{22} & \xleftarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xleftarrow{221} & \xrightarrow{221} & \xleftarrow{222} & \xrightarrow{222} & \xrightarrow{22} \\
 R_{16} & R_{18} & R_{11} & R_{16} & R_{18} & R_{18} & R_{18} & R_{16} & R_{18} & R_{16} & R_6 \\
 & & & \xrightarrow{2} & \xrightarrow{\wedge} & \xleftarrow{1} & \xrightarrow{1} & & & & \\
 & & & R_{11} & R_{11} & R_{16} & R_{18} & & & &
 \end{array}$$

Les métamorphoses d'une preuve (9)



Les métamorphoses d'une preuve (10)



Persistence

Soit une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \dots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \dots (E_n; R_n) \vdash \dots$$

$$E_\infty = \bigcup_i E_i \qquad R_\infty = \bigcup_i R_i$$

Définition : Une équation (resp. une règle) est **persistante à partir du rang i** si elle appartient à

$$\bigcap_{i \leq j} E_j \qquad \left(\text{resp. } \bigcap_{i \leq j} R_j \right)$$

Une équation (resp. une règle) est **persistante** si elle appartient à

$$E_\omega = \bigcup_i \bigcap_{i \leq j} E_j \qquad \left(\text{resp. } R_\omega = \bigcup_i \bigcap_{i \leq j} R_j \right)$$

Définition : Une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \dots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \dots (E_n; R_n) \vdash \dots$$

est un **succès** si $E_\omega = \emptyset$, un **échec** sinon

Définition : Une exécution de la complétion

$$(E_0; \emptyset) \vdash (E_1; R_1) \vdash \dots (E_i; R_i) \vdash (E_{i+1}; R_{i+1}) \vdash \dots (E_n; R_n) \vdash \dots$$

est **équitable** si toutes les paires critiques entre les règles persistantes sont calculées

$$CP(R_\omega) \subseteq E_\infty$$

Coût d'une étape élémentaire

Coût élémentaire : $(\{m\}, l, t)$ avec $\{m\}$ un multiensemble de termes, l et t deux termes.

Ordre sur les coûts élémentaires : ordre lexicographique

- première composante : extension multiensemble de l'ordre de la complétion $<$
- 2ième composante : partie stricte du plongement
- 3ième composante : $<$

Suivant le cas sur le type d'étape :

$$\bullet s \xleftrightarrow[E_\infty]{} t \rightsquigarrow (\{s, t\}, \perp, \perp)$$

$$\bullet s \xrightarrow[l \rightarrow r]{} t \rightsquigarrow (\{s\}, l, t)$$

$$\bullet s \xleftarrow[r \leftarrow l]{} t \rightsquigarrow (\{t\}, l, s)$$

Coût d'une preuve générale

$$s = P_1 = s_1 \dots s_i = P_{i+1} = \dots = P_k = s_k \dots s_n = P_n = t$$

multiensemble des coûts $c(P_i)$

ordre \ll = extension multiensemble de l'ordre sur les coûts élémentaires.

Remarque Comme $<$ est bien fondé, \ll est **bien fondé**

Lemme : Soit une exécution de la complétion **équitable** et qui **réussit**

$$(E_0, \emptyset) \vdash (E_1, R_1) \vdash \dots (E_n, R_n) \vdash (E_{n+1}, R_{n+1}) \dots$$

Si P prouve de $s \xrightarrow[E_{\infty} \cup R_{\infty}]{*} t$, différente de $\xrightarrow[R_{\omega}]{*} \xleftarrow[R_{\omega}]{*}$

alors il existe P' prouve de $s \xrightarrow[E_{\infty} \cup R_{\infty}]{*} t$ et $P' \ll P$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

Remarque Si P et Q sont deux preuves (élémentaires ou non) avec

$$P \ll Q$$

alors

$$C[P\sigma]_p \ll C[Q\sigma]_p$$

Les ordres de base qui définissent \ll sont **stables** par **mise sous contexte** et **instantiation**

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

Comme $E_\omega = \emptyset$, toutes les équations de E_∞ disparaissent

- Orientation
- Trivial
- Simplification

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

Par définition de R_∞ et R_ω , **toutes les règles de $R_\infty \setminus R_\omega$** disparaissent

- Compose
- Collapse

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

Comme $CP(R_\omega) \subseteq E_\infty$, tous les pics de R_ω disparaissent

- Pic non critique, par commutation (cf lemme des paires critiques)
- Pic critique, par déduction

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, orientation

$$\text{Oriente} \quad \frac{E \cup \{\mathbf{s} = \mathbf{t}\}; R}{E; R \cup \{\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{t}\}} \quad \text{si } \mathbf{s} \succ \mathbf{t}$$

$$\forall x, \quad x[\mathbf{s}\sigma]_q \xrightarrow[\mathbf{s}=\mathbf{t}]{q} x[\mathbf{t}\sigma]_q \quad \Longrightarrow \quad x[\mathbf{s}\sigma]_q \xrightarrow[\mathbf{s}\rightarrow\mathbf{t}]{q} x[\mathbf{t}\sigma]_q$$

$$c(\mathbf{s} = \mathbf{t}) = (\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}, \perp, \perp) \gg (\{\mathbf{s}\}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = c(\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{t})$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, trivial

$$\text{Trivial} \quad \frac{E \cup \{s = s\}; R}{E; R}$$

$$\forall x y, \quad x \xrightarrow[s=s]{} y \quad \Longrightarrow \quad x \xrightarrow[\emptyset]{*} y$$

$$c(\{s = s\}) = \{(\{s, s\}, \perp, \perp)\} \gg c(\{\})$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, simplification

$$\text{Simplifie } \frac{E \cup \{s = t\}; R}{E \cup \{s = t'\}; R} \quad \text{si } t \rightarrow_R t'$$

Soit $l \rightarrow r$ la règle de R qui réduit t en t' à la position p :
 $t = t[l\sigma]_p$ et $t' = t[r\sigma]_p$.

$$s \xrightarrow[s=t]{} t \implies s \xrightarrow[s=t']{} t' = t[r\sigma]_p \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t[l\sigma]_p = t$$

$$c(\{s \xrightarrow[s=t]{} t\}) = \{(\{s, t\}, \perp, \perp)\} \gg \\ \{(\{s, t'\}, \perp, \perp); (\{t, l, t'\})\} = c(s \xrightarrow[s=t']{} t' \xleftarrow[r \leftarrow l]{p} t)$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, composition

$$\text{Compose} \quad \frac{E ; R \cup \{l \rightarrow r\}}{E ; R \cup \{l \rightarrow r'\}} \quad \text{si } r \rightarrow_R r'$$

Soit $g \rightarrow d$ la règle de R qui réduit r en r' à la position p : $r = r[g\sigma]_p$ et $r' = r[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l \xrightarrow[l \rightarrow r']{} r' = r[d\sigma]_p \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r[g\sigma]_p = r$$

$$c(l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r) = \{(\{l\}, l, r)\} \gg \\ \{(\{l\}, l, r'), (\{r\}, g, r')\} = c(l \xrightarrow[l \rightarrow r']{} r' \xleftarrow[d \leftarrow g]{p} r)$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, effondrement

$$\text{Collapse} \quad \frac{E ; R \cup \{l \rightarrow r\}}{E \cup \{l' = r\} ; R} \quad \text{si } l \rightarrow_R l'$$

Soit $g \rightarrow d$ la règle de R qui réduit l en l' à la position p : $l = l[g\sigma]_p$ et $l' = l[d\sigma]_p$.

$$l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r \quad \Longrightarrow \quad l = l[g\sigma]_p \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l[d\sigma]_p = l' \xleftarrow[l' = r]{} r$$

$$c(l \xrightarrow[l \rightarrow r]{} r) = \{(\{l\}, l, r)\} \gg$$

$$\{(\{l\}, g, l'), (\{l', r\}, \perp, \perp)\} = c(l \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l' \xleftarrow[l' = r]{} r)$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, effondrement (suite)

Les **conditions de Collapse** et l'ordre \ll sont liés :

- $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$ ou σ n'est pas un renommage
- $l = g\sigma$ et $r > d\sigma$ avec σ qui est un renommage

Ordre de plongement $C[s\sigma] \triangleright s, \triangleright = \triangleright \setminus \triangleleft$ partie stricte

- Si $l|_p = g\sigma$ avec $p \neq \Lambda$, alors $(\{l\}, l, r) \gg (\{l\}, g, l')$
- Si $l|_\Lambda = g\sigma$ et σ n'est pas un renommage alors $(\{l\}, l, r) \gg (\{l\}, g, l')$
- Si $l = g\sigma, r > d\sigma$ avec σ qui est un renommage alors $(\{l\}, l, r) \gg (\{l\}, g, l')$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, déduction

Soit un pic critique (de R_ω)

$$r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma = l\sigma[g\sigma]_\rho \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_\rho$$

Par hypothèse d'équité, on va calculer la paire critique associée, et avoir la nouvelle preuve

$$r\sigma \xleftrightarrow[r\sigma = l\sigma[d\sigma]_\rho]{} l\sigma[d\sigma]_\rho$$

$$c(r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_\rho) = \{(\{l\sigma\}, l, r\sigma), (\{l\sigma\}, g, l\sigma[d\sigma]_\rho)\} \gg \\ \{(\{r\sigma, l\sigma[d\sigma]_\rho\}, \perp, \perp)\} = c(r\sigma \xleftrightarrow[r\sigma = l\sigma[d\sigma]_\rho]{} l\sigma[d\sigma]_\rho)$$

car

$$l\sigma > r\sigma \qquad l\sigma > l\sigma[d\sigma]_\rho$$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve, commutation d'un pic non critique

Soit un pic **non critique**

$$s \xleftarrow{R} t \xrightarrow{R} u$$

Il se referme par

$$s \xrightarrow{R^*} \xleftarrow{R^*} u$$

$$c(s \xleftarrow{R} t \xrightarrow{R} u) > \{(\{t\}, \perp, \perp)\} > c(s \xrightarrow{R^*} \xleftarrow{R^*} u)$$

car tous les termes de $s \xrightarrow{R^*} \xleftarrow{R^*} u$ sont $< t$

Complétude de la complétion

Transformation d'une preuve

En résumé, on sait fabriquer une preuve Q , avec $Q \ll P$ dès que

- P utilise une **équation**
- P utilise une **règle de $R_\infty \setminus R_\omega$**
- P contient un **pic de R_ω**

ce qui est la même chose que P n'est pas de la forme

$$\xrightarrow{R_\omega^*} \xleftarrow{R_\omega^*}$$

Complétude de la complétion

Théorème : Soit une exécution de la complétion **équitable** et qui **réussit**

$$(E_0, \emptyset) \vdash (E_1, R_1) \vdash \dots (E_n, R_n) \vdash (E_{n+1}, R_{n+1}) \dots$$

- $\xleftrightarrow[*]{E_\infty \cup R_\infty}$ est équivalente à $\xleftrightarrow[*]{R_\omega} \xleftarrow[*]{R_\omega}$
- R_ω est équivalent à E_0
- R_ω est convergent
- (semi-)décision pour le problème du mot de E_0

Amélioration

Critère d'élimination des paires critiques

Idée : se baser sur la **preuve de complétude** pour éliminer les paires critiques « **inutiles** »

Qu'est-ce qu'inutile veut dire ?

On peut **éliminer le pic critique** associé par une **preuve plus petite** qui n'utilise pas la paire critique.

Amélioration

Critère d'élimination des paires critiques

$$r\sigma \xleftarrow[r \leftarrow l]{} l\sigma = l\sigma[g\sigma]_p \xrightarrow[g \rightarrow d]{p} l\sigma[d\sigma]_p$$

- substitution σ **réductible**
- $l\sigma$ **réductible** strictement au dessous de p

Et si ça ne marche pas ?

- Problème lié à l'ordre choisi (voir la démo)
- Problème inhérent au système d'équations de départ ;
par exemple **commutativité**

$$x + y = y + x$$

Changer la relation de réécriture (1)

Réécriture ordonnée par un ordre $>$

Entrées :

- un système d'équations E_0
- un ordre $>$

Étape de réécriture **ordonnée** :

$$s \xrightarrow[E_{>}; u=v, \sigma]^p t \quad \text{si} \quad s|_p = u\sigma \quad , \quad t = s[v\sigma]_p \quad \text{et} \quad u\sigma > v\sigma$$

Changer la relation de réécriture (1)

Réécriture ordonnée par un ordre \succ

On **ajoute** les règles suivantes à la complétion usuelle

- **Deduction2** $(E; R) \vdash (E\{s = t\}; R)$
if $s \leftrightarrow_{E \cup R} u \leftrightarrow_{E \cup R} t$ and $u \not\prec t, u \not\prec s$
- **Simplification2** : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E \cup \{u = t\}; R)$
if $s \rightarrow_{E_{\succ}; l=r} u$ and $s \triangleright l$
- **Composition2** : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E; R \cup \{s \rightarrow u\})$
if $t \rightarrow_{E_{\succ}} u$
- **Collapse2** : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E \cup \{v = t\}; R)$
if $s \rightarrow_{E_{\succ}; l=r} v$ and $s \triangleright l$

Changer la relation de réécriture (2)

Réécriture modulo

Entrées :

- un système d'équations A (commutativité ou AC)
- un système d'équations E_0
- un ordre $>$ **compatible** avec A

$$\leftarrow \begin{matrix} * \\ A \end{matrix} \rightarrow > \leftarrow \begin{matrix} * \\ A \end{matrix} \rightarrow \subseteq >$$

Étape de réécriture modulo A :

$$s \xrightarrow[A \setminus l \rightarrow r, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s|_p =_A l\sigma \quad \text{et} \quad t = s[r\sigma]_p$$

Changer la relation de réécriture (2)

Réécriture modulo

- **Delete** : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E; R)$ if $s =_A t$
- **Compose** : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E; R \cup \{s \rightarrow u\})$ if $t \xrightarrow{A \setminus R} u$
- **Simplify** : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E \cup \{s = u\}; R)$ if $t \xrightarrow{A \setminus R} u$
- **Orient** : $(E \cup \{s = t\}; R) \vdash (E; R \cup \{s \rightarrow t\})$ if $s > t$
- **Collapse** : $(E; R \cup \{s \rightarrow t\}) \vdash (E \cup \{u = t\}; R)$ if $s \xrightarrow{A \setminus R} u$ by a rule $l \rightarrow r \in R$ with $s \triangleright l$
- **Extend** : $(E; R) \vdash (E; R \cup \{t \rightarrow s\})$ if $s \xleftarrow{R} u \xleftrightarrow{A} t$
- **Deduce** : $(E; R) \vdash (E \cup \{s = t\}; R)$ if $s \xleftarrow{R} u \xrightarrow{A \setminus R} t$

Changer la relation de réécriture (3)

Réécriture normalisée

Entrées :

- un système de réécriture S **convergent**
- un système d'équations E_0
- un ordre $>$ **compatible** avec S

$$\xrightarrow{S} \quad \sqcup \quad >$$

Étape de réécriture modulo S :

$$s \xrightarrow[l \rightarrow r/S, \sigma]{p} t \quad \text{si} \quad s' = s \downarrow_S \quad \text{et} \quad s' \xrightarrow[l \rightarrow r, \sigma]{p} t$$

Changer la relation de réécriture (3)

Réécriture normalisée

- **Normalisation** $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \{u \downarrow_S = v \downarrow_S\}; R$
- **Orientation** $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \Theta(u, v); R \cup \Psi(u, v)$ si $u = u \downarrow_S, v = v \downarrow_S, u > v$
- **Déduction** $E; R \vdash E \cup \{u = v\}; R$ si $u = v \in CP_T(R)$
- **Effacement** $E \cup \{u = v\}; R \vdash E; R$ si $u =_{AC} v$
- **Composition** $E; R \cup \{u \rightarrow v\} \vdash E; R \cup \{u \rightarrow v'\}$ si $v \xrightarrow{R/S} v'$
- **Simplification** $E \cup \{u = v\}; R \vdash E \cup \{u' = v\}; R$ si $u \xrightarrow{R/S} u'$
- **Réduction** $E; R \cup \{u \rightarrow v\} \vdash E \cup \{u' = v\}; R$ si
$$\left\{ \begin{array}{l} l \rightarrow r \in R \\ u \xrightarrow{\theta} u' \\ l \rightarrow r/S \\ (u, v) \triangleright (l\theta, r\theta) \end{array} \right.$$

Assurer autrement la terminaison du résultat (1)

Multi-complétion

Idée : faire **en parallèle** plusieurs complétions avec plusieurs ordres

$\prec_1, \prec_2, \dots, \prec_n$

Structure de données : un ensemble N de faits

$$\langle s : t, L_{\rightarrow}, L_{\leftarrow}, L_{=} \rangle$$

avec

- $L_{=}, L_{\rightarrow}, L_{\leftarrow}$ sont deux à deux disjoints
- $L_{=} \cup L_{\rightarrow} \cup L_{\leftarrow} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
- si $i \in L_{=}$ et $\langle s : t, L_{=}, L_{\rightarrow}, L_{\leftarrow} \rangle \in N$, alors $s = t \in E(\prec_i)$
- si $i \in L_{\rightarrow}$ et $\langle s : t, L_{=}, L_{\rightarrow}, L_{\leftarrow} \rangle \in N$, alors $s \rightarrow t \in R(\prec_i)$
- si $i \in L_{\leftarrow}$ et $\langle s : t, L_{=}, L_{\rightarrow}, L_{\leftarrow} \rangle \in N$, alors $t \rightarrow s \in R(\prec_i)$

Assurer autrement la terminaison du résultat (1)

Multi-complétion

- **DELETE** : $N \cup \{\langle s : s, \emptyset, \emptyset, L \rangle\} \vdash N$ if $L \neq \emptyset$
- **REWRITE-1** : $N \cup \{\langle s : t, L_1, L_2, L_3 \rangle\} \vdash N \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle s : t, L_1 \setminus L, L_2, L_3 \setminus L \rangle \\ \langle s : u, L \cap L_1, \emptyset, L \cap L_3 \rangle \end{array} \right\}$
if $\langle l : r, L, \dots, \dots \rangle \in N$, $t \rightarrow_{\{l \rightarrow r\}} u$, $L \cap (L_1 \cup L_3) \neq \emptyset$, and either $t \doteq l$ or $L \cap L_2 = \emptyset$
- **REWRITE-2** :
 $N \cup \{\langle s : t, L_1, L_2, L_3 \rangle\} \vdash N \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle s : t, L_1 \setminus L, L_2 \setminus L, L_3 \setminus L \rangle \\ \langle s : u, L \cap L_1, \emptyset, L \cap (L_2 \cup L_3) \rangle \end{array} \right\}$ if
 $\langle l : r, L, \dots, \dots \rangle \in N$, $t \rightarrow_{\{l \rightarrow r\}} u$, $t \triangleright l$ and $L \cap L_2 \neq \emptyset$
- **ORIENT** : $N \cup \{\langle s : t, L_1, L_2, L_3 \cup L \rangle\} \vdash N \cup \{\langle s : t, L_1 \cup L, L_2, L_3 \rangle\}$ if $L \neq \emptyset$
and $s \succ_i t$ for all $i \in L$
- **DEDUCE** : $N \vdash N \cup \{\langle s : t, \emptyset, \emptyset, L \cap L' \rangle\}$ if $\langle l : r, L, \dots, \dots \rangle \in N$,
 $\langle l' : r', L', \dots, \dots \rangle \in N$, $L \cap L' \neq \emptyset$, and $s \leftarrow_{\{l \rightarrow r\}} u \rightarrow_{\{l' \rightarrow r'\}} t$

Assurer autrement la terminaison du résultat (2)

Complétion avec un TT ("termination tool")

Idée : au lieu d'attendre un **ordre** en entrée,
on utilise un **outil automatique de terminaison**

une équation est orientée si la règle obtenue ne casse pas la terminaison.

Attention :

- à l'étape (E_n, R_n) , l'ordre sous-jacent $\longrightarrow_{\bigcup_{i \leq n} R_i}$ est bien fondé
- $\longrightarrow_{\bigcup_{i \leq n} R_i} \subseteq \longrightarrow_{\bigcup_{i \leq n+1} R_i}$
- $\longrightarrow_{\bigcup_i R_i}$ n'est en général pas bien fondé

Assurer autrement la terminaison du résultat (2)

Complétion avec un TT ("termination tool")

Contre-exemple (réécriture de mots)

$$E_0 = \{wa = ab; ac = abc\} \quad R_n = \{wa \rightarrow ab\} \cup \bigcup_{i \leq n} \{ab^i c \rightarrow ab^{i+1} c\}$$

Paires critiques

$$\begin{array}{ccccccc} abb^i c & \longleftarrow & wab^i c & \longrightarrow & wab^{i+1} c & \longrightarrow & abb^{i+1} c \\ & ab \leftarrow wa & & ab^i c \rightarrow ab^{i+1} c & & wa \rightarrow ab & \end{array}$$

Il faut se restreindre à des exécutions **finies**.

Assurer autrement la terminaison du résultat (2)

Complétion avec un TT ("termination tool")

- **orient** : $(E \cup \{s = t\}, R, C) \vdash (E, R \cup \{s \rightarrow t\}, C \cup \{s \rightarrow t\})$ if $C \cup \{s \rightarrow t\}$ terminates
- **deduce** : $(E, R, C) \vdash (E \cup \{s = t\}, R, C)$ if $s \leftarrow_R u \rightarrow_R t$
- **delete** : $(E \cup \{s = s\}, R, C) \vdash (E, R, C)$
- **simplify** : $(E \cup \{s = t\}, R, C) \vdash (E \cup \{u = t\}, R, C)$ if $s \rightarrow_R u$
- **compose** : $(E, R \cup \{s \rightarrow t\}, C) \vdash (E, R \cup \{s \rightarrow u\}, C)$ if $t \rightarrow_R u$
- **collapse** : $(E, R \cup \{s \rightarrow t\}, C) \vdash (E \cup \{v = t\}, R, C)$ if $s \xrightarrow[R]{\triangleright} v$

Unification

(suite)

Unification modulo E

E un ensemble d'équations de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

Définition (Problème d'unification modulo)

- 1 \top, \perp ,
- 2 $s = t$,
- 3 $\exists x, P$,
- 4 $P \wedge Q, P \vee Q$

Définition (Solutions)

- 1 *Toute substitution est solution de \top , aucune n'est solution de \perp ,*
- 2 *σ est solution de $s = t$ si $s\sigma =_E t\sigma$,*
- 3 *σ est solution de $\exists x, P$ s'il existe t tel que σ est solution de $P\{x \mapsto t\}$,*
- 4 *σ est une solution de $P \wedge Q$ si σ est une solution de P et de Q ,*
- 5 *σ est une solution de $P \vee Q$ si σ est une solution de P ou de Q .*

Notation $\mathcal{U}_E(P)$: ensemble des solutions de P modulo E

Définition

forme résolue si

- \top ou \perp
- ou de la forme

$$\exists y_1, \dots, y_p, x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_n = t_n$$

$$x_i \text{ s } 2 \text{ à } 2 \neq, \{x_i\}_i \cap \{y_j\}_j = \emptyset, \{x_i\}_i \cap \bigcup_k \text{Var}(t_k) = \emptyset.$$

forme résolue **compacte** : pour toute équation variable-variable $x = y$,
 x et y sont libres

appliquer la règle suivante autant que possible

$$\text{Replace-nv} \quad \frac{\exists y_1, \dots, y_p, \mathbf{y} \ P \wedge \mathbf{x} = \mathbf{y}}{\exists y_1, \dots, y_p \ P\{\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}\}}$$

Proposition

$P \equiv \exists y_1, \dots, y_p, x_1 = t_1 \wedge \dots \wedge x_n = t_n$ un problème en forme résolue, et soit θ la substitution

$$\{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$$

$\{\theta\}$ est un ensemble complet minimal d'unificateurs pour P

même preuve que dans le cas $E = \emptyset$

Ensemble complet minimal d'unificateur(s)

Définition (Ensemble complet minimal d'unificateurs)

$\mathcal{M}(P)$ est un **ensemble complet minimal d'unificateurs** si

- $\mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{U}(P)$
- *minimal* : pour tous $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(P)$, si $\mu_1 = \mu_2\theta$, alors $\mu_1 = \mu_2$
- *complet* : $\mathcal{U}(P) = \{\mu\theta \mid \mu \in \mathcal{M}(P), \theta \text{ substitution}\}$

Classification

E une théorie équationnelle est

- 1 unitaire si $\mathcal{U}(P) = \emptyset$ ou $\mathcal{M}(P) = \{\mu\}$
- 2 finitaire si $\mathcal{M}(P) = \bigcup_{i=1}^{i=n_P} \{\mu_i\}$
- 3 infinitaire si $\mathcal{M}(P) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\mu_i\}$
- 4 nulaire sinon

- 1 $E = \emptyset$, unitaire
- 2 $E = AC$, finitaire
- 3 $E = A$, infinitaire
- 4 $E = A \cup \{x + x = x\}$, nulaire

Représentation commode des termes modulo AC

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{A})$$

$$x + y = y + x \quad (\text{C})$$

Définition (Forme canonique)

forme canonique \bar{t} d'un terme t :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x && \text{si } x \text{ est une variable} \\ \overline{f(t_1, \dots, t_n)} &= f(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) && \text{si } f \text{ n'est pas un symbole AC} \\ \overline{+(t_1, t_2)} &= \begin{cases} +(Sort(\bar{t}_1, \bar{t}_2)) & \text{si } t_i(\Lambda) \neq + \\ +(Sort(\bar{t}_1, v_1, \dots, v_n)) & \text{si } t_1(\Lambda) \neq +, \bar{t}_2 = +(v_1, \dots, v_n) \\ +(Sort(u_1, \dots, u_m, \bar{t}_2)) & \text{si } \bar{t}_1 = +(u_1, \dots, u_m), t_2(\Lambda) \neq + \\ +(Sort(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)) & \text{si } \bar{t}_1 = +(u_1, \dots, u_m), \\ & \bar{t}_2 = +(v_1, \dots, v_n) \end{cases} \end{aligned}$$

Sort est une fonction de tri sur les listes de termes qui utilise un ordre arbitraire fixé

Théorème

$$s =_{AC} t \iff \bar{s} = \bar{t}$$

Unification modulo AC

finitaire, mais pas unitaire

$x + y = a + b$ a pour solutions

$$\{x \mapsto a; y \mapsto b\} \text{ et } \{x \mapsto b; y \mapsto a\}$$

pas de mgu μ

Unification modulo AC élémentaire

élémentaire = 1 seul symbole AC + des variables

$$\mathcal{U}_{AC}(x + s = x + t) = \mathcal{U}_{AC}(s = t) :$$

donc on peut se restreindre aux équations AC de la forme

$$E \equiv \underbrace{x_1 + \dots + x_1}_{a_1 \text{ fois}} + \dots + \underbrace{x_n + \dots + x_n}_{a_n \text{ fois}} = \underbrace{y_1 + \dots + y_1}_{b_1 \text{ fois}} + \dots + \underbrace{y_m + \dots + y_m}_{b_m \text{ fois}}$$

$$\text{avec } \{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset$$

équation diophantienne linéaire associée à E

$$(e) \equiv a_1 v_1 + \dots + a_n v_n - b_1 w_1 - \dots - b_m w_m = 0$$

Lien entre E et (e)

Lemme

σ une solution de E et z une variable introduite par σ .

$c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m$ les **nombre d'occurrences de z** dans $x_1\sigma, \dots, x_n\sigma, y_1\sigma, \dots, y_m\sigma$.

Alors **$(c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_m)$ est une solution de (e)** .

Démonstration.

les formes canoniques de $s\sigma$ et $t\sigma$ ont le même nombre de z ,
et ces nombres sont $a_1 c_1 + \dots + a_n c_n$ et $b_1 d_1 + \dots + b_m d_m$. □

Représentation compacte des substitutions

Définition

v_1, \dots, v_n variables, t_1, \dots, t_m termes, $a_{ij} \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$
 $\sum_{i=1}^m a_{ij} \neq 0$

tableau $T \equiv$

	v_1	\dots	v_j	\dots	v_n
t_1	a_{11}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
t_m	a_{m1}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}

désigne la *substitution*

$$\{v_i \mapsto \underbrace{t_1 + \dots + t_1}_{a_{1i} \text{ fois}} + \dots + \underbrace{t_m + \dots + t_m}_{a_{mi} \text{ fois}}\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$$

sous-tableau admissible de T : sous ensemble de lignes de T où la somme des coefficients d'aucune colonne n'est nulle.

Unification AC élémentaire

Théorème (Stickel (1975), Livesey & Siekman (1976))

P : p équations modulo AC, E_1, \dots, E_p avec n variables x_1, \dots, x_n . Soit

$$S = \{(c_{1,1}, \dots, c_{1,n}), \dots, (c_{m,1}, \dots, c_{m,n})\}$$

l'ensemble des **solutions minimales** pour \leq^n , positives, non nulles de $(e_1) \wedge \dots \wedge (e_p)$. Alors, les **sous-tableaux admissibles** de

		x_1	\dots	x_n
	z_1	$c_{1,1}$	\dots	$c_{1,n}$
$T \equiv$	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	z_m	$c_{m,1}$	\dots	$c_{m,n}$

où z_1, \dots, z_m sont de nouvelles variables,

sont un **ensemble complet d'unificateurs modulo AC** de P .

Exemple

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \uplus \mathcal{F}_2$ est **finie**

$$E = E_1 \cup E_2$$

E_i ne contient que des termes de $\mathcal{T}(\mathcal{F}_i, \mathcal{X})$, finitaire

$E_i, i = 1, 2$ est une **théorie simple**, les équations de la forme $s = t$ où t est un **sous-terme propre** de s , n'ont **pas de solutions** modulo E_i .

pour $E_i, i = 1, 2$, algorithme qui calcule un ensemble complet fini d'unificateurs

Définition (Sous-terme étranger)

$u = t|_p$ est étranger dans t si $p = q \cdot n$, $t(q) \in \mathcal{F}_i$, $t(q \cdot n) \in \mathcal{F}_j$ avec $i \neq j$.

$$\text{VA} \quad \frac{\exists y_1, \dots, y_p \ s[u]_p = t \wedge P}{\exists x, y_1, \dots, y_p \ s[x]_p = t \wedge x = u \wedge P}$$

si u est un sous-terme étranger de $s[u]_p$ à la position p .

E-Res $\frac{P_i}{P'_i}$ si P_i n'est pas en forme résolue et P'_i est une forme résolue compacte de P_i .

Lemme

$s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{X})$, γ de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ telle que

$$s\gamma =_{E_1 \cup E_2} t\gamma$$

Alors il existe σ de $\mathcal{T}(\mathcal{F}_1, \mathcal{X})$, θ de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$$s\sigma =_{E_1} t\sigma \text{ et } \gamma =_{E_1 \cup E_2} \sigma\theta$$

La preuve de ce lemme repose sur la complétion close ordonnée.

Règles d'inférence (suite)

Var-Rep	$\frac{\exists z_1, \dots, z_p \ x = y \wedge P}{\exists z_1, \dots, z_p \ x = y \wedge P\{x \mapsto y\}}$	si $x, y \in \text{Var}(P)$, et x est \exists -quantifié ou y est libre
Conflit-1	$\frac{\exists z_1, \dots, z_p \ x = s_1 \wedge x = s_2 \wedge P}{\perp}$	si $x \in \mathcal{X}$, $s_1(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_2(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$
Conflit-2	$\frac{\exists z_1, \dots, z_p \ s_1 = s_2 \wedge P}{\perp}$	$s_1(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_2(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$
Cycle	$\frac{\exists y_1, \dots, y_p \ x_1 = t_1[x_2]_{p_1} \wedge \dots \wedge x_n = t_n[x_1]_{p_n}}{\perp}$	si $n \geq 2$, $\exists i$ et $\exists j$, $s_i(\Lambda) \in \mathcal{F}_1$ et $s_j(\Lambda) \in \mathcal{F}_2$.
EQE	$\frac{\exists x, y_1, \dots, y_p \ x = s \wedge P}{\exists y_1, \dots, y_p \ P}$	si x n'apparaît ni dans s ni dans P